

〈論 文〉

# 강소성 유한요소법을 이용한 평면 이방성 재료의 디프 드로잉 해석

김형종\* · 김동원\*\*

(1991년 9월 11일 접수)

## Analysis of Deep Drawing of Planar Anisotropic Materials Using the Rigid-Plastic Finite Element Method

Hyung Jong Kim and Dong Won Kim

**Key Words :** Deep Drawing(디프 드로잉), Rigid-Plastic Finite Element Method(강소성 유한요소법), Membrane Theory(박막 이론), Normal Anisotropy(수직 이방성), Planar Anisotropy(평면 이방성), Hill's Quadratic Yield Criterion(Hill의 2차형 항복 조건), Earing Phenomenon(귀 발생 현상)

### Abstract

Three-dimensional rigid-plastic finite element formulation based on the membrane theory was described and a computer program for large deformation analysis was developed. In the formulation, normal and planar anisotropy of sheet material and rotation of the principal axes of anisotropy was taken into consideration. Sheet metal was assumed to be rigid-plastic material obeying Hill's quadratic yield criterion and its associated flow rule. Deep drawing process, as a preliminary test, for normal anisotropic material was analyzed in order to examine the validity of developed finite element program. The results were consistent with the existing finite element solutions or experimental data. The present study was mainly concerned with the influence of planar anisotropy on deformation behaviour. Finite element analysis and experiment were carried out for the whole process of deep drawing of planar anisotropic material. The computational and experimental results on the shape of ear, strain distribution and punch load were in good agreement.

### 기 호 설 명

$D$  :  $r$ 값들로 구성되어 재료의 이방성을 나타내는 행렬

$dE_{ab}, d\bar{E}$  : Green-Lagrange 변형률 증분 및 그 유효 변형률 증분

$F_{ia}$  : 변형구배 텐서

$F, G, H, L, M, N$  : Hill의 이방성 항복 함수의 계수

$J$  : 변형구배 텐서의 Jacobian determinant

$K, r$  : 전체 강성 행렬 및 하중 벡터

$r_0, r_{45}, r_{90}$  :  $0^\circ, 45^\circ$  및  $90^\circ$  방향의  $r$ 값

$\bar{r}, \Delta r$  : 평균  $r$ 값 및 편차  $r$ 값

$S_0, V_0$  : 기준 형상에서의 표면적 및 체적

$S_{ab}, \bar{S}$  : 제2종 Piola-Kirchhoff 응력 및 그 유효 응력

$t_0$  : 기준 형상에서의 표면력

$u, u_a$  : 물질점의 변위 벡터 및 그 성분

\*정회원, 강원대학교 기계공학과

\*\*정회원, 서울대학교 기계설계학과

$U, U^*, \Delta U$  : 절점 변위 벡터, 추정 해 및 perturbation  
 $\beta, \theta, d\theta$  : 직교이방성 주축의 회전을 나타내는 각들  
 $d\epsilon_{ij}, d\bar{\epsilon}$  : 진변형률 증분 및 유효 진변형률 증분  
 $\eta$  : 감속 계수  
 $\mu_p, \mu_d$  : 펀치 및 다이 면의 마찰 계수  
 $\sigma_{ij}, \bar{\sigma}$  : 진응력 및 유효 진응력

## 1. 서 론

판재 성형은 오늘날 자동차·항공기 산업을 비롯하여 전기·전자 제품에 이르기까지 다양한 부품을 생산해 내는, 제조 가공(manufacturing)의 가장 중요한 분야 중의 하나이다. 평평한 소재로부터 유용한 형상의 제품으로 만들어지기까지 그 변형의 역학은 매우 복잡하며, 재료의 파괴나 물성의 악화를 초래하지 않고 유용한 제품을 생산하기 위하여는, 공구의 설계 및 성형 공정의 제어에 필요한 정보를 얻기 위한 해석이 요구 된다. 이에 대하여, 경험에 기초한 시행착오법은 많은 시간과 비용을 필요로 하므로, 유한 요소법과 같은 체계적이고 효율적인 수치적 시뮬레이션 방법을 개발하는 것이 바람직하다. 판재 성형 해석에 사용되는 유한 요소로는 박막 요소, 쉘 요소 및 입체 요소 등이 있으나, 해의 엄밀성 또는 효율성에 대하여 자기 문제점을 내포하고 있어, 입체 성형(bulk forming)에서와 같이 활발한 연구가 이루어지기 않은 실정이다.

강소성 유한 요소법은 탄성 변형을 무시함으로써, 매 증분 단계마다 재료의 항복 여부를 검사해야 하는 탄소성 유한 요소법보다 계산시간을 절약할 수 있어, 소성 가공 해석에 유용하게 쓰이고 있다. 강소성 유한요소법을 이용한 판재 성형 해석 예를 살펴보면, 초기에는 주로 확공, 플랜지 드로잉과 같은 평면내 변형(in-plane deformation) 문제에 제한되었으나<sup>(1,2)</sup>, Kobayashi와 Kim<sup>(3)</sup>은 기하학적 경계 조건을 처리하는 방법을 고안하여, 처음으로 판재의 평면외 변형(out-of-plane deformation) 문제 즉, 정수압 벌징, 펀치 스트레칭 및 디프 드로잉 공정을 해석하였으며, Toh<sup>(4)</sup>는 이 방법을 대변형 3차원 문제로 확장하여 펀치 스트레칭, 원형 및 정사각형 컵의 디프 드로잉과 같은 축대칭/비축대칭 모델에 적용하였다. Wang<sup>(5)</sup>은 변형률속도 의존 재료에 대하여 단축 인장, 정수압

벌징, 펀치 스트레칭 등의 해석을 하였고, 여기에 사용된 절점 좌표계(convected coordinate system)를 보다 일반화된 정식화에 이용하여 Yang과 Kim<sup>(6)</sup>은 정수압 벌징, 플랜지 드로잉과 같은 비축대칭 문제를 해석하였다. Chung 등<sup>(7,8)</sup>은 국부 절점 좌표계와 경사면 경계 조건(skew boundary condition)을 고안하여 접촉을 수반한 여러가지 비축대칭 문제들을 해석하는데 성공하였다. 또한, Park 등<sup>(9)</sup>은 강-점소성 재료의 축대칭 펀치 스트레칭 및 정수압 벌징을 해석하였으며, Germain 등<sup>(10)</sup>은 변형 경로에 대한 가정과 접촉 알고리즘을 고안하여 역시 강-점소성 재료의 펀치 스트레칭 문제에 적용하였다. 井關日出男等<sup>(11)</sup>은 디프 드로잉 공정에서 소재의 최적 형상을 결정하려는 시도를 한 바 있다.

