

〈論 文〉

최적설계시 이차근사법의 수치성능 평가에 관한 연구

박영선* · 박경진** · 이완익***

(1991년 8월 27일 접수)

An Evaluation of the Second-order Approximation Method for Engineering Optimization

Young-Sun Park, Gyung-Jin Park and Wan-Ik Lee

Key Words : Optimal Design(최적설계), Second-order Approximation Method(이차근사법), Nonlinear(비선형성), Sensitivity Analysis(민감도해석), Function Evaluation(함수값계산), Weighted Least-squared Method(가중최소제곱법)

Abstract

Optimization has been developed to minimize the cost function while satisfying constraints. Nonlinear Programming method is used as a tool for the optimization. Usually, cost and constraint function calculations are required in the engineering applications, but those calculations are extremely expensive. Especially, the function and sensitivity analyses cause a bottleneck in structural optimization which utilizes the Finite Element Method. Also, when the functions are quite noisy, the informations do not carry out proper role in the optimization process. An algorithm called "Second-order Approximation Method" has been proposed to overcome the difficulties recently. The cost and constraint functions are approximated by the second-order Taylor series expansion on a nominal points in the algorithm. An optimal design problem is defined with the approximated functions and the approximated problem is solved by a nonlinear programming numerical algorithm. The solution is included in a candidate point set which is evaluated for a new nominal point. Since the functions are approximated only by the function values, sensitivity informations are not needed. One-dimensional line search is unnecessary due to the fact that the nonlinear algorithm handles the approximated functions. In this research, the method is analyzed and the performance is evaluated. Several mathematical problems are created and some standard engineering problems are selected for the evaluation. Through numerical results, applicabilities of the algorithm to large scale and complex problems are presented.

기 호 설 명

x_i : 설계변수 (design variables)

$f(x)$: 목적함수

$h_i(x)$: 등제 한조건함수

$g_i(x)$: 부등제 한조건함수

$\nabla f(x)$: 목적함수 1차미분벡터

$\nabla h_i(x)$: 등제 한조건함수 1차미분벡터

*정회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

**정회원, 한양대학교 기계공학과

***정회원, 한양대학교 기계설계학과

- $\nabla g_i(x)$: 부등제한조건함수1차미분벡터
- $[F]$: 목적함수2차미분행렬
- $[H]$: 등제한조건함수2차미분행렬
- $[G]$: 부등제한조건함수2차미분행렬
- S : 편차 (deviation)의 제곱의 합
- δx^k : k번째 반복진행시의 설계점의 편차
- δy^k : k번째 반복진행시의 함수값의 편차
- SPT : 초기값
- XOV : 최적값
- FOV : 최적치
- ITR : 반복지행수
- FEV : 함수값계산 부프로그램 호출수
- GEV : 민감도계산 부프로그램 호출수
- RQP : 반복이차제곱법 (recursive quadratic programming)
- CFB : 목적함수영역제한법 (cost function bounding method)
- MFD : 수정된 가용방향변화법 (modified feasible direction method)
- SAM : 이차근사법 (second-order approximation method)

1. 서 론

일반적인 최적설계 문제는

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x) & (1) \\ \text{Subject to } & h_i(x) = 0 & i=1, \dots, m' & (2) \\ & g_i(x) \leq 0 & i=m'+1, \dots, m & (3) \\ & x_i^l \leq x_i \leq x_i^u & i=1, \dots, p & (4) \end{aligned}$$

으로 정의되는데 여기서 x 는 설계변수벡터, $f(x)$ 는 목적함수, $h_i(x)$ 는 등제한조건함수, $g_i(x)$ 는 부등제한조건함수이다. 일반적인 방법은 먼저 초기치를 선정하고 Taylor 급수전개를 이용하여 선형화 프로그램(subprogram)을 만들어 풀어나가는데 그 전체적인 흐름은 Fig. 1과 같다. 선형화된 문제를 세우기 위해서는 목적함수와 제한조건함수의 민감도(sensitivity)를 계산해야한다. 이러한 민감도 정보는 해석적으로 구할 수 있겠으나 많은 경우에 유한차분법을 이용하여 계산하고 있으며 설계변화량(stepsize)을 계산하기 위해서는 1차원 탐색(1-dimensional search)를 수행하여 계산하고 있다. 위의 계산을 통하여 결정된 설계변수값에서 다시 함수값과 민감도를 계산하여 설계방향을 결정하고

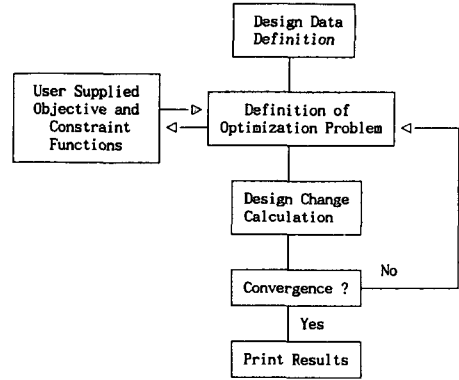


Fig. 1 Conventional program organization

결정된 방향을 따라 1차원탐색을 통하여 목적 함수 값을 되도록 많이 줄이는 방향으로 이동한다. 이러한 과정이 설계변수의 제한조건을 모두 만족하며 함수값을 최소로하는 지점을 찾을때까지 반복 진행 된다.

