

〈論 文〉

단순급수함수를 이용한 직교이방성 복합재료 삼각판의 자유진동해석

이영신* · 정대근** · 나문수**

(1991년 10월 4일 접수)

Free Vibration Analysis of Orthotropic Triangular Plates with Simplified Series Function

Young-Shin Lee, Dae-Gun Jeong and Moon-Soo Na

Key Words : Vibration(진동), Simple Series Function(단순급수함수), Triangular Plates(삼각판), Composite Materials(복합재료), Natural Frequency(고유 진동수), Mode Shapes(모드 형상), Nodal Patterns(노달 패턴)

Abstract

A very simple and computationally efficient numerical method is developed for the free vibration of isotropic and orthotropic composite triangular plates. A set of two-dimensional simple series functions is used as an admissible displacement functions in the Rayleigh-Ritz method to obtain the natural frequencies, nodal patterns and mode shapes for the plates. From the prescribed starting function satisfying only the geometric boundary conditions, the higher terms in the series functions are constructed with adding order of polynomial. Natural frequencies, nodal patterns and mode shapes are obtained for right triangular plates with three different support conditions. The obtained numerical results are presented, and the isotropic and some orthotropic cases are verified with other numerical methods in the literature.

기 호 설 명

a, b	: 판 치수	T_{max}	: 최대 운동 에너지
C_i	: 고유 벡터 상수	U_{max}	: 최대 변형 에너지
D	: 굽힘 강성, $Eh^3/12(1-\nu^2)$	$W(\xi, \eta)$: 변위 함수
D_{ij}	: 직교 이방성 판의 굽힘 및 비틀림 강성	X, Y	: 판의 직교 좌표
E_{ij}	: 횡탄성 계수	a	: 형상비, b/a
$f_m(\xi, \eta)$: 차수 함수	ξ, η	: 판의 단위화 좌표, $X/a, Y/a$
G	: 종탄성 계수	λ_0	: 고유치
h	: 판 두께	λ	: 무차원 진동 계수, $(\lambda_0)^{1/2}/2\pi$
$[K]$: 강성 행렬	ν_{12}	: 포와송 비
m	: 이중 무한 변위 급수의 전개 항수	ρ	: 재료 밀도
		$\Phi(\xi, \eta)$: 단순 급수 판함수
		$\phi(\xi, \eta)$: 모서리 함수 또는 경계선 함수
		$\omega(\xi, \eta)$: 각 진동수, (radian/sec).

*정회원, 충남 대학교 기계설계학과

**정회원, 국방 과학 연구소

1. 서론

최근 고강도 경량화의 요구가 증가되어 복합재료가 널리 사용됨으로써 파괴 하중에는 충분히 안전하나 부재들의 체적이 감소함으로써 진동문제는 더욱 불리해지며 중요한 설계변수가 되고 있다.

그러나 복합재료와 다양한 형상에 대한 진동 특성은 아직도 완전히 알려져 있지 않으므로⁽¹⁾, 최근 더욱 간단하고 일반화된 여러가지 진동 해석 방법이 많이 제시되고 있다. 그 중 Mirza⁽²⁾는 유한요소법으로, Gorman⁽³⁾는 중첩법(building block method)으로, Christensen⁽⁴⁾은 그리드법(grid work method)으로, Kim,⁽⁵⁾ Bhat,⁽⁶⁾ Lam⁽⁷⁾은 직교 다항식 함수와 Rayleigh-Ritz법으로, Gustafson⁽⁸⁾은 실험적으로 삼각판의 고유진동수를 제시하였다.

따라서 본 연구에서는 훨씬 간단하고 직교 다항식이 아니더라도 단지 기하학적 경계조건만을 만족하는 단순 급수함수(simplified series function)와 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 등방성 및 복합재료 직각삼각형에 대하여 수렴성을 검토하고, 경계조건의 변화와 직교이방성 재료의 물성치 E_1, E_2, G, ν_{12} 의 변화와 기하학적 형상비 $\alpha=b/a$ 의 변화가 무차원 고유진동수에 대해 얼마나 영향을 미치는지를 조사하고, 각 mode 별 nodal patterns과 mode shapes의 변화를 시각적으로 제시하여 보이므로써, 유사한 문제를 단순화시켜 효율적으로 해석할 수 있음을 보이고자 한다. 따라서 본 연구에서는 두개의 직각좌표가 경계에서 동시에 변하는 가장 간단하면서도 대표적인 직각 삼각형에 대해서 논하고, 앞으로 모든 임의의 형상에 대해서도 확장할 수 있는 가능성을 제시하고자 한다.

2. 수식화

2.1 해석 모델

본 연구에서 해석하고자 하는 모델의 기하학적 형상은 Fig. 1과 같다. 직교 좌표축은 각각 X와 Y, 변위 길이는 각각 a, b로 하고, a에 대하여 단위화시켜 $\xi=X/a, \eta=Y/a$ 로 하며, 기하학적 형상비는 $\alpha=b/a$ 이다. 여기서 단층의 등방성 및 직교이방성 재료를 사용하며, 판 두께의 영향은 고려하지 않는다.

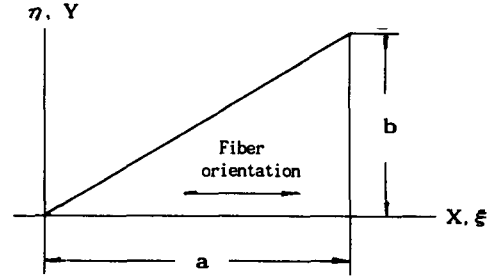


Fig. 1 Geometry and coordinate system

2.2 단순 급수 함수 구성

삼각판의 진동에 대한 변위함수 $W(\xi, \eta)$ 를 2차원 단순 급수 함수 $\phi(\xi, \eta)$ 로써 표시하면 다음과 같다

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m C_i \phi_i(\xi, \eta) \quad (1)$$

여기서 $W(\xi, \eta)$ 는 ξ, η 좌표에 대한 변위량, $\phi(\xi, \eta)$ 는 단순급수 함수, m 은 급수(series)의 항수이며, C_i 는 상수항으로 고유벡터(eigen vector)이다. 임의의 형상에서 각 변을 따라 최소한 기하적 경계조건을 만족시킬 수 있는 변함수(edge function) $\phi(\xi, \eta)$ 를 식 (2)~(4)와 같이 가장 간단한 형태로 만든다.

(a) 단순지지만 기하학적 경계조건은 $W(\xi, \eta) = 0$ 이므로

$$\phi(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi - c & : \text{모서리 } \xi = c \text{에서} \\ \eta - d & : \text{모서리 } \eta = d \text{에서} \\ \eta - t\xi - e & : \text{모서리 } \eta = t\xi + e \text{에서} \end{cases} \quad (2)$$

(b) 고정단 기하학적 경계조건은 $W(\xi, \eta) = 0, W'(\xi, \eta) = 0$ 이므로

$$\phi(\xi, \eta) = \begin{cases} (\xi - c)^2 & : \text{모서리 } \xi = c \text{에서} \\ (\eta - d)^2 & : \text{모서리 } \eta = d \text{에서} \\ (\eta - t\xi - e)^2 & : \text{모서리 } \eta = t\xi + e \text{에서} \end{cases} \quad (3)$$

(c) 자유단 $\phi(\xi, \eta) = 1$ (4)

여기서 c, d, e, t는 형상의 경계를 표시할 수 있는 좌표 값으로써, Fig. 1의 직각 삼각형에서는 $c=a, d=0.0, e=0.0, t=b/a$ 이고, $W(\xi, \eta)$ 는 변위량이며, $W'(\xi, \eta)$ 는 해당모서리 좌표 ξ 또는 η 에 대한 1차 미분을 의미한다. 각 모서리에서 경계조건을 만족하는 변함수를 곱하여 삼각판 전체의 경계조건을 만족하는 초기판함수(starting plate func-

Table 1 First six simplified series functions for C-F-F isosceles right triangular plates

Generating -functions	Simple series -plate functions
$f_1(\xi, \eta) = 1$	$\Phi_1(\xi, \eta) = \eta^2$
$f_2(\xi, \eta) = \xi$	$\Phi_2(\xi, \eta) = \xi\Phi_1(\xi, \eta) = \xi\eta^2$
$f_3(\xi, \eta) = \eta$	$\Phi_3(\xi, \eta) = \xi\eta\Phi_1(\xi, \eta) = \eta^3$
$f_4(\xi, \eta) = \xi\eta$	$\Phi_4(\xi, \eta) = \xi\eta\Phi_1(\xi, \eta) = \xi\eta^3$
$f_5(\xi, \eta) = \xi^2$	$\Phi_5(\xi, \eta) = \xi^2\Phi_1(\xi, \eta) = \xi^2\eta^2$
$f_6(\xi, \eta) = \eta^2$	$\Phi_6(\xi, \eta) = \eta^2\Phi_1(\xi, \eta) = \eta^4$

tion) $\Phi_1(\xi, \eta)$ 를 다음과 같이 구성하여 판영역 전체에 대해 경계조건을 만족하게 한다.