한편, 탄소성 유한 요소법을 이용한 연구들을 성형 모델에 따라 분류해 보면, Wang과 Wenner<sup>(12)</sup>는 펀치 스트레칭, Nakamachi 등<sup>(13)</sup>은 정수압 벌징, 그리고 Mattiasson 등<sup>(14)</sup>은 디프 드로잉 문제를 해석한 바 있다. 그러나 이러한 연구들은 모두 축대칭 문제에만 국한된 것이었으나, 최근에 Shim<sup>(15)</sup>은 적층 셀 요소를 사용하여 정사각형 컵의 디프 드로잉 등 비축대칭 모델을 해석하였다.

판재 성형에 사용되는 대부분의 소재는 압연 공정으로 생산되며, 이때 필연적으로 발생하는 이방성은 후속 가공 시에 재료의 변형 거동에 큰 영향을 미치게 된다. 판재 두께 방향의 상대적 강도를 나타내는 수직 이방성(normal anisotropy)은 성형성을 지배하며, 판재면 내에서의 방향성을 나타내는 평면 이방성(planar anisotropy)은 디프 드로잉에서 흔히 볼 수 있는 귀 발생(earing) 현상의 원인이 된다. 앞에 열거한 문헌들의 대부분은 등방성 또는 수직 이방성 재료만 취급하였거나, 평면 이방성을 고려한 경우라도 평면내 변형 문제에 제한된 것이며, 최근에 들어 평면 이방성 재료의 디프 드로잉 공정을 해석하려는 연구가 이루어졌다<sup>(6)</sup>.

본 연구는 박막 이론에 기초한 3차원 강소성 대변형 유한 요소 방정식을 정식화하고, 재료의 수직 이방성 및 평면 이방성, 대변위·대회전에 의한 형상 변화 효과, 그리고 공구와 소재간의 접촉 문제 등을 고려하여, 원형 컵 디프 드로잉의 전 공정을 해석한다. 특히, 평면 이방성이 소재의 변형 거동에 미치는 영향을 고려하기 위하여 Hill<sup>(16)</sup>의 직교 이방성 항복 조건을 도입하고, 그 해석 결과를 실

험 결과와 비교·검토한다.

## 2. 이 론

### 2.1 가상일의 원리

판재 성형은 입체 성형에 비하여 소재의 강체 운동이 상당히 크므로, 한 변형 단계 동안의 형상 변화 효과를 고려할 수 있는 대변형 정식화가 필요하다. 일반적으로 대변형 문제를 기술하기 위하여 Green-Lagrange 변형률 텐서  $E_{\alpha\beta}$ 가 사용되며, 이는 현재 형상 및 기준 형상에서 같은 Cartesian 좌표계를 사용할때 다음과 같이 변위 성분  $u_\alpha$ 의 미분항들로 표시된다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{r,\alpha} u_{r,\beta} \right] \quad (1)$$

대변형 문제의 해석에서 많은 경우 변형 후의 형상은 미리 알려져 있지 않으므로, 응력 텐서도 변형률 텐서와 마찬가지로 변형 전의 기준 형상에서 정의할 필요가 있으며, Green-Lagrange 변형률 텐서와 에너지 짝을 이루는 제2종 Piola-Kirchhoff 응력 텐서  $S_{\alpha\beta}$ 가 많이 사용된다. 이 응력 텐서와 Cauchy 응력 텐서  $\sigma_{ij}$ 와의 변환 관계는 다음과 같다.

$$S_{\alpha\beta} = J F_{\alpha i}^{-1} F_{\beta j}^{-1} \sigma_{ij} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = J^{-1} F_{i\alpha} F_{j\beta} S_{\alpha\beta} \quad (3)$$

여기서  $F_{i\alpha}$ 는 변형구배 텐서이며,  $J$ 는 그의 Jacobian determinant이다.

물체력을 무시할 때, 기준 형상에서의 물리량들로 표현된 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\int_{V_0} S_{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} dV - \int_{S_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (4)$$

여기서  $V_0, S_0, \mathbf{t}_0$ 는 각각 기준형상에서의 체적, 표면적 및 표면력 벡터를 나타내며,  $\mathbf{u}$ 는 변위 벡터이다.

### 2.2 기본 가정 및 Hill의 이방성 항복 조건

(1) 판재의 두께는 일반적으로 성형 공구의 최소 곡률 반경보다 상당히 작으므로, 응력이나 변형률의 두께 방향에 따른 변화는 무시할 수 있으며, 변형중에 평면 응력 상태가 유지되는 것으로 가정한다. 본 연구에서는 이러한 가정을 바탕으로 하는 박막 이론(membrane theory)을 사용하며, 판재의

굽힘 효과는 고려하지 않는다.

(2) Hill<sup>(16)</sup>의 2차형 직교 이방성 항복 조건 및 그에 따르는 유동 법칙을 만족하고, 변형률 속도에 무관한 강-소성 재료에 대하여 해석한다.

(3) 공구는 모두 강체로 가정되며, 소재와의 접촉면에서는 Coulomb의 마찰 법칙이 만족되는 것으로 한다.

Hill<sup>(16)</sup>이 제안한 2차형 직교 이방성 항복 조건식은 다음과 같다.

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_x)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1 \quad (5)$$

여기서  $F, G, H, L, M$  및  $N$ 은 이방성을 특징짓는 계수들이다.

단위 체적당 소성일 증분  $dW$ 는 소성일 등가의 원리로부터 다음과 같이 2가지로 표현될 수 있다.

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad (6)$$

$$dW = S_{\alpha\beta} dE_{\alpha\beta} = \bar{S} d\bar{E} \quad (7)$$

식(7)에서  $\bar{S}$ 와  $d\bar{E}$ 는 각각 식(6)의  $\bar{\sigma}$  및  $d\bar{\epsilon}$ 와 똑같은 형태로 정의할 수 있는 유효 응력과 유효 변형률 증분이다. 즉, 평면 응력 상태에 대하여

$$\bar{S} = \left[ \frac{3}{2(r_0 + r_{90} + r_0 r_{90})} \right]^{1/2} \left[ r_{90}(1+r_0)S_x^2 + r_0(1+r_{90})S_y^2 - 2r_0 r_{90} S_x S_y + (r_0 + r_{90})(1+r_{45})S_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (8)$$

$$d\bar{E} = \left[ \frac{2(r_0 + r_{90} + r_0 r_{90})}{3(1+r_0+r_{90})} \right]^{1/2} \left[ \frac{1+r_{90}}{r_{90}} dE_x^2 + \frac{1+r_0}{r_0} dE_y^2 + 2dE_x dE_y + \frac{4(1+r_0+r_{90})}{(r_0+r_{90})(1+2r_{45})} dE_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