이러한 방법에서 함수값이나 미분값의 계산은 필수적이며 공학문제인 경우 계산량도 상당히 많은 것으로 알려져있다. 특히 함수가 심한 비선형성을 갖는 경우 전체적 추세에 맞는 적절한 민감도 정보를 구하지 못하는 경우도 발생한다. 또한 구조최적설계의 경우 제한조건함수의부프로그램으로 유한요소법이 요구되는 경우 대단히 많은 함수값과 민감도 계산이 요구되어 실제 문제에서의 적용에 어려움이 많다. 따라서 그 응용이 현재까지는 유한요소법의 발달로 인해 문제가 비교적 잘 정의된 구조 최적설계등에만 적용되어 왔다^(1,2,3,4). 그러나 최근 들어 동역학이나 유체역학등의 이론을 이용하는 해석이 복잡한 경우에 대하여 최적설계를 응용하려는 노력이 일고 있으나 함수값이나 미분값을 계산하는 비용이 대단히 고가이며 특히 많은 경우에 미분값 계산이 불가능해진다^(1,2). 이러한 어려움으로 최적설계를 실제 필요한 문제에 적용시키기엔 커다란 문제가 있다.

위의 어려운 점을 개선하기위하여 최근에 근사함수를 구하는 개념을 이용하여 함수값만 계산하고 미분값이 필요없는 이차근사법이라 불리는 방법이 개발되었다. 이 방법은 Vanderplaats에 의해 제한되었으나 그 우수성에도 불구하고 몇가지 사례 외에는 아직 많은 응용이 되고 있지 않은데 그 이유는 알고리즘에대한 실험평가가 아직 이루어져 있지 않기 때문이다^(5,6,7). 따라서 본 연구에서는 제안

된 알고리즘이 제작된 문제 및 기존의 수학적, 공학문제들을 통해 성능이 평가될 것이며 그 응용여부가 검토될 것이다.

2. 이차근사법 알고리즘

개괄적으로 설명하면 이차근사법은 주어진 문제의 각함수를 2차식으로 근사화시켜 근사화된 문제의 최적값을 구한후 구해진 값을 이용하여 다시 근사화 시키는 과정을 반복하여 원래의 최적값을 찾아가는 과정이다.

2.1 함수의 이차근사화

일반적인 최적설계의 과정은 설계자가 임의로 주는 초기값로 시작되지만 이차근사법에서는 초기값 이외에도 추천값(candidate points)을 임의의 수만큼 설계자가 임의로 줄 수 있다. 임의의 k 번째 반복진행에서 주어진 초기값과 추천값들에 대한 본래의 함수값을 해석하여 제한조건함수를 만족시키거나 가장 적게 위반하는 한편 목적함수를 최소로 하는 점을 결정하여 공칭점(nominal point)으로 정의한다. 공칭점을 중심으로 이차로 근사화를 하기 위해 공칭점과 나머지 각 점들과의 차이인 편차(δx)와 그리고 공칭점에서의 함수값과 나머지 각 점을 함수값의 차(δy)를 계산한다. 위에서 결정된 차이를 가지고 공칭점을 중심으로 가중최소제곱법을 수행한다. 가중최소제곱법은 곡선맞춤(curve fitting)의 한 방법으로 주어진 점들로 부터 계산된 편차의 제곱의 합을 최소화하여 근사화함수를 구성한다⁽⁶⁾. 서론에서 정의된 식 (1),(2),(3)의 목적함수, 제한조건함수등을 아래의 식과 같이 Taylor급수전개의 이차항까지 고려하여 δx 만을 변수로 하는 명시함수형태의 이차함수로 근사화시킨다⁽⁵⁾. 이 과정에서 어떤 복잡한 형태의 함축함수도 명시함수로 근사화된다.

$$f(\underline{x}^k + \delta \underline{x}^k) = f(\underline{x}^k) + \delta \underline{x}^{kT} \cdot \nabla f(\underline{x}^k) + 1/2 \cdot \delta \underline{x}^{kT} \cdot [F] \cdot \delta \underline{x}^k \quad (5)$$

$$h_i(\underline{x}^k + \delta \underline{x}^k) = h_i(\underline{x}^k) + \delta \underline{x}^{kT} \cdot \nabla h_i(\underline{x}^k) + 1/2 \cdot \delta \underline{x}^{kT} \cdot [H] \cdot \delta \underline{x}^k \quad i=1, \dots, m' \quad (6)$$

$$g_i(\underline{x}^k + \delta \underline{x}^k) = g_i(\underline{x}^k) + \delta \underline{x}^{kT} \cdot \nabla g_i(\underline{x}^k) + 1/2 \cdot \delta \underline{x}^{kT} \cdot [G] \cdot \delta \underline{x}^k \quad i=m'+1, \dots, m \quad (7)$$

여기서 $\nabla f(\underline{x}^k)$ 는 1차미분벡터, $[F]$, $[H]$, $[G]$ 는 각각의 식에대한 2차미분행렬(hessian matrix)로서

그들의 각 성분(components)이 가중최소제곱법으로 구하고자 하는 미지수이며 나머지 각항은 계산된 편차의 항이 된다. 보다 구체적인 함수의 이차근사화 과정은 식 (5)의 경우 다음과 같이 전개될 수 있다. p 개의 설계변수를 갖는 경우 식 (5)는

$$\begin{aligned} f(\underline{x}^k + \delta \underline{x}^k) &= f(\underline{x}^k) + \delta \underline{x}^{kT} \cdot \nabla f(\underline{x}^k) \\ &\quad + 1/2 \cdot \delta \underline{x}^{kT} \cdot [F] \cdot \delta \underline{x}^k \\ f(\underline{x}^k + \delta \underline{x}^k) - f(\underline{x}^k) &= \delta \underline{y}^k \\ &= \delta x_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2^k \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \delta x_p^k \frac{\partial f}{\partial x_p} \\ &\quad + \{ \delta x_1^k \delta x_2^k \dots \delta x_p^k \} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p} \\ \text{Symmetry} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_p \end{bmatrix} \quad (8)$$

와 같이 풀어 쓸 수 있으며 이식은 다시 미지수 c_i ($i=1, \dots, p$)와 d_{ij} ($i=1, \dots, p, j=1, \dots, p$)를 갖는 함수로 아래와 같이

$$\begin{aligned} \delta \underline{y}^k &= \delta x_1^k \cdot c_1 + \delta x_2^k \cdot c_2 + \dots + \delta x_p^k \cdot c_p \\ &\quad + \{ \delta x_1^k \delta x_2^k \dots \delta x_p^k \} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1p} \\ & d_{22} & \dots & d_{2p} \\ & & \vdots & \vdots \\ \text{Symmetry} & & & d_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