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \phi_1(\xi, \eta) \times \phi_2(\xi, \eta) \times \dots \times \phi_n(\xi, \eta) \quad (5)$$

식 (2)~(4)를 적절히 구성하면 함수로 표시 가능한 임의의 형상과 경계조건의 조합에 적용 가능할 것으로 본다. 무한급수(series) $m \geq 2$ 인 고차항을 다음과 같이 구성 한다.

$$\Phi_m(\xi, \eta) = f_m(\xi, \eta) \Phi_1(\xi, \eta) \quad (6)$$

차수함수(generation function) $f_m(\xi, \eta)$ 는 고차항을 만들기 위해 부가되며 Pascal's triangular rule과 유사하게 다음과 같이 얻어진다.⁽⁷⁾

Table 1과 같이 f_m 과 Φ_i 는 아주 간단하므로 구성하기 용이하며 계산시간이 적어진다.

2.3 고유치 문제 해석

변위함수식 (1)을 널리 알려진 변형 에너지식과 운동 에너지식에 대입하여, 변위량 $W(\xi, \eta)$ 대신 단순급수함수 $\Phi(\xi, \eta)$ 로써 표시하면 각각 식 (7)과 (8)로 표시 할 수 있다. 소진폭 진동에서 최대 변형에너지 U_{max} 은 다음과 같다.

$$U_{max} = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \iint_R \frac{D_{11}}{a^4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right]^2 + \frac{2D_{12}}{a^4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] + \frac{D_{22}}{a^4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right]^2 + \frac{4D_{66}}{a^4} \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right]^2 \right\} d\xi d\eta \quad (7)$$

운동에너지 T_{max} 은 다음과 같다.

$$T_{max} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \iint_R \left[\sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(\xi, \eta) \right]^2 d\xi d\eta \quad (8)$$

여기서 D_{ij} 굽힘강성, ρ 는 재료밀도, h 는 재료 두께, ω 는 각진동수(angular frequency)이다. 미지계수 C_i 에 대하여 Rayleigh-quotient로써 최소화시키고 C_i 에 대하여 정리하면 고유치 지배방정식을 얻는다.

$$[K_{ij} - \lambda_0 M_{ij}] C_i = 0 \quad (9)$$

K_{ij} 는 강성행렬로써 식(10)와 같이 표시된다.

$$K_{ij} = D'_{11} P_{ij} + D'_{22} Q_{ij} + 2D'_{12} (R_{ij} + S_{ij}) + 4D'_{66} T_{ij} \quad (10)$$

여기서 $M_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}, S_{ij}, T_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$M_{ij} = \iint_R \Phi_i(\xi, \eta) \Phi_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (11)$$

$$P_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \quad (12)$$

$$Q_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \quad (13)$$

$$R_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \quad (14)$$

$$S_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \quad (15)$$

$$T_{ij} = \iint_R \frac{\partial^2 \Phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_j(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \quad (16)$$

$$\lambda_0 = \rho h \omega^2 a^4 / \sqrt{D_{11} D_{22}} \quad (17)$$

$$\lambda = (\lambda_0)^{1/2} / 2\pi = (\omega a^2 / 2\pi) \sqrt{(\rho h \sqrt{D_{11} D_{22}})} \quad (18)$$

λ_0 는 고유치(eigen value)이며, $\lambda = (\lambda_0)^{1/2} / 2\pi$ 형태로써 해당 mode에서의 무차원 진동계수 형태로 고유진동수(natural frequency)를 나타내며, 종횡비 $\alpha = b/a$ 이다. C_i 는 고유벡터(eigen vector)로써 식 (1)에 대입하여 변위량 $W(\xi, \eta)$ 를 결정하게 되며, 고유치문제 해석은 EISPACK⁽⁹⁾을 사용했다. 식 (10)에서 굽힘강성 $D'_{11}, D'_{22}, D'_{12}, D'_{66}$ 를 섬유 적층 각도로써 적절히 표현하면 복합재료의 섬유방향에 대한 영향과 적층문제에 대해서도 적용 가능할 수 있을 것으로 본다.

3. 수치에 및 고찰

3.1 수치예

Table 2와 같은 물성치를 가진 5종의 등방성 및

Table 2 Material properties of typical unidirectional composites⁽⁷⁾

Material	E_1/E_2	G/E_2	ν_{12}
Isotropic	1.00	0.3846	0.30
Glass-epoxy	4.67	0.50	0.26
Boron-epoxy	11.03	0.30	0.23
Kevlar-epoxy	13.82	0.42	0.34
Graphite-epoxy	17.57	0.70	0.28

직교이방성 복합재료에 대하여 수치적 계산을 했다. 경계조건은 기하학적 경계조건을 모서리에 따라 표시할 수 있는 모든 경계조건에 사용할 수 있으나, 본 연구에서는 대표적인 전체 단순지지단(All simply supported) (S-S-S), 전체 고정단(All clamped supported) (C-C-C), 외팔단(Xaxis clamped cantilever) (C-F-F)에 대해 고찰 하고자 한다.

3.2 수렴성 검토

에너지법(energy method)는 엄밀해에 대하여 상계해(upper bound solution)로 접근하므로, 수치 계산의 정확도는 단순급수 $\Phi_m(\xi, \eta)$ 의 항 수 m 을 증가시켜 적절한 수렴성을 얻음으로써 확인 될 수 있다. Table 3은 경계조건 C-F-F, S-S-S, C-C-C에 대하여 고차항의 수 m 을 8항에서 30항 까지 증가 시키면서 mode number 별로 무차원 진동계수 λ 의 수렴성을 확인하기 위하여 Lam⁽⁷⁾의 결과와 비교했다. C-F-F에서는 전체적으로 1%~8%까지 낮게 평가되고 있으며, S-S-S에서는 2%~7%까지 높게 평가되고 있으나, 수렴성은 20항 이상에서 충분히 양호하며, 고유치(eigen value) 계산시에 정밀성이 인정된 EISPACK package⁽⁹⁾를 사용했으므로 정확할 것으로 본다. 또한 C-C-C는 비교 문헌은 없으나 충분히 잘 수렴하고 있다.

본 연구의 단순 급수 합수법은 수식이 간단하고 컴퓨터 계산시간이 적어서 고차항으로 전개하기예 용이하므로 40항 이상으로도 전개할 수 있다.

3.3 고유 진동수 고찰

본 연구에서는 3가지 경계조건과 5종의 등방성 및 직교이방성 재료에 대하여 무차원 진동 계수 λ

로써 그 결과를 Table 4~6에 제시하고 유효한 참고문헌과 비교했다.

(i) 외팔단: Table 4는 C-F-F 경계조건에서 무차원 진동 계수 λ 를 표시하고 Lam⁽⁷⁾, Kim⁽⁶⁾ 등의 결과와 2%~8% 정도 낮게 표시되고 있으나, 오히려 실험치⁽⁶⁾에 더 잘 일치하고, 4종의 복합재료에서는 Lam⁽⁷⁾의 결과와 0%~4% 정도로써 아주 잘 일치하며, 전체적으로 약간 낮은 값으로 평가되고 있다. 복합재료의 무차원 진동계수 λ 는 등방성에 비하여 20%~40%까지 낮은 값이며, E_1/E_2 가 가장 큰 Graphite는 45%까지 낮은 값으로 평가되고 있다.