여기서  $r_0, r_{45}, r_{90}$ 은 각각 압연 방향에 대하여  $0^\circ, 45^\circ$  및  $90^\circ$  방향의  $r$ 값을 나타내며, 다음과 같이 이방성 계수들의 항으로 표시될 수 있다.

$$r_0 = \frac{H}{G}, \quad r_{45} = \frac{2N - (F+G)}{2(F+G)}, \quad r_{90} = \frac{H}{F} \quad (10)$$

유효 변형률 증분  $d\bar{E}$ 를 행렬식으로 표현하면,

$$d\bar{E} = \left[ \frac{2}{3} d\mathbf{E}^T \mathbf{D} d\mathbf{E} \right]^{1/2} \quad (11)$$

여기서

$$dE = [dE_x \ dE_y \ dE_{xy}]^T \quad (12)$$

$$D = \frac{r_0 + r_{90} + r_0 r_{90}}{1 + r_0 + r_{90}} \begin{bmatrix} \frac{1+r_{90}}{r_0} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1+r_0}{r_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(1+r_0+r_{90})}{(r_0+r_{90})(1+2r_{45})} \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 3. 강소성 유한 요소 방정식의 정식화

#### 3.1 유한 요소 행렬 방정식의 유도

식(4)와 (7)로부터 다음과 같이 정의되는 범함수  $\Phi$ 의 변분식을 얻는다.

$$\delta\Phi = \int_{V_0} \bar{S} \delta(d\bar{E}) dV - \int_{S_0} \bar{t}_o \cdot \delta u dS = 0 \quad (14)$$

식(14)는 응력과 변형률이 성분 형태로 표시되어 있지 않고 스칼라 양들 즉, 유효 응력 및 유효 변형률 증분으로 대치되어 있으므로 기하학적 형상 변화에 따른 좌표계의 변화에 무관하다.

본 연구에서는, 판재 성형 과정에서 소재가 이루는 임의의 곡면 형상을 가장 간단히 근사시킬 수 있는 3절점 선형 3각형 요소를 사용하고, 각 요소의 세 이방성 주축을 국부 좌표계로 선택하였다. 식(14)로부터 이산화(discretization) 및 좌표계 변환 과정을 거치면 절점 변위 벡터  $U$ 에 관한 비선형 연립방정식이 얻어지며, 이를 추정해  $U^*$  부근에서 선형화함으로써 Newton-Raphson 반복 계산을 위한 강성 행렬 방정식을 유도할 수 있다. 그 결과를 간단한 기호로 나타내면,

$$K\Delta U = r \quad (15)$$

$$\Delta U = U - U^* \quad (16)$$

여기서  $K$ 와  $r$ 은 각각 강성 행렬 및 일반화된 하중 벡터를 표시하며, perturbation  $\Delta U$ 는 반복 계산 과정에서 안정된 수렴 상태를 얻기 위하여 감속 계수  $\eta$ 를 곱한 값으로 변위 벡터의 update에 사용된다. 즉,

$$U^i = U^{i-1} + \eta\Delta U^i \quad (0 < \eta \leq 1) \quad (17)$$

여기서  $i$ 는 반복 횟수를 나타낸다.

#### 3.2 변형에 따른 이방성 주축의 회전

재료는 압연 공정때 이미 발생한 우선 방위(preferred orientation)에 의하여, 압연 방향, 폭 방향 및 두께 방향을 세 주축으로 하는 직교 이방성을 가진다. 압연 이후의 냉간 가공에 의한 우선 방위의 변화는 무시할 수 있으며, 변형 후에도 이방성 주축들은 여전히 직교하는 것으로 가정한다<sup>(16)</sup>. 그러나 펀치 스트레칭이나 디프 드로잉과 같이 기하학적 형상 변화가 큰 문제에 대하여 재료의 이방성 거동을 정확히 나타내기 위하여는 이방성 주축들의 회전을 고려할 필요가 있다.

어떤 변형 단계에서 시간 증분  $\Delta t$  동안의, 한 유한 요소의 변형은 강제 병진, 강제 회전 및 변형률 주축 방향의 순수 신장(pure stretch)으로 분해될 수 있다. 본 해석에서는 강제 병진과 순수 신장이 이방성 주축의 회전에 미치는 영향을 무시하여, 한 변형 증분 동안에 어떤 요소의 이방성 주축의 전체 좌표계에 대한 회전각이 그 요소의 강제 회전 각과 같다고 가정하였다.

Yang과 Kim<sup>(6)</sup>은 이방성 주축이 변형률 증분의 주축과 이루는 각이 변형 중에 일정하게 유지된다는 생각을 바탕으로, 주 절점 좌표계를 도입하여 정식화하고, 플랜지 드로잉과 정수압 벌정 문제를 해석하였으며, Chung 등<sup>(8)</sup>은 이 방법을 원형 및 정사각형 디프 드로잉 해석에 응용하였다. 한편, 井關日出男 등<sup>(11)</sup>은 요소 재분할 시에 이방성 주축의 방향을 결정하기 위하여 본 해석과 같은 방법을 사용한 바 있다.

변형 후에도 두께 방향은 여전히 이방성 주축의 하나 ( $z$ 축)임을 고려하여, Fig. 1에 도시된 바와 같이 시간 증분  $\Delta t$  동안의 평면내 변형을 생각한다. 이방성 주축  $x$ 와  $y$ 의 평면내 회전각은 위의 가정으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (18)$$

변형 후 형상  $C$ 에서 절점 1'-2'를 잇는 벡터  $r_{12}'$ 과 새로운 이방성 주축  $x'$ 과의 각  $\beta$ 는 다음과 같이 구해지며, 이는 다음 변형 단계에서 국부 좌표계를 결정하는 지표가 된다.