표현되어, 추천값이 구하려는 계수보다 적은 경우에는 공칭점으로 부터 계산된 점의 수로 구하여진 $\delta \underline{y}^k$, $\delta \underline{x}^k$ 의 수만큼의 연립방정식이 구성되므로 추천값과 같은수의 미지수가 차례대로 가중최소제곱법으로 구하여진다. 주어진 점과 공칭점으로 부터 계산된 편차의 수가 n 개이면 식 (9)에서 $\delta \underline{x}^k$ 의 일차항 중에서 다음과 같이 n 개의 항만을 고려하게 된다⁽⁶⁾.

$$\begin{aligned} \delta \underline{y}^{(1)} &= \delta x_1^{(1)} \cdot c_1 + \delta x_2^{(1)} \cdot c_2 + \dots + \delta x_n^{(1)} \cdot c_n \\ \delta \underline{y}^{(2)} &= \delta x_1^{(2)} \cdot c_1 + \delta x_2^{(2)} \cdot c_2 + \dots + \delta x_n^{(2)} \cdot c_n \\ &\vdots \\ \delta \underline{y}^{(n)} &= \delta x_1^{(n)} \cdot c_1 + \delta x_2^{(n)} \cdot c_2 + \dots + \delta x_n^{(n)} \cdot c_n \end{aligned} \quad (10)$$

윗식에서 편차의 제곱의 합 S 를 아래와 같이 구한

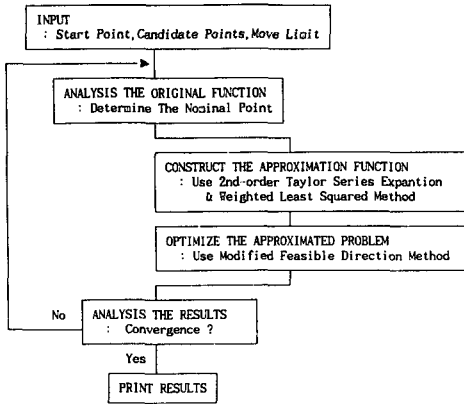


Fig. 2 Second-order approximation program organization

다. (7)

$$S = [\delta y^{(1)} - (\delta x_1^{(1)} \cdot c_1 + \delta x_2^{(n)} \cdot c_2 + \dots + \delta x_n^{(1)} \cdot c_n)]^2 + \dots + [\delta y^{(n)} - (\delta x_1^{(n)} \cdot c_1 + \delta x_2^{(n)} \cdot c_2 + \dots + \delta x_n^{(n)} \cdot c_n)]^2 \quad (11)$$

편차의 제곱의 합 S를 미지수 c_i , ($i=1, n$)에 대하여 편미분하여 그값이 0이 되도록, 즉 편차가 최소화되도록 다음과 같이 미지수 c_i , ($i=1, n$)의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial c_1} &= 0 \\ &= -2 \cdot [\delta y^{(1)} - (\delta x_1^{(1)} \cdot c_1 + \delta x_2^{(1)} \cdot c_2 + \dots + \delta x_n^{(1)} \cdot c_n)] \cdot \delta x_1^{(1)} \\ &\quad \dots - 2[\delta y^{(n)} - (\delta x_1^{(n)} \cdot c_1 + \delta x_2^{(n)} \cdot c_2 + \dots + \delta x_n^{(n)} \cdot c_n)] \cdot \delta x_1^{(n)} \\ &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial c_n} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

결국 위의 식 (12)의 결과는 아래와 같은 연립방정식으로 귀결된다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta x_1^{(i)} \cdot \delta x_1^{(i)} \cdot c_1 + \dots + \sum_{i=1}^n \delta x_1^{(i)} \cdot \delta x_n^{(i)} \cdot c_n \\ = \sum_{i=1}^n \delta y^{(i)} \cdot \delta x_1^{(i)} \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \sum_{i=1}^n \delta x_n^{(i)} \cdot \delta x_1^{(i)} \cdot c_1 + \dots + \sum_{i=1}^n \delta x_n^{(i)} \cdot \delta x_n^{(i)} \cdot c_n \\ = \sum_{i=1}^n \delta y^{(i)} \cdot \delta x_n^{(i)} \end{aligned} \quad (13)$$

윗 식에서 미지수와 방정식의 수가 모두 n 개이므로 연립방정식을 연산하여 미지수 c_i , ($i=1, n$)의 값을 구하여 근사화함수가 구성된다. 이때 $n \leq$

p 일때는 선형연립방정식을 푸는것과 같은 효과를 갖게된다. 즉 처음 단계에서는 구하여진 미지수만큼만 δy^k , δx^k 의 항이 고려되어 δx 를 독립변수로 하고 δy 를 종속변수로 하는 새로운 1차 혹은 2차 함수가 구성된다. 이 함수를 기존의 비선형계획법을 이용하여 최소값을 구하면 새로운 δy , δx 가 결정되어 이전의 공칭점에서 구해진 편차 δx 만큼 이동된 새로운 설계점이 얻어진다. 이 점은 다음번 가중최소제곱법을 위한 정보로 추가되어 점의 수가 설계변수의 수 p 보다 많아지면 δx^k 의 이차항의 미지수 d_{ij} 가 위의 식들로 구해진다. 새로운 공칭점을 구하는 과정이 계속 반복되어 추가되는 점의 수가 미지수의 수와 같아지면 모든 미지수가 구하여져서 식 (5), (6), (7)의 이차근사화가 완성되고 점이 더욱 추가되면 본격적으로 가중최소제곱법이 수행되어 공칭점을 중심으로 보다 우수한 보간을 시행하게된다(8).