(ii) 전체 단순 지지단: Table 5은 S-S-S 경계조건에서 λ 를 표시하고 Lam⁽⁷⁾, Kim⁽⁶⁾, Gorman⁽³⁾의 결과와 비교 했다. 등방성 재료에서는 Lam⁽⁷⁾의 결과와 비교하여 6% 정도 높게 평가 되고 있으나, 4종의 복합 재료에서는 0~3%정도 오차로써 오히려 더 잘 일치하고 있다. 복합재료의 λ 는 등방성에 비하여 0%~15% 낮은 값으로써 복합재료 물성치가 증가하더라도 λ 는 등방성에 비하여 0%~15% 낮은 값으로써 복합재료 물성치가 증가하더라도 λ 는 크게 변하지 않으며 Boron이 가장 낮은 값이다.

(iii) 전체 고정단: Table 6은 C-C-C 경계조건에서 무차원 진동계수를 표시하고 Kim⁽⁶⁾의 결과와 비교했다. mode 1에서는 3% 정도 mode 6에서는 7% 정도의 오차로 높게 평가되고 있다. 고정단에서 Graphite는 등방성에 비하여 λ 값이 오히려 더 큰 값이며, Glass가 가장 낮은 값입니다. 위의 결과로 볼 때 복합재료의 λ 는 경계조건에 따라 등방성보다 클 수 있음을 볼 수 있다. Table 7은 5종의 등방성 및 직교이방성 직각이등변 삼각형판에 대하여 무차원 진동 계수 λ 가 아닌 실진동수 (real frequency)로써 직접적으로 비교할 수 있도록 표시했다.

(i) C-F-F에서 등방성재료는 Leissa⁽¹⁾에 제시된 철 판(steel plate)으로 넓이 $a = b = 254 \text{ mm}$ (10 inch), 두께 = 1.55 mm (0.061inch), $\nu_{12} = 0.3$, $E_1 = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ($30 \times 10^6 \text{ psi}$)로써, 실진동수 (cycle/sec)로 비교한 결과는 Leissa⁽¹⁾ 문헌에 잘 일치한다.

등방성에서 첫번째 mode는 1초당 5.6번, 두번째 mode는 1초당 21.9번 진동하며, Boron의 첫번째 mode는 1초당 3.3번 진동하며 Kevlar는 2.1번으

Table 3 Convergence patterns of the nondimensional frequency parameter λ of isotropic isosceles right triangular plates, for three boundary conditions

Mode Number	Boundary condition=C-F-F, Number of series terms=m							
	8	12	16	18	20	24	28	30
1	0.96 (0.98)	0.95 (0.98)	0.94 (0.98)	0.94 (0.98)	0.94	0.94	0.94	0.94
2	3.95 (3.92)	3.68 (3.77)	3.67 (3.73)	3.67 (3.73)	3.66	3.66	3.66	3.66
3	4.92 (5.39)	4.86 (5.24)	4.83 (5.21)	4.82 (5.21)	4.82	4.82	4.81	4.81
4	10.73 (10.88)	9.46 (9.51)	8.78 (9.43)	8.65 (9.41)	8.60	8.59	8.57	8.56
5	17.26	12.76	12.26	12.05	11.90	11.78	11.61	11.60
6	24.59	19.72	16.63	16.54	16.25	15.62	15.40	15.40
Mode	Boundary condition=S-S-S							
1	842 (8.05)	8.42 (7.88)	8.23 (7.85)	8.22 (7.85)	8.22	8.22	8.22	8.22
2	19.84 (19.34)	16.93 (16.48)	16.62 (15.94)	16.35 (15.66)	16.23	16.20	16.14	16.14
3	27.10 (25.97)	22.92 (21.62)	22.46 (21.08)	21.94 (20.46)	21.84	21.81	21.72	21.72
4	49.64 (48.88)	36.47 (35.56)	31.02 (28.74)	28.73 (27.38)	28.39	27.94	27.58	27.43
5	61.68	50.49	84.00	36.54	36.55	35.11	33.76	33.56
6	69.35	55.04	53.73	46.03	45.05	44.46	42.62	42.51
Mode	Boundary condition=C-C-C							
1	15.54	15.50	15.49	15.48	15.48	15.47	15.47	15.47
2	26.51	26.14	26.01	25.92	25.84	25.83	25.82	25.82
3	33.70	32.83	32.66	32.66	32.58	32.56	32.55	32.53
4	47.34	42.24	40.72	39.99	39.97	39.78	39.60	39.53
5	57.63	51.39	48.22	47.33	47.31	46.80	46.30	46.15
6	68.44	61.05	57.83	57.56	57.34	57.20	56.70	56.58

Ref⁽⁷⁾

로 실지 진동수가 가장 적으며, Table 4에서 λ 는 Kevlar와 Graphite가 거의 같으나 실제 진동수는 Kevlar가 25% 적으며, 복합재료도 종류별로 차이가 크다.

(ii) S-S-S에서는 C-F-F에 비하여 5~16배 크며, Graphite는 등방성과 거의 비슷한 값이나 Glass는 70% 정도 적다.

(iii) C-C-C에서는 S-S-S의 2배 정도이며,

Glass는 등방성에 비하여 80% 정도 낮은 값이나 Boron은 오히려 5% 정도 높은 값이다. Table 8은 등방성 직각삼각형을 형상비(aspect ratio) $\alpha=1.0\sim 3.0$ 까지 변화하면서 C-F-F 경우는 Kim⁽⁶⁾의 결과와 비교하여 잘 일치하고 있으며, S-S-S와 C-C-C는 비교문헌을 찾지 못했다. 외팔단에서는 형상비 α 가 증가할수록 λ 가 아주 빠르게 감소하나 단순지지단과 고정단은 약간씩 감소한다. Table 4

~8의 결과로 볼때 복합재료의 진동수는 등방성보다 전반적으로 낮은 값이나 재료물성치와 경계조건 및 형상비의 변화에 따라 오히려 높아질 수 있으므로 쉽게 예측할 수 없음을 알았다.

3.4 재료물성치에 따른 고찰

Fig. 2~5은 C-F-F 및 S-S-S 경계조건에 대하여 복합재료의 진동수를 예측하기 위하여 재료물성

치 E_1/E_2 , G/E_2 , ν_{12} 와 형상비 $1/\alpha$ 이 λ 에 어떤 영향이 미치는지를 조사했다.

재료물성치를 $E_1/E_2=1\sim45$, $G/E_2=0.1\sim1.0$, $\nu_{12}=0.05\sim0.5$ 까지 변화시키고 형상비를 $1/\alpha=0.25\sim3.0$ 까지 각각 변화 할때 각 mode number 별로 λ 의 변화를 표시했다. 이때 변화되지 않은 모든 계수는 mode 1, 형상비 $1/\alpha=1$, 재료의 물성치는 Table 2의 등방성 재료 물성치와 같다.

Table 4 Comparison of the nondimensional frequency parameter λ of a cantilever supported (C-F-F) isosceles right triangular plates, for composite materials

Material	Reference	Mode Number					
		1	2	3	4	5	6
Isotropic	Present	0.94	3.66	4.81	8.56	11.60	15.40
	Lam ⁽⁷⁾	(0.98)	(3.73)	(5.21)	(9.41)		
	Kim ⁽⁵⁾	(0.98)	(3.73)	(5.20)	(8.94)	(12.18)	(15.93)
	Bhat ⁽⁶⁾	(0.98)	(3.74)	(5.21)	(8.98)		
	Mirza ⁽²⁾	(0.92)	(3.64)	(5.09)	(8.70)		
Glass-epoxy	Present	0.69	2.80	3.93	6.94	9.58	13.21
	Lam ⁽⁷⁾	(0.69)	(2.81)	(4.03)	(6.99)		
Boron-epoxy	Present	0.54	2.13	3.05	5.44	7.50	10.61
	Lam ⁽⁷⁾	(0.54)	(2.10)	(3.12)	(5.58)		
Kevlar-epoxy	Present	0.52	2.12	3.03	5.32	7.46	10.35
	Lam ⁽⁷⁾	(0.52)	(2.13)	(3.09)	(5.46)		
Graphite-epoxy	Present	0.51	2.13	3.21	5.28	7.83	10.27
	Lam ⁽⁷⁾	(0.51)	(2.14)	(3.26)	(5.69)		

Table 5 Comparison of the nondimensional frequency parameter λ of all simply supported (S-S-S) isosceles right triangular plates, for composite materials