$$\beta = \theta - d\theta \quad (19)$$

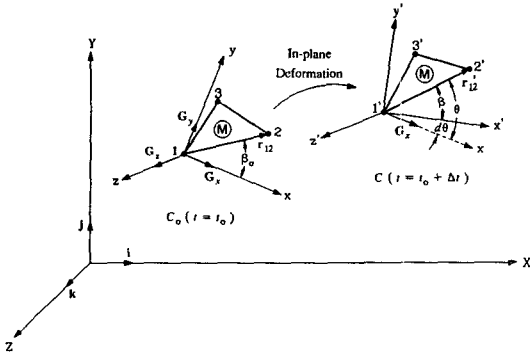


Fig. 1 Rotation of the principal axes of anisotropy due to deformation

여기서

$$\theta = \cos^{-1} \frac{r_{12}' \cdot G_x}{|r_{12}'|}$$

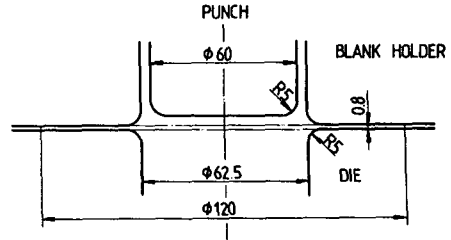
#### 4. 결과 및 검토

개발된 프로그램의 유용성을 입증하기 위하여 몇 가지 전형적인 판재 성형 공정의 해석에 적용하였다. 우선 축대칭 문제로서 원통형 펀치에 의한 평면 등방성 재료의 디프 드로잉 문제를 해석하고, 그 결과를 다른 문헌<sup>(7,15)</sup>에서의 해석 또는 실험 결과와 비교하였다.

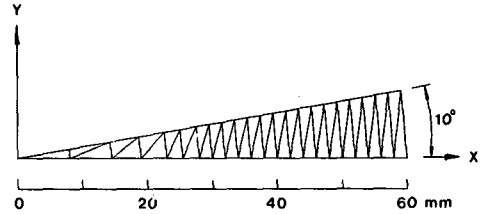
또한, 재료의 평면 이방성이 변형에 미치는 영향을 정량적으로 조사하기 위하여, 원통형 펀치에 의한 평면 이방성 재료의 디프 드로잉 공정을 해석하고, 그 결과의 비교·검토를 위한 실험을 병행하였다. 평면 등방성 모델과 평면 이방성 모델 각각에 사용된 재료는 공히 알루미늄 칼드 강이나, 그 기계적 성질은 서로 다른 것이다. 또한, 이방성 지수 r값이 서로 다른 2가지 가상 재료에 대하여 디프 드로잉 해석 결과를 비교함으로써, 평면 이방성의 영향을 자세히 관찰하고자 하였다.

##### 4.1 평면 등방성 재료의 디프 드로잉

Chung<sup>(7)</sup>이 박막 이론에 의한 강소성 유한 요소 해석 및 실험, 그리고 shim<sup>(15)</sup>이 셸 이론에 의한 탄소성 유한 요소 해석에 사용했던 모델을 채택하고, 그 해석 결과를 이들 문헌과 비교하였다. Fig. 2는 공구와 소재의 기하학적 형상과 본 해석에서 사용한 초기 유한 요소망을 나타내며, 기타 계산에 필요한 입력 자료들은 다음과 같다.



(a) Geometry of tool and blank



(b) Initial finite element mesh

Fig. 2 Modelling of axisymmetric deep drawing

재료 : 알루미늄 칼드 강

응력-변형률 관계식 :  $\bar{\sigma} = 508.79 \bar{\epsilon}^{0.247}$  MPa

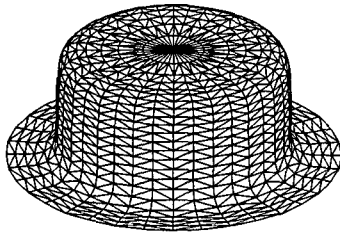
r값 :  $\bar{r} = (r_0 + 2r_{45} + r_{90}) / 4 = 1.867$

마찰 계수 :  $\mu_p = 0.24, \mu_d = 0.12 \sim 0.48$

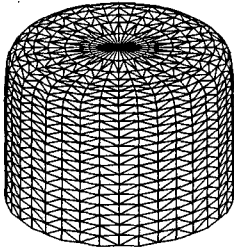
한 변형 단계에 대한 펀치 변위 증분은 0.5mm로 설정하고, 완전한 컵으로 성형하는 데까지 총 98단계의 계산을 수행하였다. 한 단계에서의 수렴 해를 얻는 데 필요한 반복 횟수는 15~20회 정도이며, coprocessor를 가진 IBM PC/AT 호환 기종으로 전체 해석을 하는 데 소요된 시간은 약 5시간 30분이다.

Fig 3에서 펀치 변위가 49mm일 때 완전히 성형된 컵의 형상을 볼 수 있다. 이때 컵의 높이는 43.1mm로서 Chung의 해석 결과 (42.9mm)와 거의 일치하나, 그의 실험 결과는 46.0mm로 밝히고 있어 약간의 차이를 나타낸다. 이는 전체적인 재료 유동이 실제보다 빠르게 나타나는 것을 의미하며, 소재 두께의 분포와 밀접한 관계가 있다.

반경 방향에 따른 두께 변형률의 분포가 Fig. 4에 도시되어 있다. 이에 대한 Chung의 해석 결과는 본 해석과 거의 일치하는 관계로 그 실험 결과만을 인용하였다. 해석 결과는 펀치 편평부와 플랜지부에서는 실험치와 잘 일치하나, 펀치 윤곽 반경부에서는 굽힘에 의하여 발생하는 국부적인 두께 감소 현상을 잘 나타내지 못하며, 수직 벽에서의



(a) Punch displacement 30mm



(b) Punch displacement 49mm

Fig. 3 Deformed mesh of normal anisotropic model

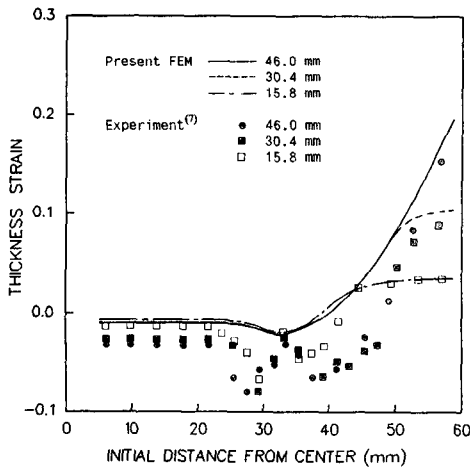


Fig. 4 Thickness strain distribution along the radial direction in normal anisotropic model

두께 변형률도 실험치보다 대체로 크게 평가하고 있다. 이것은 본 해석에서 판재의 두께와 굽힘 효과를 고려하지 않은 박막 이론을 사용하기 때문에 생긴 결과라 할 수 있다. Shim<sup>(15)</sup>은 같은 모델에 대하여, 쉘 요소를 사용한 탄소성 해석으로 실험과 비교적 잘 일치하는 결과를 얻은 바 있으나, 상당한 계산 시간(CRAY 2S 슈퍼 컴퓨터로 3500초)을 소요한 것으로 밝히고 있다.