2.2 근사화된 함수의 최적화와 해석

앞장의 방법으로 근사화된 문제는 다음과 같이 표기될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(x)_{app} &= f(x^k + \delta x^{kT} \cdot \nabla f(x^k) \\ &\quad + 1/2 \cdot \delta x^{kT} \cdot [F] \cdot \delta x^k \end{aligned} \quad (14)$$

Subject to

$$\begin{aligned} h_i(x)_{app} &= h_i(x^k) + \delta x^{kT} \cdot \nabla h_i(x^k) \\ &\quad + 1/2 \cdot \delta x^{kT} \cdot [H] \cdot \delta x^k = 0 \quad i=1, \dots, m' \quad (15) \\ g_i(x)_{app} &= g_i(x^k) + \delta x^{kT} \cdot g_i(x^k) \\ &\quad + 1/2 \cdot \delta x^{kT} \cdot [G] \cdot \delta x^k \leq 0 \quad i=m'+1, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

$$\delta x_{il} \leq \delta x_i \leq \delta x_{iu} \quad i=1, \dots, p \quad (17)$$

위와 같이 δx^k 의 이차식으로 근사화된 목적함수와 제한조건함수의 최적값은 기존의 비선형계획법을 사용하여 계산한다. 본 연구에서는 안전영역(Feasible Region)을 따라 최적값에 이르는 수정된 가용방향법(Modified Feasible Direction Method)을 부프로그램으로 사용한다(9). 여기서 주목할 것은 본래의 함수가 함수값과 민감도 계산이 난해한 어떤 복잡한 형태이든 실제로 최적설계되어지는 함수는 이차로 근사화된 함수이므로 함수값과 민감도의 계산이 매우 빠르게 계산되므로 사용되는 기존의 최적설계알고리즘의 선택과 행하여지는 함수값과 민감도의 계산은 큰 의미가 없다고 볼 수 있다. (4) 이렇게 결정된 근사화된 함수의 최소값은 다

음변 가중최소제곱법을 위한 정보로 추가된다⁽⁸⁾. 초기값의 선택에 따라 근사화함수의 1차항의 미지수가 모두 구해지기전 수렴되는 경우도 발생할 수 있는데 이 때는 해의 정확도를 위해 1차항의 미지수가 모두 구해질때까지 반복시행되며 이차항의 미지수의 경우는 미소편차의 제곱(δx^2)의 항이므로 수렴하면 즉시 정지된다⁽⁸⁾. 추가된 점을 다시 본래의 함수에서 해석하여 이전의 공칭점과 비교하여 목적함수값을 더욱 최소화하는 점을 새로운 공칭점으로 삼아 그 점을 중심으로 추가된 점을 포함하여 다시 가중최소제곱법을 수행하여 미지수를 구하고 새로운 근사함수를 결정하게 된다. 이 근사화함수를 최소화시키는 일련의 과정을 반복해나간다.

2.3 이차근사법 알고리즘의 수렴기준

두 번의 연속적인 근사화된 함수의 최적설계에 서로 같은 설계변수 값이 얻어지는 경우 즉 현재의 공칭점이 근사화 함수의 최소값이 되어 편차 δx^* 가 0이 될 때 수렴한 것으로 간주한다. 이렇게 얻어진 최적해는 근사화 함수에서 결정되어 본래의 함수에서 분석되므로 문제에 따라 모든 제한조건함수들이 완벽하게 만족되지 않는 경우도 간혹 발생한다. 이때는 프로그램 내부에서 현재의 설계점 근처에서 임의의 점을 선택하여 지정된 수의 반복진행을 추가시킨다. 그래도 제한조건을 만족시키며 수렴이 되지 않으면 개선된 현재의 설계점에서 종료된다. 이러한 경우에는 최초의 초기값과 추천값을 바꾸어서 다시 실행하여야한다. 그러나 민감도 해석이 없으므로 한번의 설계과정을 진행하는 것이 고가가 아니어서 큰 어려움은 없다고 사료된다. 이러한 과정은 절대수렴(global convergence)이 증명되어 있는 알고리즘에서도 수치적으로 수렴이 안될때 흔히

사용되는 방법이다. 이러한 수렴판정은 본 연구에서의 경험을 토대로 만들어졌으며 이에 따라 프로그램이 개발되었다⁽¹⁰⁾.

3. 이차근사법의 적용 및 분석

본 연구에서 소개된 이차근사법의 성능실험은 여러가지 문제를 대상으로 몇가지 최적설계 알고리즘과 수렴여부, 함수값계산수 및 최적해의 크기 등을 통하여 비교분석하였다. 사용된 일반적인 최적설계 알고리즘은 반복이차계획법(recursive quadratic programming, RQP) 목적함수영역제한법(cost function bounding method, CFB) 수정된가용방향변화법(modified feasible direction method, MFD) 등이며 이차근사법(second-order approximation method, SAM)과 동일한 문제를 같은조건에서 해결하였다.^(9,11) 각 문제 및 알고리즘에 공통으로 적용되는 방향벡터의 절대값에 대한 수렴기준(converge criteria)은 10^{-4} 이며, 최대제한조건위반허용치(maximum constraints violation)는 10^{-3} 을 사용한다. 언급된 최적설계 알고리즘들은 비선형계획법의 일종으로서 비선형문제를 선형화시켜 방향벡터와 설계변화량을 구하여 반복진행하여 최적값을 찾아나가는 방법의 범주에 속하는데 많은 연구를 통하여 매우 우수한 것으로 알려져있다^(12,13,14). 본 논문에서는 IDESIGN3의 RQP와 CFB,⁽¹¹⁾ 그리고 ADS의 MFD⁽⁹⁾를 사용하였는데 일반사용자 입장에서 IDESIGN3와 ADS의 주어진 값(default value)을 그대로 사용하였고 문제에 따라라도 파라미터를 변화시키지 않았고 비교시 2차근사법의 파라미터들도 문제에 따라 변화시키지 않았다.