Material	Reference	Mode Number					
		1	2	3	4	5	6
Isotropic	Present	8.22	16.14	21.72	27.43	33.56	42.51
	Lam ⁽⁷⁾	(7.85)	(15.66)	(20.46)	(27.38)		
	Kim ⁽⁵⁾	(7.86)	(15.72)	(20.44)	(26.91)	(31.88)	(38.76)
	Gorman ⁽³⁾	(7.85)	(15.64)	(20.45)	(27.31)		
Glass-epoxy	Present	7.74	15.12	20.48	25.49	32.30	40.44
	Lam ⁽⁷⁾	(7.57)	(15.01)	(20.21)	(27.26)		
Boron-epoxy	Present	7.58	14.21	20.81	23.71	32.09	40.56
	Lam ⁽⁷⁾	(7.47)	(14.29)	(20.65)	(26.37)		
Kevlar-epoxy	Present	7.85	14.48	21.72	24.09	33.20	41.52
	Lam ⁽⁷⁾	(7.71)	(14.52)	(21.54)	(27.04)		
Graphite-epoxy	Present	8.10	14.70	22.50	24.52	34.22	52.54
	Lam ⁽⁷⁾	(8.01)	(14.11)	(22.61)	(27.73)		

Table 6 Comparison of the nondimensional frequency parameter λ of all clamped supported (C-C-C) isosceles right triangular plates, for composite materials

Material	Reference	Mode Number					
		1	2	3	4	5	6
Isotropic	Present	15.47	25.82	32.53	39.53	46.15	56.58
	Kim ⁽⁶⁾	(14.93)	(25.12)	(31.00)	(38.69)	(44.28)	(53.52)
Glass-epoxy	Present	14.97	24.49	31.51	36.83	44.89	53.39
Boron-epoxy	Present	15.12	23.74	32.17	35.26	44.83	51.21
Kevlar-epoxy	Present	15.62	24.24	33.34	37.03	46.23	52.05
Graphite-epoxy	Present	16.12	24.70	34.30	36.92	47.48	52.86

Table 7 Real value of cyclic frequency $\omega/2\pi$ for isosceles right triangular plates with composite materials(cycle/sec)

material	Reference	Boundary condition C-F-F, Mode Number					
		1	2	3	4	5	6
Isotropic	Present	5.6	21.9	28.8	51.2	69.4	92.1
	Analytic ⁽⁷⁾	(5.8)	(22.1)	(30.5)	(52.0)	(68.8)	(90.1)
	Experimental ⁽⁷⁾	(5.5)	(21.6)	(31.2)	(51.7)	(70.2)	(92.0)
Glass-epoxy	Present	2.6	10.4	14.7	25.9	35.7	49.2
Boron-epoxy	Present	3.3	13.1	18.7	33.5	46.1	65.3
Kvlar-epoxy	Present	2.1	8.8	12.6	22.2	31.0	43.1
Graphiteepoxy	Present	2.8	11.6	17.5	28.7	42.6	55.8
material	Reference	Boundary condition S-S-S, Mode Number					
Isotropic	Present	49.2	96.5	129.9	164.2	200.7	254.2
Glass-epoxy	Present	28.9	56.4	76.8	95.0	120.4	150.8
Boron-epoxy	Present	46.6	87.4	128.0	145.8	197.5	249.5
Kevlar-epoxy	Present	32.7	60.3	90.5	100.3	138.2	172.8
Graphite-epoxy	Present	44.1	79.9	122.3	133.3	186.1	231.3
material	Reference	Boundary condition C-C-C, Mode Number					
Isotropic	Present	92.6	154.4	194.5	236.4	276.0	338.3
Glass-epoxy	Present	55.8	91.3	117.5	137.3	167.4	199.1
Boron-epoxy	Present	93.0	146.1	197.9	216.9	275.9	315.1
Kevlar-epoxy	Present	65.0	100.9	138.8	150.0	192.4	216.8
Graphite-epoxy	Present	87.6	134.3	186.5	200.7	258.1	287.4

()...Ref⁽¹⁾

(i) Fig. 2는 E_1/E_2 와 $1/\alpha$ 의 변화가 λ 에 미치는 영향을 모두드 1에 대하여 표시했다. C-F-F와 S-S-S 모두 E_1/E_2 가 증가할수록 λ 는 감소하는 경향을 보이며, 형상비 $1/\alpha$ 이 증가할수록 더욱 현저해진다. 즉 복합재료 특성이 클수록 λ 가 감소하는

주원인으로 보인다. 그러나 S-S-S에서는 $1/\alpha=1.5$ 정도에서 E_1/E_2 가 증가하면 오히려 λ 는 증가하는 반대 경향을 보이고 있다. 그러므로 $1/\alpha=1.0$ 에서는 E_1/E_2 가 증가할수록 C-F-F는 λ 가 감소하고 S-S-S에서는 오히려 증가하게 된다.

Table 8 Frequency parameter λ of isotropic right triangular plates with aspect ratio $\alpha=1.0\sim 3.0$, for three boundary conditions

b/a	Reference	Boundary condition C-F-F, Mode Number					
		1	2	3	4	5	6
1.0	Present Kim ⁽⁵⁾	0.94 (0.98)	3.66 (3.73)	4.81 (5.20)	8.56 (8.94)	11.60 (12.81)	15.40 (15.93)
1.5	Present Kim ⁽⁵⁾	0.43 (0.43)	1.81 (1.92)	2.71 (2.83)	4.46 (4.72)	6.57 (6.80)	8.62 (8.90)
2.0	Present Kim ⁽⁵⁾	0.25 (0.26)	1.04 (1.13)	1.91 (1.96)	2.57 (2.77)	4.59 (4.65)	5.07 (5.30)
2.5	Present Kim ⁽⁵⁾	0.16 (0.17)	0.67 (0.73)	1.48 (1.50)	1.65 (1.80)	3.17 (3.27)	3.61 (3.71)
3.0	Present Kim ⁽⁵⁾	0.11 (0.12)	0.47 (0.51)	1.15 (1.20)	1.21 (1.28)	2.24 (2.32)	2.90 (2.94)
b/a	Reference	Boundary condition C-F-F, Mode Number					
1.0	Present Kim ⁽⁵⁾	8.22 (7.86)	16.14 (15.72)	21.72 (20.44)	27.43 (26.91)	33.56 (31.88)	42.51 (38.76)
1.5	Present	5.71	01.82	15.45	17.98	23.62	28.95
2.0	Present	4.01	6.89	10.64	12.02	16.55	19.84
3.0	Present	3.63	5.98	9.31	11.11	14.91	17.60
b/a	Reference	Boundary condition C-C-C, Mode Number					
1.0	Presentgd Kim ⁽⁵⁾	15.47 (14.93)	25.82 (25.12)	32.53 (31.00)	39.53 (36.69)	46.15 (44.28)	56.58 (53.52)
1.5	Present	10.78	17.44	23.11	26.01	32.54	37.42
2.0	Present	8.78	13.57	18.89	20.17	26.06	28.69
2.5	Present	7.68	11.42	15.81	17.78	21.93	24.41
3.0	Present	6.99	10.07	13.75	16.44	19.08	21.97

(ii) Fig. 3은 G/E_2 와 $1/\alpha$ 의 변화가 λ 에 미치는 영향을 mode 1에 대해서 표시했다. G/E_2 가 증가할수록 λ 는 증가하는 경향을 보이고 있다. 즉 E_1/E_2 와 G/E_2 의 증가는 $1/\alpha$ 이 클수록 λ 에 미치는 영향이 커지며 오히려 반대의 영향을 준다.

(iii) Fig. 4은 ν_{12} 와 $1/\alpha$ 의 변화가 λ 에 미치는 영향을 mode 1에 대하여 표시했다. ν_{12} 가 증가할수록 S-S-S에서는 λ 가 증가하나 C-F-F에서는 오히려 λ 가 감소하는 반대 경향을 보이고 있다. 그러나 E_1/E_2 와 G/E_2 만큼 민감하지는 않다.

(iv) Fig. 5는 등방성 재료에 대하여 $1/\alpha$ 의 변화에 따른 각 mode 별 진동계수를 표시했다. $1/\alpha$ 이 증가 할수록 λ 는 증가하며 mode number가 커질수록 더욱 빠르게 λ 는 증가함을 보이고, mode 3과 4 및 mode 5와 6의 간격이 적은 경향이 보인다. 그 이유는 재료 물성치 E_1/E_2 , G/E_2 및 ν_{12}

중 어떤 값이 nodal patterns의 모양에 더 많이 영향을 주는가에 좌우 되는것으로 보인다.