Fig. 5는 여러가지 마찰 조건에 대하여, 펀치 하

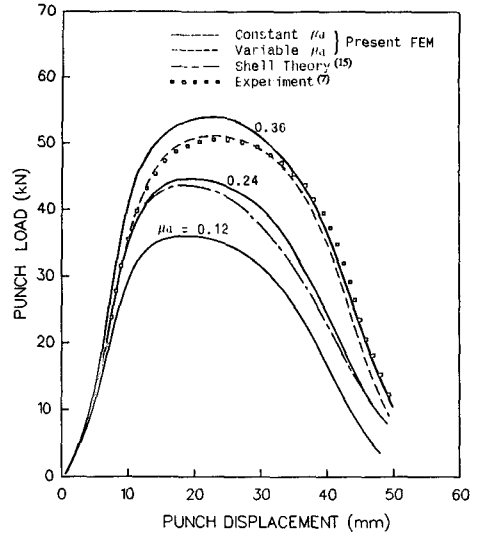


Fig. 5 Variation of punch load in normal anisotropic model

중이 소재의 변형과 함께 변하는 양상을 보여준다. 우선, 전 공정에 걸쳐 다이 마찰계수  $\mu_d$ 를 일정하게 유지하였을 때의 3가지 해석 결과가 서로 뚜렷한 차이를 나타내는 것으로 보아,  $\mu_d$ 가 펀치 하중의 크기에 심각한 영향을 미치는 사실을 알 수 있다. 반면에 펀치 마찰계수  $\mu_p$ 의 영향은 그림으로 식별하기 어려울 정도로 나타나 별도의 분석을 생략하였다.  $\mu_d=0.12$  및 0.24 일때는 변형 초기를 제외하고 chung의 실험 결과와 상당한 차이를 나타내며,  $\mu_d=0.36$  일때도 하중이 최대가 되는 위치나 변형 중반부의 하중 곡선의 모양 등에서 실험치와 약간의 편차를 보이고 있다. 그러나  $\mu_d$ 를 0.24에서 0.48까지 펀치 변위에 따라 선형적으로 증가시켰을 때 실험치에 상당히 접근하는 해석 결과를 얻을 수 있었다. 이러한 점으로 미루어 실험 도중에 소재와 다이간의 윤활 상태가 지속적으로 악화되며, 이에 따른 마찰계수의 증가는 펀치 하중에 직접적인 영향을 미치는 것으로 판단된다. 또한,  $\mu_d=0.24$ 일 때 본 해석 결과가 쉘 이론에 의한 탄소성 해석<sup>(15)</sup>의 결과와 거의 일치하는 사실은 펀치 하중의 계산에 있어서 박막 이론의 사용이 충분한 타당성을 가지는 것을 입증한다. 한편, 유한요소 해석에서 절점 단위로 처리되는 접촉 영역은 변형이 진행됨에 따라 불연속적으로 변한다. 이로 인하여 하중 곡선의 최대치 부근에서부터 경미한

진동이 발생하며, 마찰 계수가 증가함에 따라 그 진폭이 커지는 것으로 나타났다. Fig 5는 이러한 진동을 제거하여 매끄러운 곡선으로 근사시킨 것이다.

4.2 평면 이방성 재료의 디프 드로잉

유한요소 해석에 입력하기 위하여 실험적으로 얻은 재료 상수 및 디프 드로잉 공정 변수들은 다음과 같다.

- 재료: 알루미늄 퀼드 강
- 응력-변형률 관계식:  $\bar{\sigma} = 588.08(0.0001 + \bar{\epsilon})^{0.22}$  MPa
- r 값:  $r_0 = 0.96, r_{45} = 0.84, r_{90} = 1.31$
- 마찰 계수:  $\mu_p = 0.2, \mu_d = 0.2$
- 블랭크 가압력: 4900 N

응력-변형률 관계식과 r 값들은 각각 압연 방향에 대하여 0°, 45° 및 90°의 세 방향으로 가공한 인장 시편의 표면에 가로·세로 2mm의 정방형 격자를 포토 프린팅(photo printing) 하고 단축 인장 시험을 행하여 측정된 것이다. r 값은 변형률 크기에 따라 변하는 것으로 알려져 있으나 그 변화는 크지 않으며, 본 연구에서는 인장 변형률이 15% 일 때의 값으로 선택하였다. 또한, 응력-변형률 곡선은 같은 변형률에 대한 세 방향의 응력의 평균 값으로 취하였다.

공구와 소재간의 마찰계수는 간단한 마찰 시험으로부터 구하였다. 즉, 디프 드로잉 다이와 블랭크 홀더 사이에 띠 모양의 소재를 삽입하고, 그 접촉면에 디프 드로잉 실험 때와 같은 윤활제(모터 오일, SAE-20)를 바른 다음, 몇가지 블랭크 가압력  $F_N$  을 가한 상태에서 소재가 미끄러져 나오는 데 필요한 인장력  $F_T$ 를 측정하여, 그 두 힘의 관계를 선형적으로 근사시킨 기울기  $F_T/F_N$ 를 마찰계수로 취하였다. 펀치의 경우도 다이와 똑같은 재료로 제작된 것임을 고려하여 마찰계수가 같은 것으로 가정하였다.

한편, 디프 드로잉 실험을 하기 위하여 우선 직경 78mm의 원형 소재의 앞·뒤 표면에 1mm 간격의 동심원들과 중심각 5° 간격의 방사상 선들로 구성된 격자를 포토 프린팅한 뒤, 묶은 질산 용액 속에서 약 5분간 부식(etching)시킨 시편을 준비하였다. 용량 20ton의 디프 드로잉 전용 유압 프레스를 사용하여, 소재에 주름(wrinkling)이나 파단이 발

생하지 않도록 적당한 크기의 블랭크 가압력 (4900N)을 전 공정에 걸쳐 일정하게 유지하면서, 평균 0.5mm/min의 펀치 속도로 디프 드로잉 실험을 수행하였다.

Fig. 6은 해석과 실험에 사용된 공구 및 소재의 기하학적 형상을 나타낸다. 변형의 대칭성을 고려하여 Fig. 7과 같이 전체 원형 소재의 1/4만을 해석 대상으로 하고, 기하학적 축대칭성이 최대한 유지되도록 방사상으로 요소를 분할하였다. 전체 요소수는 223개, 절점수는 134개이다.