동역학, 유체역학에 적용한 예는 참고문헌(7)에

Table 1 Results of problem 3.1

	SPT	XOV	FOV	ITR	FEV	SPT	XOV	FOV	ITR	FEV
RQP	1.052	1.4472	0.9990	3	40	1.059	1.5509	0.9937	4	36
CFB	—	1.5432	0.9937	5	43	—	1,1719	0.9974	6	46
MFD	—	1.0487	0.9990	3	11	—	1.7080	0.9934	3	11
SAM	—	1.5202	0.9941	31	32	—	1.5131	0.9940	35	36
RQP	1.085	1.0757	0.9985	3	36	1.06	1.5443	0.9937	3	39
CFB	—	1.5426	0.9937	5	43	—	1,6939	0.9933	11	63
MFD	—	1.0851	0.9987	3	11	—	1.6413	0.9928	4	17
SAM	—	1.6262	0.9932	31	32	—	1.6401	0.9928	6	7

나타나 있는데 알고리즘 성능평가를 위해서는 그러한 문제를 선택하지 않았는데 기존의 알고리즘이 그러한 문제를 풀지 못하므로 성능의 비교가 불가하기 때문이다. 따라서 본 논문에선 기존의 알고리즘이 다룰 수 있는 문제만을 선택하여 비교하였다.

참고로 아래의 Table 1에서 사용되는 약자들은, RQP는 반복이차계획법, CFB는 목적함수영역제한법, MFD는 수정된가용방향변화법, SAM은 이차근사법, SPT는 초기값(starting points), XOV는 최적값(optimum values), FOV는 최적치(optimum function value), ITR은 반복진행수(No.o Iteration), FEV는 함수값계산 부프로그램호출수(No.of function evaluation), GEV는 목적함수 민감도계산 부프로그램 호출수(No.of gradient evaluation)를 나타낸다.

3.1 진동이 극심한 문제(A Problem with Extreme noise)

비선형성이 대단히 큰 함수나조건이 나쁜 함수를 나타내기위하여 Fig. 3에 보이는 함수가 제작되었는데 각 구간을 확대해서보면 Fig. 4, Fig. 5과 같다. 보이는 바와 같이 비록 제한조건이 없고 설계변수가 1개뿐이지만 최적해의 근처에서 아주 미소한 주기로 진동함을 볼 수 있다. 이러한 현상은 해석이 복잡한 동역학 문제등에서 나타날 수 있는데 실제문제에서는 제한조건및 설계변수가 여럿이 되므로 더욱 복잡한 형태로 된다. 이 경우 진동을 심하게 하는 이유로 인하여 각 국소 부분의 민감도정보가 전체적인 추세와 크게 다를 수 있으므로 최적해에서의 수렴이 대단히 힘들 수 있다. 실제 예로서 동역학등의 문제에서 민감도해석이 힘든 것으로 알려져 있고 또 민감도를 구하더라도 위의 이유로 인하여 수렴여부에 문제가 발생할 수 있다. 여기서 제작된 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(x) &= 0.5W J x^2 + a \cdot x + B_1 + 1 & x < A_1 \\ f(x) &= \beta_i \cdot (x - (A_i + c_i) \div 2)^2 + D_i, & i=1, 40 \quad A_i \leq x < A_{j+1} \\ & & j=1, 39 \quad A_{40} \leq x < C_{40} \\ f(x) &= (x - C_{40})^2 + B_{40} & x \geq 40 \end{aligned}$$

위의 식에서 사용된 상수 A, B, C, D, α , β 는 참고문헌 (10)에 정의되어 있다. 최적설계알고리즘중에서 RQP와 MFD는 초기값에 따라 최적값까지 이르지 못하고 초기값 근처의 국소값에 빠지는 경

우가 발생한다. 예로서 MFD의 경우 Fig. 3의 해 근처인 A부분을 Fig. 5에서 다시 보면 주어진 임의의 4개의 초기값중에서 국소최적값에 빠지는 경우와 최적값으로 수렴하는 경우로 구분되며 초기값 근처인 Fig. 4의 B부분을 Fig. 5에서 보면 수렴거동이 초기 값의 위치에 따라 (○, □의 경우) 국소최소값으로 빠지는 경우가 나타난다. SAM의 경우는 초기값에 영향을 받지않고 최적값에 수렴하고 있으며 CFB의 경우는 알고리즘의 특성상 설계변화량의 결정을 위해 일반적으로 수행하는 선탐색 대신에 목적함수값에 한계를 주고 반복진행시켜 나가므로 SAM의 경우와 비슷하게 최적값에 수렴한