3.5 Nodal Patterns 고찰

Fig. 6~8은 경계조건 C-F-F, S-S-S, C-C-C, 직각이등변 삼각형에 대하여 mode number 2~6까지 Table 2와 같은 등방성, Glass, Boron, Kevlar 및 Graphite 재료로써 복합재료 물성이 증가하는 순으로 nodal patterns의 변화를 도시하고, Fig. 9~10은 형상비 α 의 변화에 대한 nodal patterns의 변화를 도시하여 단순급수함수의 유용성을 확인했다. nodal patterns은 변위함수 식(1)에 각각 100 등분한 좌표위치 ξ , η 와 고유벡터 C_i 를 대입하여 변위량 $W(\xi, \eta)$ 를 구하고, 변위량 $W(\xi, \eta)$ 의 음양 부호(+, -)가 변화는 좌표 위치를 베이직 언어(basic program)에서 플로터(plotter)로 점을 찍어

nodal lines을 표시했다.

(i) Fig. 6은 C-F-F 이등변 직각 삼각형의 진동 model number 2~6에서 재료 물성치 변화에 대하여 nodal patterns의 변화를 도시했다. Fig. 6(a)는

등방성 재료로써 mode 2~6까지 Lam⁽⁷⁾, Bhat⁽⁶⁾ 및 Kim⁽⁵⁾의 결과와 잘 일치한다. Fig. 6(e)는 Graphit 재료로써 모드 2~4까지 Lam⁽⁷⁾의 결과와 잘 일치하고 있으며, Fig. 6(b)~(d)는 비교문

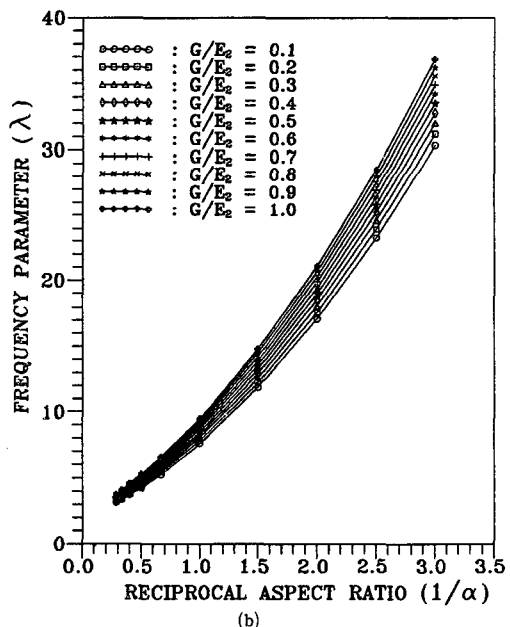
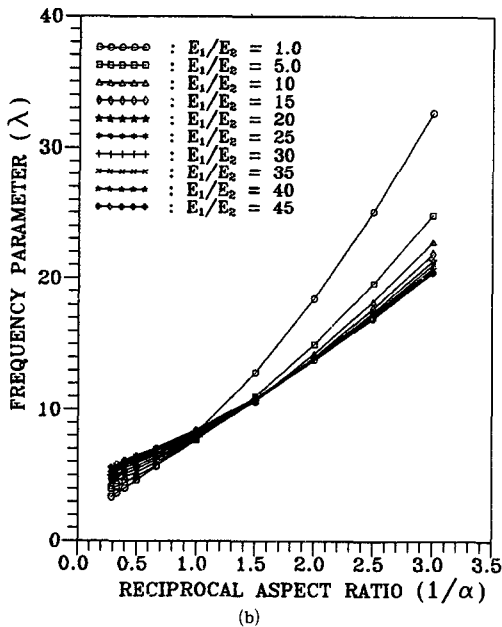
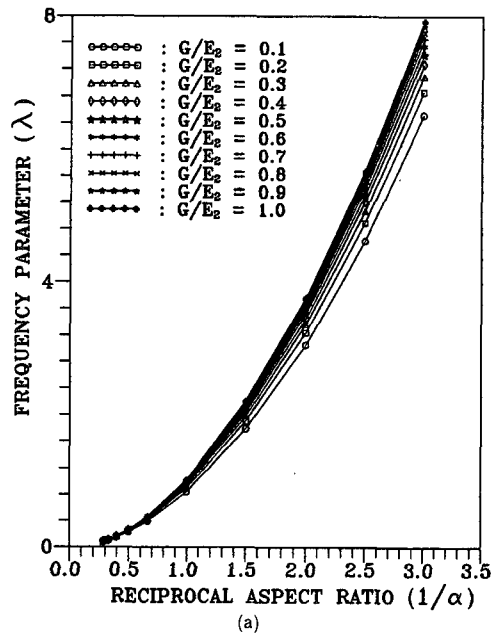
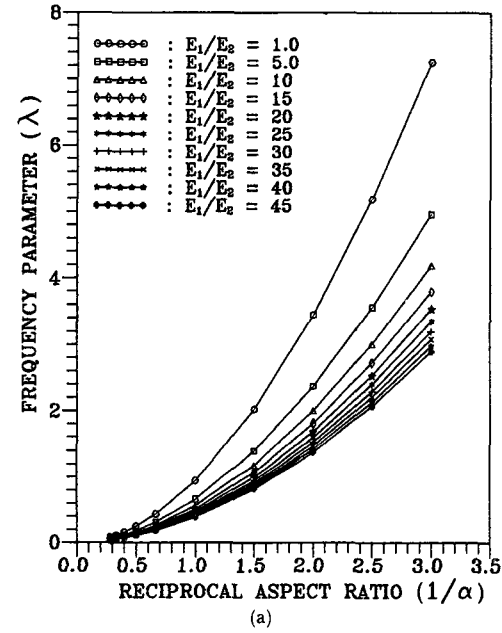


Fig. 2 Variation of frequency parameter λ with aspect ratio $\alpha=b/a$ of right triangular plates, for elastic modulus ratio $E_1/E_2=1\sim 45$, ($G/E_2=0.38$, $\nu_{12}=0.3$, Mode 1) : (a) Cantilever supported, (b) Simple supported

Fig. 3 Vibration of frequency parameter λ with aspect ratio $\alpha=b/a$ of right triangular plates, for shear modulus ratio $G/E_2=0.1\sim 1.0$, ($E_1/E_2=1.0$, $\nu_{12}=0.3$, Mode 1) : (a) Cantilever supported, (b) Simple supported

현을 찾지 못했으며; 특히 복합재료에 대한 모우드 5~6은 전혀 제시된 바가 없었다. 복합재료는 기가 등방성에 비하여 2배 정도 적으나 nodal patterns은 큰 차이가 없음을 볼 수 있으며, 섬유

방향은 화살표와 같으므로 nodal lines 이 섬유 방향과 같은 방향으로 움직이는 경향을 볼 수 있다.