접촉 영역이 비교적 급격히 변하는 것으로 추정되는 몇몇 경우를 제외하고, 대부분의 변형 단계에서는 20회 전후의 반복 계산 후에 수렴해가 얻어졌다. 펀치 변위증분 0.25mm로 시작하여 성형이 완료될 때까지 모두 189단계의 계산을 수행하는 데 VAX 11/750 컴퓨터로 약 16시간이 소요되었다.

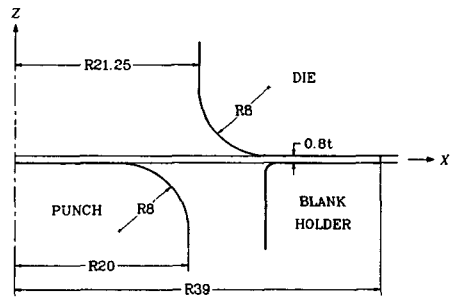


Fig. 6 Geometry of deep drawing process of planar anisotropic material

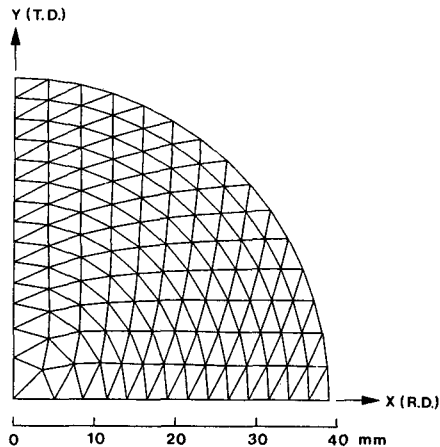


Fig. 7 Initial finite element mesh for planar anisotropic model

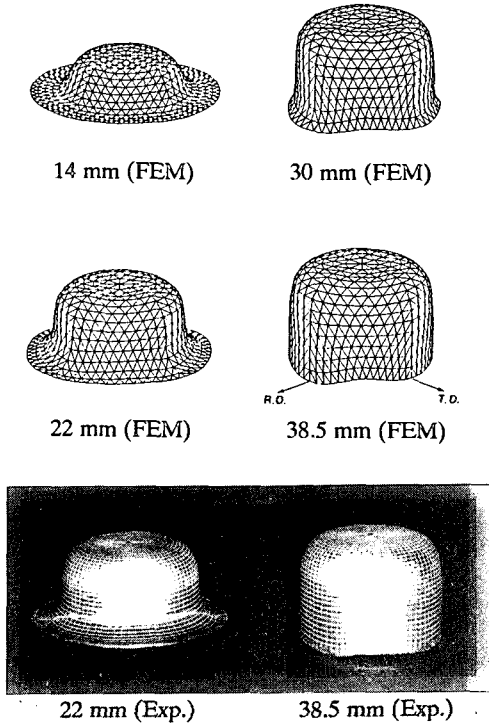


Fig. 8 Deformed mesh of planar anisotropic model

Fig. 8은 몇 가지 펀치 변위에서 계산된 소재의 변형 과정을 실험과 비교하여 보여준다. 소재의 가장자리에서 압연 방향과 그 직각 방향으로 서서히 귀(ear)가 나타나, 변형이 진행됨에 따라 점차 뚜렷해지는 양상이 실험과 잘 일치한다. 펀치 변위가 38.5mm일 때 완전히 성형된 컵의 형상을 얻었다.

펀치 변위가 14mm 및 22mm일 때, 플랜지부의 가장자리 윤곽을 실험과 비교하여 Fig. 9에 도시하였다. 압연 방향 윤곽은 실험치와 거의 일치하나, 재료의 유동이 실제보다 빨리 일어나며, 귀와 골(hollow)의 차이가 실험치와 비교하여 다소 크게 나타났다. Gotoh and Ishise<sup>(2)</sup>는 플랜지 드로잉 문제의 유한 요소 해석에서, Hill<sup>(16)</sup>의 2차형 항복 함수의 사용이 귀 모양에 대하여 실제보다 과장된 해석 결과를 유발한다고 지적하고, 자신이 제안한 4차형 항복 함수의 타당성을 주장한 바 있다. 그러나 이 항복 함수는 우선 수학적으로 취급하기 까다로운 고차식이며, 유효 변형률이 변형률 성분들의 양함수(explicit function) 형태로 표현되지 않는 등의 불편함이 있다.

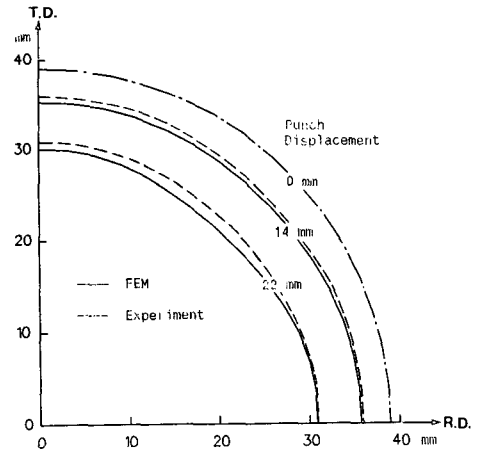


Fig. 9 Ear development along the rim of flange

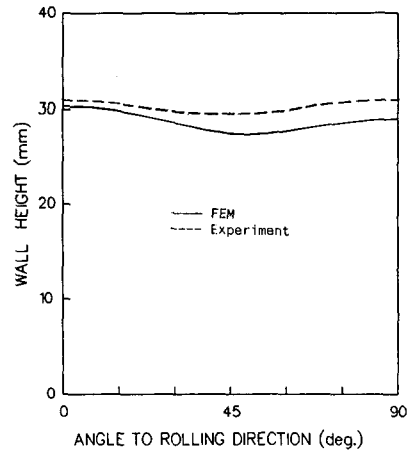
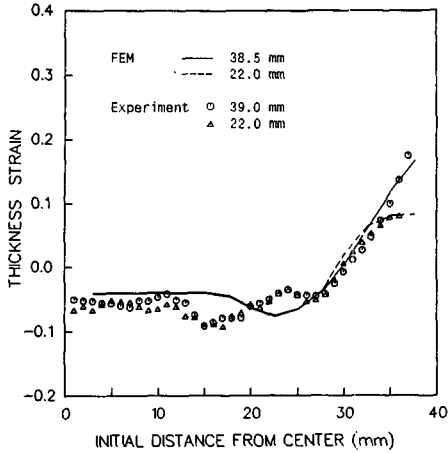


Fig. 10 Variation of wall height along circumferential direction

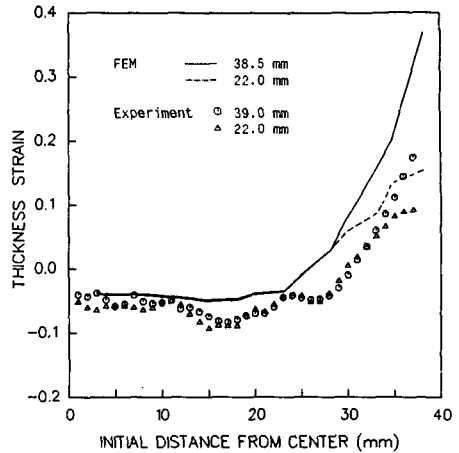
플랜지부의 가장자리에서 발생한 귀는 결국 Fig. 10에 보인 것과 같이 완제품으로 성형된 컵에서 벽 높이의 굴곡으로 나타나게 된다. 이에 대한 해석 결과는 플랜지부에서와 마찬가지로, 압연 방향을 제외하고 대체로 실험치보다 낮은 벽 높이의 분포를 보여주고 있다.