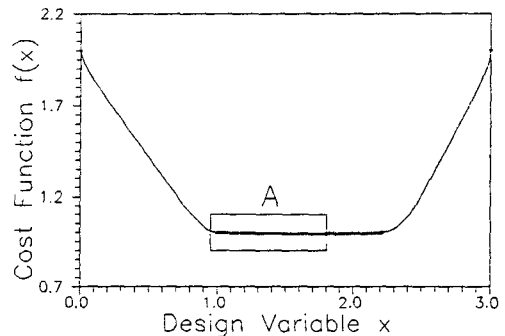


Fig. 3 Entire graph of problem 3.1

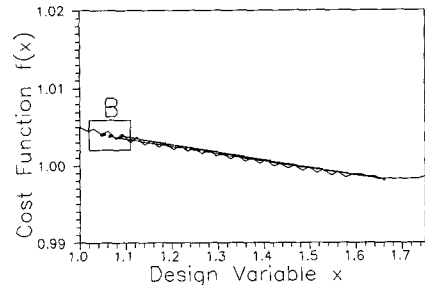


Fig. 4 Graph of section A

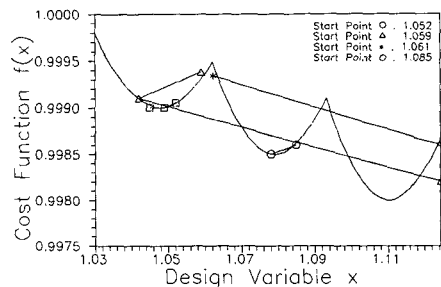


Fig. 5 Graph of section B

다. 본 문제는 실제문제에서 진동하는 주기가 미소한 경우에 SAM이나 CFB를 사용할 경우 국소최적값으로 수렴하지 않고 전체 추세에 맞는 목적함수가 작은 설계변수를 구할 수 있는 예를 보여준다. 실제로 이 문제는 미분가능 하지않은 특성때문에 일반적인 알고리즘의 최적해를 찾는 수학적 조건을 만족시키지 못하고 있으나 컴퓨터로 풀 경우 일반적인 알고리즘도 최적해를 찾을 확률이 있다.

3.2 수학적 요건을 불만족시키는 문제 (A Problem Not Satisfying the Mathematical Conditions)

미분값이 연속하지 않거나 끝이 파인 함수를 나타내기 위하여 본 연구를 위해 제작된 문제로서 Fig. 6에 보여지듯이 목적함수와 제한조건함수가 복잡하게 얽힌 문제이며 식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x) = 0.5 \cdot x^2 - 1.5 \cdot x + 4 && x < 1.0 \\ & f(x) = 48 \cdot x^2 - 144 \cdot x + 99 && 1.0 \leq x \leq 2.0 \\ & f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 7 && x \geq 2.0 \\ \text{Subject to } & g_1 = -1 && x < 1.5, x \geq 2 \\ & g_1 = 36 \cdot x - 55 && 1.5 \leq x < 1.75 \\ & g_1 = -36 \cdot x + 71 && 1.75 \leq x < 0.85 \\ & g_2 = -0.5 \cdot x + 0.75 && x < 0.5 \\ & g_2 = -10 \cdot x - 5.5 && 0.5 \leq x < 0.85 \\ & g_2 = 10 \cdot x - 11.5 && 0.85 \leq x < 1.2 \\ & g_2 = 0.5 \cdot x - 0.1 && x \geq 1.2 \end{aligned}$$

Fig. 6에서 보이듯 해근처에서 목적함수와 제한조건함수가 복잡하게 얽혀 있다. 점선의 아랫부분은 제한조건을 위반하는 영역이다. 제한조건을 위반하지않은 영역에서 출발하는 초기값 0.1(Fig. 6의 A점)의 경우에 일반적인 최적설계 알고리즘중에서 MFD는 최적값(fig. 6의 *점)에 수렴하지만 RQP와 CFB는 Table 2에서 보이듯이 해에 수렴하지 못하고 진동하고 있다. 제한조건함수를 위반하는 영역에서 출발하는 초기값 1.9(B점)의 경우는 RQP, CFB, MFD는 초기값 근처에서 진행방향을 찾지 못하고 있으나 SAM은 두 가지 경우 모두 매우 정확한 값은 아니고 반복진행수도 많지만 제한조건을 만족시키며 비교적 양호한 최적값에 수렴하고 있다.

3.3 표준화된 수학적문제

알고리즘의 성능비교에 자주 이용되는 일반적인

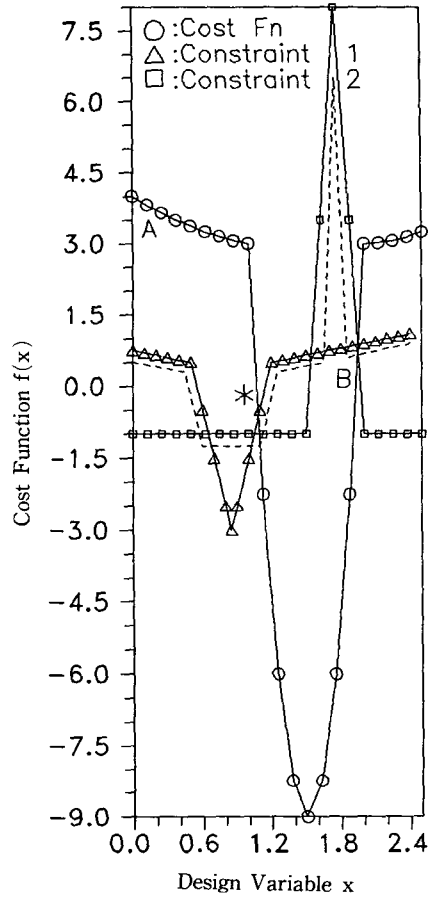


Fig. 6 Graph of problem 3.2

수학문제인 Rosen-Suzuki문제, Shell (colville) Primal문제, Spring 문제에 적용하여 이차근사법의 성능을 검토한다. 문제에 대한 특성과 자세한 공식화는 참고문헌 (10), (15), (16)에 있다. 각 문제의 결과는 Table 3,4,5와 같다. 비선형계획법 알고리즘과 자기 같은 초기값에서 출발하여 공히 거의 같은 최적값에 수렴하였으며 SAM의 경우 반복진행수는 다소 많은 경우도 있지만 함수값의 계산수가 상당히 줄었음을 볼 수 있는데 실제문제에 경우 함수값의 계산에 대부분의 컴퓨터계산시간(CPU)이 소비되고 있으므로 본 결과는 공학적으로 시사하는 바가 크다.