(ii) Fig. 7은 S-S-S 이등변 직각삼각형의 진동 mode number 2~6에서 재료 물성치 변화에 대하

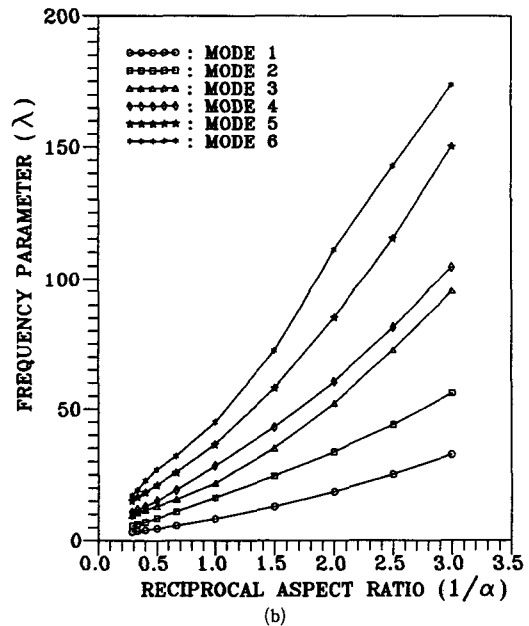
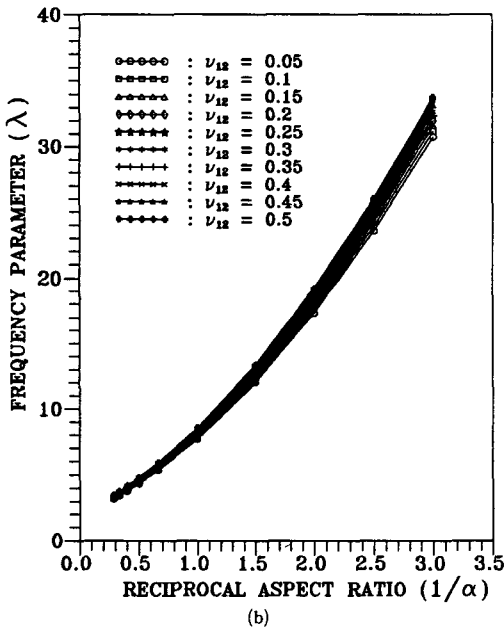
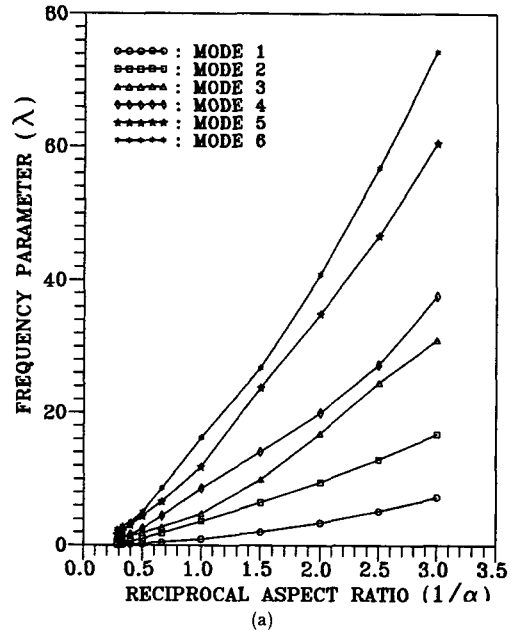
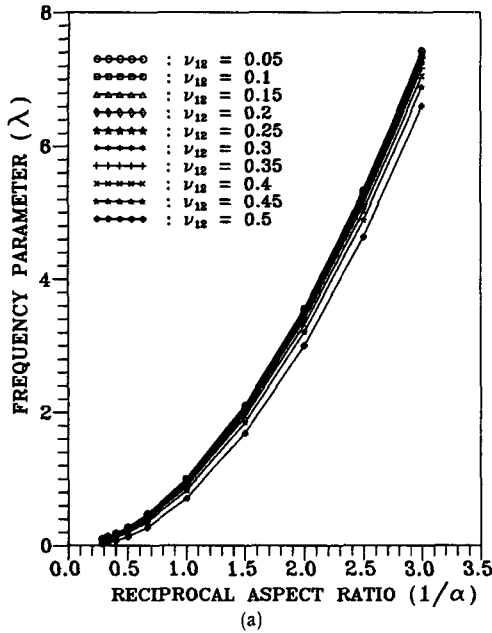


Fig. 4 Variation of frequency parameter λ with aspect ratio $\alpha=b/a$ of right triangular plates, for elastic modulus ratio $E_1/E_2=1\sim 45$, ($G/E_2=0.38$, $\nu_{12}=0.3$, Mode 1) : (a) Cantilever supported, (b) Simple supported

Fig. 5 Variation of frequency parameter λ with aspect ratio $\alpha=b/a$ of right triangular plates, for mode shape number 1-6, ($E_1/E_2=1.0$, $G/E_2=0.38$, $\nu_{12}=0.3$) : (a) Cantilever supported, (b) Simple supported

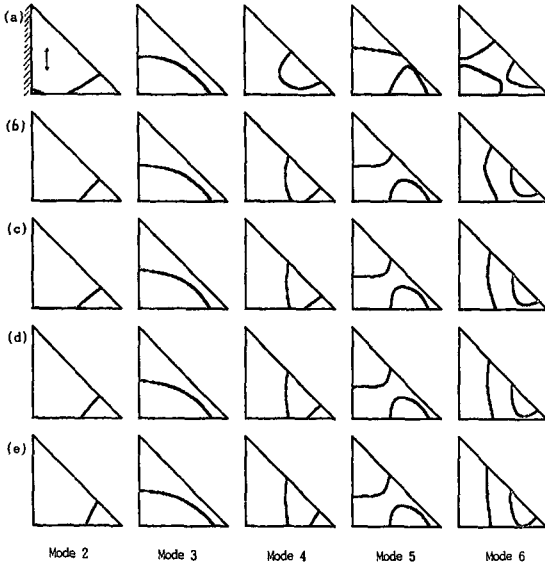


Fig. 6 Nodal Patterns for C-F-F isosceles right triangular plates : (a) isotropic ($E_1/E_2=1.0$), (b) glass-epoxy ($E_1/E_2=4.63$), (c) boron-epoxy ($E_1/E_2=11.03$), (d) kevlar-epoxy ($E_1/E_2=13.82$), (e) graphite-epoxy ($E_1/E_2=17.57$)

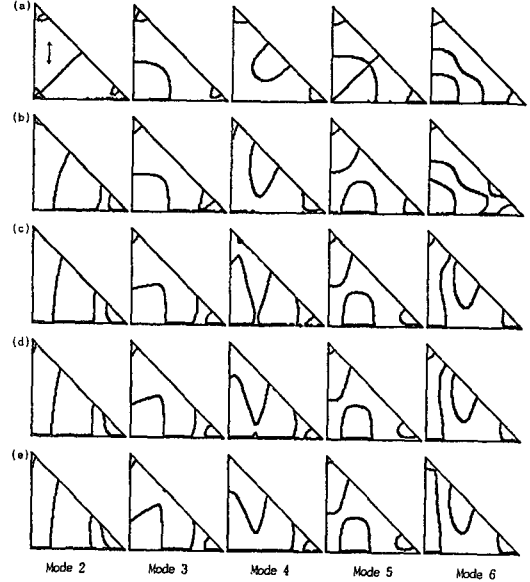


Fig. 8 Nodal Patterns for C-C-C isosceles right triangular plates : (a) isotropic ($E_1/E_2=1.0$), (b) glass-epoxy ($E_1/E_2=4.63$), (c) boron-epoxy ($E_1/E_2=11.03$), (d) kevlar-epoxy ($E_1/E_2=13.82$), (e) graphite-epoxy ($E_1/E_2=17.57$)

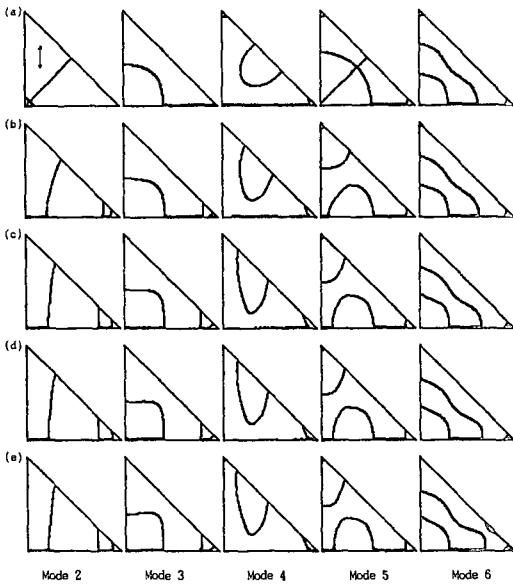


Fig. 7 Nodal patterns for S-S-S isosceles right triangular plates : (a) isotropic ($E_1/E_2=1.0$), (b) glass-epoxy ($E_1/E_2=4.63$), (c) boron-epoxy ($E_1/E_2=11.03$), (d) kevlar-epoxy ($E_1/E_2=13.82$), (e) graphite-epoxy ($E_1/E_2=17.57$)

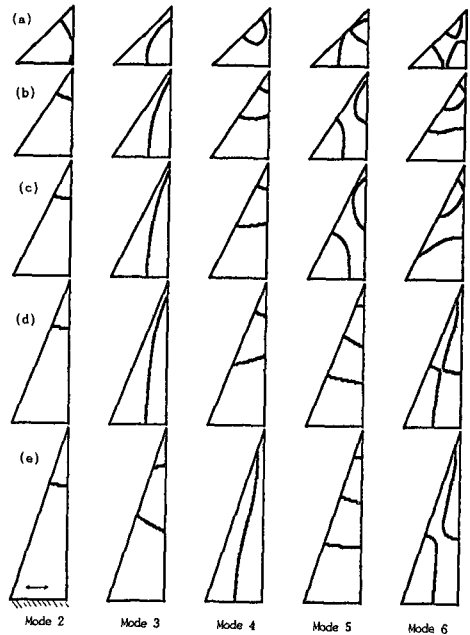


Fig. 9 Nodal patterns of C-F-F isotropic right triangular plates for mode 2~6, with aspect ratio : (a) $\alpha=1.0$, (b) $\alpha=1.5$, (c) $\alpha=2.0$, (d) $\alpha=2.5$, (e) $\alpha=3.0$

여 nodal patterns의 변화를 도실했다. Fig. 7(a)와 (e)는 등방성 및 Graphite 재료로써 Lam⁽⁷⁾ 및 Kim⁽⁶⁾의 결과와 잘 일치하며 기하학적 대칭성도 좋다. 복합재료는 섬유 주방향으로 nodal lines 이 변해감을 보이며 모우드 3~6도 그 변화를 형상적으로 쉽게 예측할 수있다. 복합재료에서의 모서리 선은 Lam⁽⁷⁾의 결과에서 없는 현상이며, Graphite, mode 6과 Fig. 8의 Glass, mode 6을 보면 nodal lines의 변해가는 모양을 볼 수 있다.