$\Delta r = (r_0 + r_{90} - 2r_{45})/2$ 로 정의되는  $\Delta r$  값이 양인 재료에 대하여 압연 방향과 0° 및 90°를 이루는 네 방향에서 귀가 발생한다는 사실은 일반적으로 알려져 있으나<sup>(16)</sup>, 0° 및 90° 방향의 상대적인 귀 높이와  $r_0$ ,  $r_{90}$ 의 대소 관계는 불확실하다. 본 연구에 사용된 재료는  $r_{90}$ 이  $r_0$ 보다 30% 이상 큰 데 비하여, Fig. 9 및 10의 실험 결과에서 보는 바와 같이

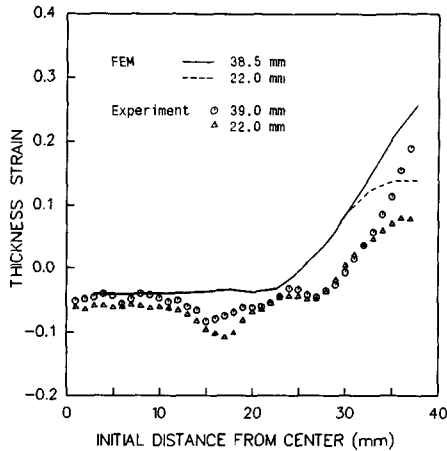




(a) along the rolling direction



(b) along the 45° direction



(c) along the transverse direction

Fig. 11 Thickness strain distribution of planar anisotropic model

두 방향의 귀 높이는 비슷한 것으로 나타났다. 반면, 유한 요소 해석은  $r$  값이 작은  $0^\circ$  방향의 귀 높이가  $90^\circ$  방향보다 큰 결과를 준다.

또한, 전철의 축대칭 모델에서 언급하였듯이 박막 요소를 사용한 해석에서는 실제보다 더 빨리 재료의 유동이 일어나, 결국 완제품에서의 벽 높이가 실험치보다 낮아지는 결과를 얻게 된다. 따라서, 본 해석에서 계산된 벽 높이의 분포는 Hill의 항복 함수를 사용함으로써 인하여  $90^\circ$  방향보다 상대적으로 큰 귀를 형성하게 되는 압연 방향을 제외하고는, 전반적으로 실험치보다 낮게 나타난 것으로 생각된다.

귀 발생 현상은 변형률의 분포에도 직접적인 영향을 미친다. 압연 방향에 대하여  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  및  $90^\circ$  방향을 따른 두께 변형률의 분포를 Fig. 11에 도시하였다. 펀치의 편평부에서는 세 방향 모두 실험치와 거의 일치하나, 펀치 반경부에서는 축대칭 모델과 마찬가지로 국부적인 네킹 현상을 잘 나타내지 못하고 있다. 또, 컵의 벽 부분과 다이 반경부 및 플랜지부에 대하여는, 특히  $0^\circ$  방향에서는 실험 결과와 좋은 일치로 보이며,  $45^\circ$ 와  $90^\circ$  방향에서는 해석 결과가 다소 크게 나타났다. 이러한 현상은 앞서 기술한 귀 발생에 대한 해석 결과와 그 원인을 같이 하는 것으로 보인다.

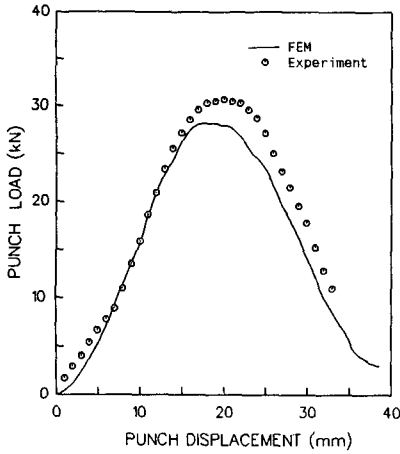


Fig. 12 Variation of punch load in planar anisotropic model

### 5. 결론

박막 이론에 기초를 둔 3차원 대변형 강소형 유한 요소 방정식을 정식화하고, 판재 성형 해석용 유한요소 프로그램을 개발하였다. 타당성 검증을 위하여 우선 수직 이방성 재료에 대한 원형 컵 디프 드로잉 문제의 축대칭 해석에 적용하였으며, 하중 곡선, 변형률 분포 등에 대한 결과가 다른 문헌에서의 해석 또는 실험 결과와 비교적 양호한 일치 를 보임을 확인하였다.

판재 성형에서 평면 이방성이 재료의 변형 거동 에 미치는 영향을 규명하는 데 연구의 주안점을 두고, 원형 컵 디프 드로잉 문제를 모델로 전 공정에 대한 3차원 해석을 하였다. 재료는 Hill의 2차형 이방성 항복 조건을 만족하는 것으로 가정하였다. 또한, 알루미늄 쿨드 강관을 소재로 디프 드로잉 실험 을 수행하고, 얻어진 자료들을 해석 결과와 비교하 였다. 그 주요 내용을 요약하면 다음과 같다.

(1) 펀치 변위에 따른 재료 유동을 관찰할 때, 해석 상의 유동이 실제보다 더 빠른 것으로 나타났 으며, 결국 완전히 성형된 컵의 높이가 실험치보다 약간 낮은 결과가 얻어졌다.

(2) 플랜지 부와 완전히 성형된 컵의 가장자리에 서 발생하는 귀에 대하여, 대체로 실험에서와 비슷 한 형상을 보이나 그 굴곡이 다소 과장된 해석 결 과를 얻었다.

(3) 두께 변형률 분포의 비교에서는 국부적인 네 킹 부근을 제외하고는 전반적으로 비슷한 경향을 나타냈으며, 특히 압연 방향을 따라서는 상당히 양 호한 일치를 보였다.