3.4 10-bar Truss Problem

본 문제는 제한조건함수의 부프로그램으로 유한요소법을 호출하면서 주어진 하중과 조건아래서 응

Table 2 Results of problem 3.2

	SPT	XOV	FOV	ITR	FEV	SPT	XOV	FOV	ITR	FEV
RQP	0.1	1.49	2.875	Oscillate		1.9	1.984	3.000	8	59
CFB	—	1.50	2.877	Oscillate		—	1.894	3.000	10	54
MFD	—	1.15	2.936	5	21	—	1.901	3.011	12	31
SAM	—	0.82	3.106	36	37	—	0.961	3.016	70	72

Table 3 Results of rosen-suzuky problem

	FOV	ITR	FEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	56.0	15	85	0.0	0.0299	-0.01
CFB	56.0	26	142	0.0	0.9977	0.9736
MFD	55.88	6	74	0.0	1.9978	2.0178
SAM	56.01	54	57	0.0	-1.0023	-1.0750

Table 4 Results of shell (colville) primal problem

	FOV	ITR	FEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	-32.355	7	63	0.0	0.3	0.3
CFB	-32.352	9	77	0.0	0.32	0.3220
				0.0	0.4012	0.4008
MFD	-32.359	8	74	0.0	0.4201	0.4110
				0.0	0.2220	0.2110
SAM	-32.362	16	19			

Table 5 Results of spring problem

	FOV	ITR	FEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	0.0127	19	93	0.2	0.053	0.065
CFB	0.0127	34	153	1.3	0.389	0.794
				2.0	9.580	2.975
MFD	0.0134	5	59			
SAM	0.0156	19	22			

력, 변위, 고유진동수등에 대한 제한조건을 만족시키면서 Fig. 7과 같은 구조물의 중량을 최소화하는 문제이다. 자세한 문제의 공식화는 참고문헌 (15), (16)에 있다. 제한조건함수 및 민감도계산은 구조최적설계를 위해 개발된 TRUSSOPT 프로그램을 이용하였다.⁽¹⁷⁾ 하중과 제한조건함수에 따라 Table 6의 3가지 경우로 나누어 적용하였다. 결과가 Table 7,8,9에 요약되어있는데, 일반적인 비선형계획법 알고리즘에선 함수의 민감도를 해석적으로 구하는 경우와 유한차분법을 이용하는 경우로 나누어

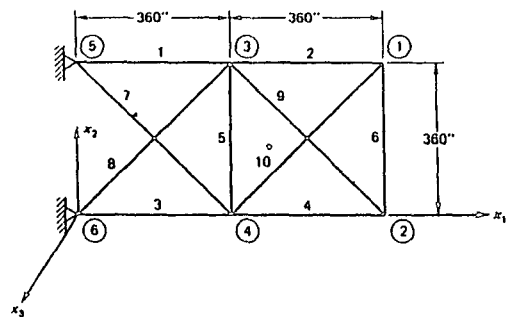


Fig. 7 10-bar truss problem

Table 6 Constrains condition of problem 3.4

Case	No. of Loads	Constraints Considered
1	4	Stress
2	2	Stress, Displacement
3	4	Stress, Displacement & Frequency

Table 7 Results of case 1 of problem 3.4

		FOV	ITR	FEV	GEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	Analy.	1664.53	10	10	10	1.0	5.9477	7.0974
	F.D.M.	1664.53	10	150	0	1.0	0.1	0.1
CFB	Analy.	1664.53	14	14	14	1.0	10.0521	8.9129
	F.D.M.	1664.52	1	194	0	1.0	3.9477	4.3876
MFD	Analy.	1664.53	14	109	12	1.0	0.1	1.2275
	F.D.M.	1664.52	11	214	0	1.0	2.05	2.0264
SAM	Analy.	1664.53	14	109	12	1.0	8.599	7.0053
	F.D.M.	1664.52	11	214	0	1.0	2.574	7.9930
SAM		1910.07	86	89	0	1.0	5.5829	5.6178
						1.0	0.1	0.1

Table 8 Results of case 2 of problem 3.4

		FOV	ITR	FEV	GEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	Analy.	5060.85	25	28	28	1.0	30.5218	25.5704
	F.D.M.	5060.85	18	594	0	1.0	0.1	2.1208
CFB	Analy.	5060.85	39	46	46	1.0	23.1988	26.4499
	F.D.M.	5060.85	50	594	0	1.0	15.2229	16.5966
MFD	Analy.	5059.65	19	236	19	1.0	0.1	0.1
	F.D.M.	5074.89	14	300	0	1.0	0.5513	1.2331
SAM	Analy.	5059.65	19	236	19	1.0	7.4572	10.2523
	F.D.M.	5074.89	14	300	0	1.0	21.0364	20.8250
SAM		5435.91	74	77	0	1.0	21.5284	21.2858
						1.0	0.1	3.4553

Table 9 Results of case 3 of problem 3.4

		FOV	ITR	FEV	GEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	Analy.	4783.17	19	22	22	1.0	25.1408	23.3964
	F.D.M.	4783.18	19	252	0	1.0	1.0753	3.1820
CFB	Analy.	4783.17	32	35	35	1.0	26.1280	23.1589
	F.D.M.	4783.18	34	426	0	1.0	12.9947	13.1966
MFD	Analy.	4764.27	18	483	0	1.0	0.1	0.1
	F.D.M.	7278.85	12	103	0	1.0	1.9647	1.9697
SAM	Analy.	4764.27	18	483	0	1.0	13.2473	14.8943
	F.D.M.	7278.85	12	103	0	1.0	15.6580	19.6040
SAM		4974.54	71	74	0	1.0	17.2832	17.5748
						1.0	0.1	0.1

Table 12 Results of case 2 of problem 3.5

		FOV	ITR	FEV	GEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	Analy.	545.036	19	86	16	1.0	0.01	0.3508
	F.D.M.	545.036	18	174	0	1.0	2.0426	2.7757
CFB	Analy.	545.036	50	61	61	1.0	3.0025	2.4615
	F.D.M.	545.036	15	473	0	1.0	0.01	1.6347
MFD	Analy.	544.901	13	123	13	1.0	0.6834	0.9559
	F.D.M.	544.903	13	216	0	1.0	1.6232	1.4693
SAM		615.663	42	45	0	1.0	2.6178	2.5890