(iii) Fig 8은 C-C-C 이등변 직각삼각형의 진동 mode number 2~6에서 재료 물성치 변화에 대하여 nodal patterns의 변화를 도실했다. Fig. 8(a) 등방성 재료로써 Kim⁽⁶⁾의 결과와 잘 일치하며, X, Y 좌표에 대한 대칭성도 좋다. 또한 S-S-S와 C-C-C의 λ 값은 2배 정도 큰 차이가 있으나 nodal patterns은 거의 유사한 모양이며, 양쪽 예각 모서리에서 모서리 선이 더욱 뚜렷하게 보이고, E_1/E_2 가 클수록 섬유방향으로 심해짐을 볼 수 있으며, 이 현상은 Kim⁽⁶⁾의 C-C-C nodal patterns이나 Lam⁽⁷⁾의 S-C-C nodal patterns에서 보이지 않은 경향이다.

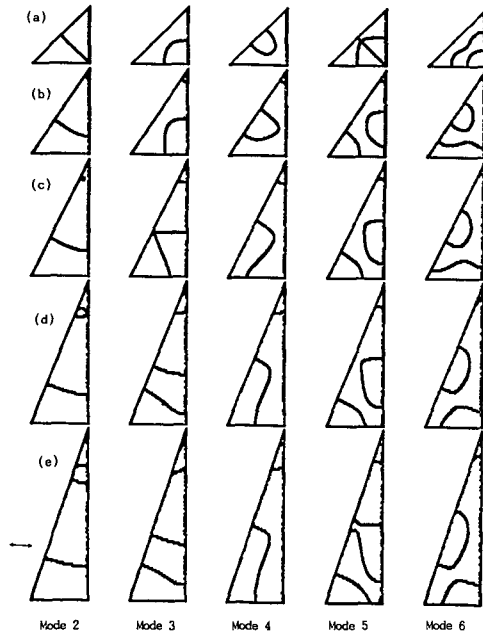


Fig. 10 Nodal patterns of S-S-S isotropic right triangular plates for mde 2~6, with aspect ratio : (a) $\alpha=1.0$, (b) $\alpha=1.5$.(c) $\alpha=2.0$, (d) $\alpha=2.5$ (e) $\alpha=3.0$

(iv) Fig. 9는 C-F-F 등방성 삼각판에 대하여 형상비 $\alpha=1.0\sim 3.0$ 까지 변화 하면서 nodal patterns의 변화를 도실했다. Kim⁽⁶⁾의 결과 와 아주 잘 일치하나 $\alpha=3.0$ 에서는 모우드 3과 4에서 진동 수는 거의 같으나 nodal patterns은 서로 바뀌어진 것같이 보인다. 형상비 α 가 증가한 방향으로 nodal lines이 늘어난 효과를 볼 수 있으며, 변화 거동을 충분히 예측할 수있게 보인다.

(v) Fig. 10는 S-S-S 등방성 삼각판에 대하여 형상비 $\alpha=1.0\sim 3.0$ 까지 변화하면서 nodal patterns의 변화를 도실했다. 비교문헌을 찾지 못하여 정확도는 알 수 없으나 형상비 α 가 증가한 방향으로 nodal liens이 늘어난 효과를 볼 수 있다.

3.6 Mode Shapes 고찰

Fig.11~Fig. 14은 경계조건 C-F-F, S-S-S, C-C-C 일때 등방성재료와 Boron 재료의 직각 이등

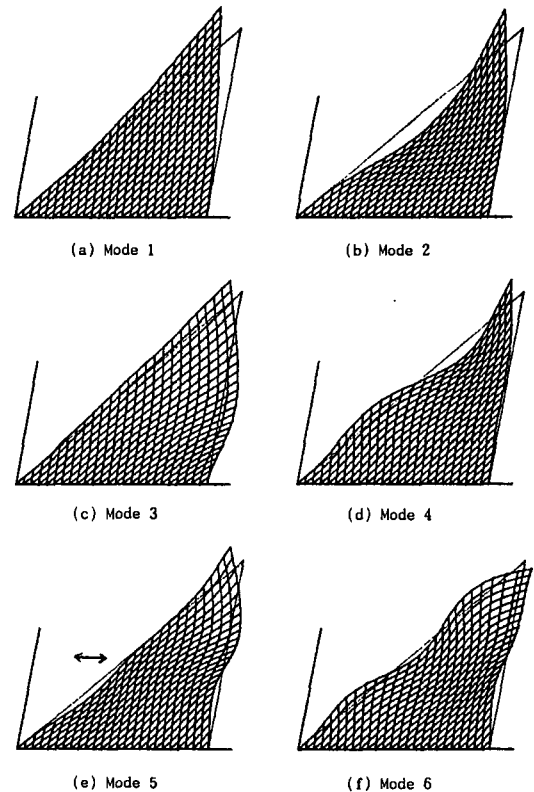


Fig. 11 Mode shapes for isotropic C-F-F isosceles right triangular plates, with mode 1~6.(axis rotating angle : $X=24^\circ$, $Y=-24^\circ$, $Z=0^\circ$, nonscale of deflection)

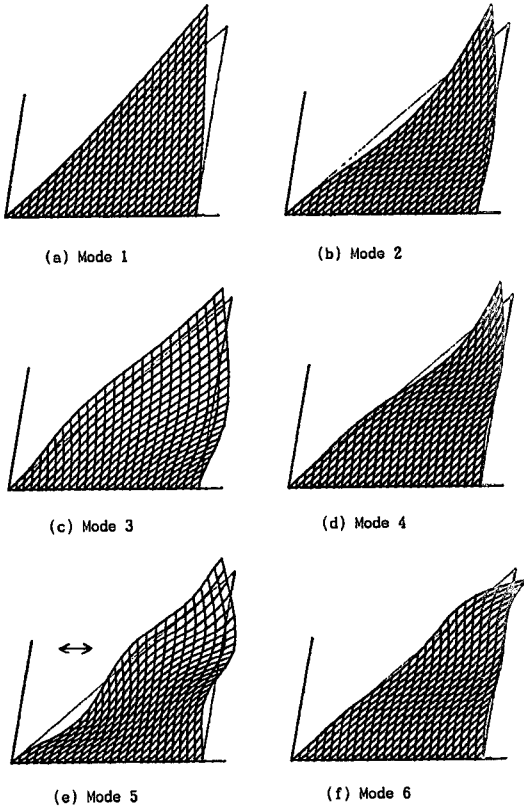


Fig. 12 Mode shapes for boron-epoxy C-F-F isosceles right triangular plates, with mode 1~6, (axis rotating angle : $X=24^\circ$, $Y=24^\circ$, $Z=0^\circ$, nonscale of deflection)