(4) 펀치 하중의 변화에 있어서 해석 결과는 변 형 초기에는 실험치와 잘 일치하였으며, 최대 하중 에 도달한 후에는 약간 낮은 값을 나타냈다.

이상 열거한 해석과 실험의 결과 비교에서 차이 를 나타내는 사항들의 대부분은 본 해석에서 채택 한 박막 이론과 Hill의 2차형 항복 조건 및 이방성 주축의 회전에 관한 가정 등에 그 원인이 있는 것 으로 생각된다. 그러나 판재 성형의 해석에 있어 이러한 이론들에 대체할 만한 결정적인 수단이 아 직까지 확립되어 있지 않은 점과, 특히 계산 효율 문제를 감안할 때, 본 해석 방법과 유한요소 프로 그램이 디프 드로잉을 비롯한 판재 성형 문제의 해 석에 유용하게 쓰일 수 있을 것으로 판단된다.

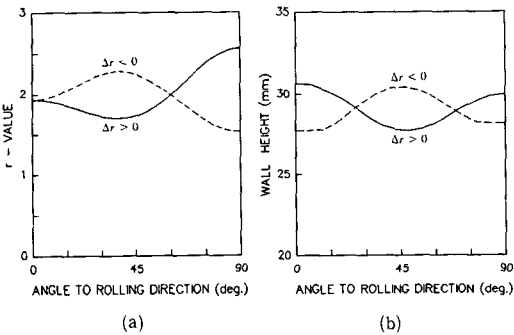


Fig. 13 (a) Variation of  $r$ -value with the angle to rolling direction  
(b) Variation of wall height with the angle to rolling direction

Fig. 12에 펀치 변위에 따른 펀치 하중의 변화를 실험 결과와 비교하였다. 변형의 초기 단계에서는 해석 결과가 실험치와 잘 일치하나, 중반 이후에서는 실험치보다 약간 낮게 나타나고 있다. 굽힘 효과의 배제, 마찰 상태의 변화 등이 해석과 실험의 차이를 유발하는 주 원인인 것으로 판단된다.

$r$  값이 같고  $\Delta r$  값의 부호가 반대인 2가지의 가 상 재료에 대한 해석 결과, Fig. 13에  $r$  값의 변화 곡선과 완전히 성형된 컵의 귀 모양을 비교하였다. (a)와 (b)는 각 모델에 대하여 45° 방향을 기준으로 좌우가 서로 뒤바뀐 듯한 곡선 형상을 보인다. 이는 역시 0° 및 90° 방향에 대하여  $r$  값이 작은 쪽 에서 더 높은 귀가 발생하게 된다는 사실과 관계가 있다.

## 참고문헌

- (1) Lee, C.H. and Kobayashi, S., 1974, "Rigid-Plastic Analysis of Bore Expanding with Anisotropic Sheet Metals by the Matrix Method," Proc. 15th Int. Mach. Tool Des. Res. Conf. pp.561~569.
- (2) Gotoh, M. and Ishise, F., 1978, "A Finite Element Analysis of Rigid-Plastic Deformation of the Flange in a Deep Drawing Process Based on a Fourth-Degree Yield Function," Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp.423~435.
- (3) Kobayashi, S. and Kim, J. H., 1978, "Deformation Analysis of Axisymmetric Sheet Metal Forming Processes by Rigid-Plastic Finite Element Method," Mechanics of Sheet Metal Forming, Edited by Koistinen, D.P. et al., Plenum Press, pp. 341~365.
- (4) Toh, C.H., 1985, "Process Modeling of Sheet Metal Forming of General Shapes by the Finite Element Method Based on Large Strain Formulation," Ph. D. Thesis, U.C. Berkeley.
- (5) Wang, N. M., 1984, "A Rigid-Plastic Rate-Sensitive Finite Element Method for Modelling Sheet Metal Forming Processes," Numerical Analysis of Forming Process, Edited by Pittman, J.F.T. et al., John Wiley & Sons, pp.117~164.
- (6) Yang, D.Y. and Kim, Y.J., 1986, "A Rigid-Plastic Finite-Element Formulation for the Analysis of General Deformation of Planar Anisotropic Sheet Metals and Its Applications," Int. J. Mech. Sci., Vol.28, No.28, pp.825~840.
- (7) Chung, W.J., 1989, "A Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Considering Contact and Friction," Ph. D. Thesis, KAIST.
- (8) Chung, W.J., Yang, D.Y. and Kim, Y.J., 1990, "Analysis of Deep-Drawing of Circular and Square cups Considering Planar Anisotropy," Advanced Technology of Plasticity 1990, Vol.3, pp.1135~1142.
- (9) Park, J.J., Oh, S. I. and Altan, T., 1987, "Analysis of Axisymmetric Sheet Forming Processes by Rigid-Viscoplastic Finite Element Method," Trans. ASME, J. Eng. Ind., Vol.109, pp.347~354.
- (10) Germain, Y., Chung, K. and Wagoner, R. H., 1989, "A Rigid-Viscoplastic Finite Element Program for Sheet Metal Forming Analysis," Int. J. Mech. Sci., Vol.31, No.1, pp.1~24.
- (11) 井關日出男, 室田忠雄, 佐藤利弘, 1988, "有限要素法による深絞りのプランク形状の決定法について(第2報)," 日本機械學會論文集(C編), Vol.54, pp.2257~2264.
- (12) Wang, N.M. and Wenner, M.L., 1978, "Elastic-Viscoplastic Analyses of Simple Stretch Forming Problems," Mechanics of Sheet Metal Forming, Edited by Koistinen, D.P. et al., Plenum Press, pp.367~398.
- (13) Nakamachi, E., Takezone, S. and Sowerby, R., 1982, "A Numerical Analysis of the Hydraulic Bulging of Circular Disks into Axisymmetric Dies," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.49, pp. 501~506.
- (14) Mattiasson, K., Saran, M., Melander, A., Schedin, E. and Gustafsson, C., 1987, "Finite Element Simulation of Deep Drawing of Low and High Strength Steel," Advanced Technology of Plasticity 1987, Vol.1, Edited by Lange, K., Springer-Verlag, pp.657~664.
- (15) Shim, H. B., 1989, "An Elastic-Plastic Finite Element Formulation of Single-and Multi-Layered Degenerated Shells with Application to Sheet Metal Forming," Ph. D. Thesis, KAIST.
- (16) Hill, R., 1950, "The Mathematical Theory of Plasticity," Clarendon Press, Oxford.