Table 13 Results of case 3 of problem 3.5

		FOV	ITR	FEV	GEV	SPT	XOV (RQP/SAM)	
RQP	Analy.	590.694	26	87	16	1.0	0.01	0.6594
	F.D.M.	690.695	15	162	0	1.0	2.1156	2.0689
CFB	Analy.	590.694	23	28	28	1.0	2.3977	2.4116
	F.D.M.	590.694	23	219	0	1.0	0.0711	1.0775
MFD	Analy.	589.565	12	60	12	1.0	1.110	2.9636
	F.D.M.	589.937	10	114	0	1.0	1.9812	1.9870
SAM		744.511	47	50	0	1.0	2.8551	2.5758

4. 결 론

이차근사법의 각 예제문제에 대한 적용의 결과에서 보듯이 비선형정도가 매우 높거나 제한조건함수가 복잡하여 최적값에 수렴치 못하는 문제에서 양호한 최적값을 얻을 수 있었다. 특히 본 연구에서 고찰한 수학문제는 설계 변수가 1개이고 제한조건함수가 없거나 적은 수지만 설계변수와 함수의 수가 많고 비선형정도가 높을 경우에는 일반적인 최적설계알고리즘으로는 더욱 해석이 어려울 것으로 예상된다. 또한 알고리즘의 성능평가를 위하여 표준화된 문제들의 결과에서 보듯이 함수값계산이 줄어들고 민감도를 계산하지않으므로 많은 양의 함수값계산이 요구되는 실제문제에서 유용하리라 기대된다. 특히 구조최적설계에서 제한조건함수의 부프로그램으로 유한요소법이 수행되는 문제의 경우 민감도 계산을 위해 유한차분법을 수행할때 유한 요

소법 프로그램을 호출하지 않으므로 더욱 함수값계산을 줄이는 결과를 보였다 따라서 본 연구에서 고찰한 문제들은 설계변수와 함수의 수가 적은 경우이지만 아주 많은 수의 설계변수와 함수를 갖는 실제 현장의 문제에서는 더욱 커다란 장점으로 작용할 것이다.

본 연구에서 평가된 이차근사법은 알고리즘 자체의 특성으로 인하여 비록 구해지는 최적값이 아주 정확하거나 수학적인 최적값은 구하지 못하는 약점이 있다. 그러나 현실성을 고려한 양질의 설계 값을 얻으려는 현장의 요구와도 부합되며 종래의 선형화시키는 방법이 가능하나 너무 비싼 경우에 경향을 알아보거나 양질의 초기치를 결정하기 위해서 예비단계에서 적용하여 볼 수도 있겠다. 또한 그동안 유체역학이나 동역학분야에서 특히 비선형정도가 높아 민감도 해석이 불가능하거나 정확도가 떨어져서 최적설계의 활용을 주저해왔던 여러분야에의 응용이 기대된다.

후 기

이 논문은 1990년도 문교부 지원 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- (1) Schmit, L.A., 1981, "Structural Synthesis-Its genesis and Development," AIAA Journal, Vol. 19, No.10, Oct. pp. 1249~1263
- (2) Park, G.J., and Arora, J.S., 1987, "Role of Database Management in Design Optimization Systems," Journal of Aircraft, Vol. 24, No. 11, Nov. pp. 745~750.
- (3) Schmit, L.A., and Farshi, B., 1974, "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis," AIAA Journal, Vol.12, No. 5, pp. 692~699
- (4) Schmit, L.A., and Miura, H., 1978, "An Advanced Structural Analysis/Synthesis Capability-ACCESS 2," Int. J. Num. Met. Eng, Vol 12, pp. 353~377
- (5) Vanderplaats, G.N., 1979, "Efficient Algorithm for Numerical Airfoil Optimazation," Journal of Aircraft, Vol. 15, No. 12, Dec. 1979, pp. 842~847
- (6) Sarihan, V., Song, J.O., 1990, "Optimization of the Wrist Pin End of an Automobile Engine Connecting Rod with an Interface Fit," J. of Mechanical Design, ASME Transaction, Vol 112, September pp. 406~412.
- (7) Bennet, J.A., Park, G.J., 1991, "Automotive Occupant Dynamics Optimization," Proceeding of ASME Design Technical Conferences, Miami, Florida, U.S.A., Semtember 22-25.
- (8) James, M.L., Smith, G.M. and Wolford, J.C., 1985, "Applied Numerical Methods for Digital Computation," pp. 299~366
- (9) Vanderplaats, G.N., 1985, "COPES/ADS-A Fortran Control Program for Engineering Synthesis Using The ADS Optimization Program".
- (10) 박영선, 박경진, 한응교, 1991, "최적설계시 2차근사법의 수학기제에의 적용", 대한기계학회 춘계학술대회 논문집, pp 637~641
- (11) Arora, J.S. and Tseng, C.H., "IDESIGN User's Manual, Version 3.5," Optimal Design Laboratory, University of Iowa, Iowa City, Iowa, U.S. A.
- (12) Thanedar, P.B., Arora, J.S., Tseng, C.H., Lim, O.K. and Park, G.J., 1986, "Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems," Int. J.Num.Meth,Eng., Vol.23, pp. 2187~2203
- (13) 임오강, 이병우, 조수익, 1990, "개인용 전산기를 이용한 반복이차계획법의 수치성능 개선", 대한기계학회논문집, 제14권 제4호, pp. 850-856
- (14) Vanderplaats, G.N., 1984, "Numerical Optimization Tehniques for Engineering Design".
- (15) Arora, J.S., 1989, "Intoduction to Optimum Design".
- (16) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, "Applied Optimal Design".
- (17) Arora, J.S., Thanedar, P.B., "User's Manual for Truss Design Problems with IDDESIGN 3.3", Univ. of Iowa City, Iwoa, U.S.A.