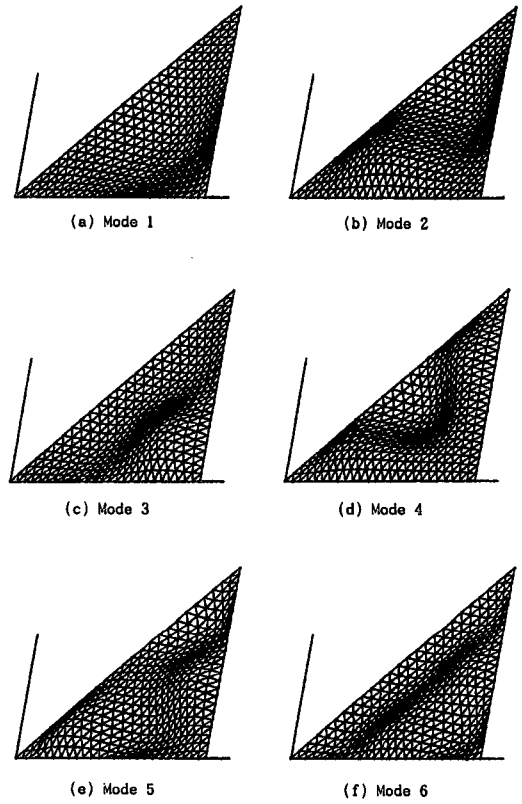


Fig. 13 Mode shapes for isotropic S-S-S isosceles right triangular plates with mode 1~6 (axis rotating angle : $X=24^\circ$, $Y=-24^\circ$, $Z=0^\circ$, nonscale of deflection)

변 삼각형에 대하여 mode shapes 변화를 mode 1~6까지 도시했다. 좌표 회전 변환 행렬은 다음과 같다.

$$[T] = \begin{bmatrix} C_z C_y + S_x S_y S_z & S_z C_x - C_z S_x S_y & C_x S_y \\ -S_y C_x & C_z C_x & S_x \\ -C_\theta S_\theta + S_z S_x C_y & -S_z S_y - C_z S_x C_y & C_x C_y \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서 $C_z = \cos \theta_z$, $S_x = \sin \theta_x$, $S_y = \sin \theta_y$ 이며, θ_x 는 X축 회전 각도이며, 가는 선은 변형전 형상을 좌표회전 변환하여 기준 형상으로 표시했다.

(i) Fig. 11은 등방성 C-F-F 직각 이등변 삼각형에 대한 mode shapes으로써 Mizra⁽²⁾의 결과와 아주 잘 일치한다. 변형전 가는선과 변형후 윤곽선이 만나는 점이 Fig. 6의 nodal lines 끝점과 일치

하므로 변형형상을 정확히 알 수 있으며 시각적으로 변형형상을 느낄 수 있다. nodal patterns과 비교해 보면 변위 형상을 입체적으로 이해할 수 있다.

Fig. 12는 C-F-F, Boron 로써 진동수는 등방성보다 2배 정도 적으나 mode shapes는 아주 유사하다.

(ii) Fig. 13은 S-S-S 직각 이등변 삼각형에 대하여 등방성 재료에 대한 mode shapes으로써, 오른쪽으로 휨량이 돌출이고 왼쪽으로 휨량이 들어간 부분이며 까만 부분이 경사가 급한 모양이다. Fig. 7의 nodal patterns과 비교해 보면 변형형상을 시각적으로 더 잘 이해할 수 있다.

(iii) Fig. 14은 등방성 C-C-C 직각 이등변 삼각형에 대하여 mode shapes으로써 Fig. 13의 S-S-S와 거의 유사하나, 3면을 따라 완전히 고정 되었으므로 3변의 근처를 따라 약 2mm 정도 변형되지

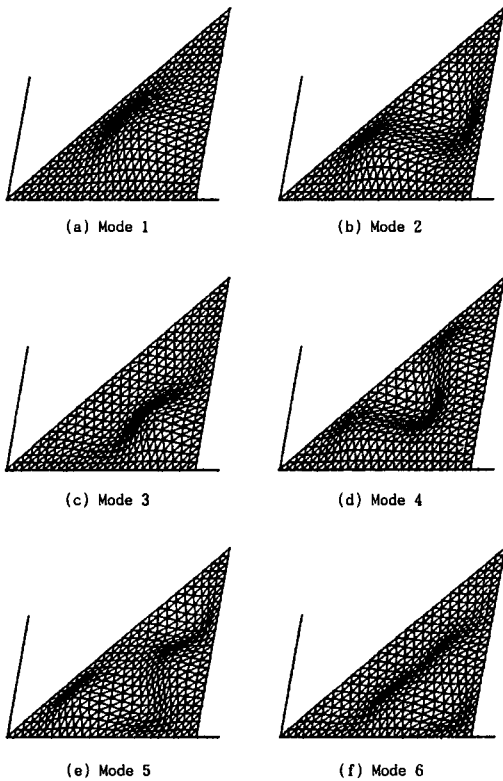


Fig. 14 Mode shapes for isotropic C-C-C isosceles right triangular plates with mode 1~6 (axis rotating angle : $X=24^\circ$, $Y=-24^\circ$, $Z=0^\circ$, Nonscale of deflection)

않은 고정된 효과를 볼 수 있다.

4. 결 론

기하학적 경계 조건만을 만족하는 단순한 급수 함수 (simplified series functions)와 Rayleigh-Ritz Method를 사용하여 다양한 경계조건을 가지는 등방성 및 직교이방성 복합재료 직각 삼각형에 대하여 무차원 고유 진동수, nodal patterns, mode shapes과 같은 진동 특성 변화를 조사하여, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 등방성 및 직교이방성 복합재료 삼각형판의 고유 진동 특성 예측에 기하학적 경계조건만을 만족하는 단순 함수와 Rayleigh-Ritz Method 적용이 유용하며, 삼각형 판의 변위형상을 기하학적 경계조건만을 만족하는 단순한 급수 함수 (simplified series functions)로써도 정확히 표현할 수 있다.

(2) 단순한 형태의 급수함수로써 판의 변위형상을 표현할 수 있으므로, 계산시간을 줄일 수 있으며, 이에 따라 급수함수로 표현 가능한 임의의 형상에 대해서도 용이하게 확장하여 적용될 수 있는 가능성을 제시했다.

(3) 본 연구방법 결과로 고유진동수는 유용한 참고문헌들에 잘 일치했으며, 20항 이상에서 충분히 잘 수렴 된다.

(4) 복합재료의 진동특성은 경계조건, 재료물성계수 및 형상비에 따라 복합적으로 변하므로 등방성에 비하여 쉽게 예측할 수 없다. 단지 형상비 $1/\alpha$ 의 증가는 고유진동수를 크게 증가시키고, E_1/E_2 는 크게 G/E_2 는 약간 ν_{12} 는 미소하게 영향을 준다.

(5) nodal patterns와 mode shapes는 유용한 문헌에 잘 일치했으며, 재료 물성치 변화에 대하여 진동수의 변화는 크나 nodal patterns와 mode shapes의 변화는 적으며, 형상비 α 의 변화는 진동수, nodal patterns와 mode shapes 모두 크게 영향을 준다.

후 기

본 연구는 1991년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 깊은 감사사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Leissa, A.W., 1969, "Vibration of Plates," NASA, SP-160
- (2) Mirza, S. and Bijlani, M., 1983, "Vibration of Triangular Plates," AIAA J., Vol.21, No.10, pp. 1472~1474.
- (3) Gorman, D.J., 1986, "Free Vibration Analysis of Right Triangular Plates With Combination of Clamped-Simply Supported Boundary Conditions," J. Sound & Vibration, Vol.106, No.3, pp. 419~431.
- (4) Christensen, R.M., 1963, "Vibration of a 45 Right Triangular Cantilever Plate by a Gridwork Method," AIAA J., Vol.1, pp.1790~1795.
- (5) Kim, C.S. and Dickinson, S.M., 1989, "The Free Flexural Vibration of Right Triangular Isotropic

- and Orthotropic Plates," J. Sound & Vibration, Vol.141, No.2, pp.291~311.
- (6) Bhat,R.B., 1987, "Flexural Vibration of Polygonal Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Variables," J. Sound & Vibration, Vol.114, No.1, pp.65~71.
- (7) Lam,K.Y., Liew,K.M. and Chow,S.T., 1990, "Free Vibration Analysis of Isotropic and Orthotropic Triangular Plates," Int. J. Mech. Sci., Vol. 32, No.5, pp. 455~464.
- (8) Gustafson,P.N., Stokey,W.F. and Zorowski,C. F., 1953, "An Experimental Study of Natural Vibration of Cantilevered Triangular Plates," J. Aerospace Sci., Vol. 20, pp. 331~337.
- (9) Garbow, B.S., Boyle, J.M., Dongarra,J.J. and Moler, C.B., 1977, "Lecture Notes in Computer Science," Springer-Verlag, Berlin.