

(論 文)

## 유한해석법을 이용한 조합 내열부품의 1차원 삭마 및 숯층 형성 해석

함희철\* · 배주찬\* · 이태호\* · 전광민\*\* · 이진호\*\*

(1991년 10월 18일 접수)

### Numerical Analysis of 1-D Ablation and Charring of a Composite Heat Insulator Using Finite Analytic Method

H.C. Hahm, J.C. Bae, T.H. Lee, K.M. Chun and J. Lee

**Key Words :** Ablation(삭마), Char(숯), Composite Heat Insulator(조합 내열부품), Finite Analytic Method(유한해석법)

#### Abstract

The objectives of this study are to analyse the thermal response behavior occurring in the charring ablative material more realistically by considering ablation and char phenomena occurring in several material layers, and to increase the reliability of thermal analysis by being able to get stable solutions through using the finite analytic method. A program has been developed to predict the temperature distribution, ablation thickness, char thickness, ablation velocity and char velocity by solving non-linear one-dimensional heat conduction equation. Results of calculation were compared with results of published papers. From this comparison this program was proved to be a very good tool for thermal design and analysis of charring ablative materials used in the rocket propulsion system.

#### 기 호 설 명

<p><math>A</math> : 면적</p> <p><math>A, B, C, D</math> : 유한 해석식 (finite analytic equation) 과 tridiagonal matrix에 관계된 계수</p> <p><math>c</math> : 비열</p> <p><math>\bar{c}</math> : 검사체적 내부 격자점에서의 비열</p> <p><math>F, G</math> : 유한해석식에 관계된 함수</p> <p><math>H_{ab}^*</math> : 유효삭마열</p> <p><math>H_c^*</math> : 유효숯열</p> <p><math>h</math> : 열전달 계수</p> <p><math>k</math> : 열전도도</p> <p><math>\bar{k}</math> : 검사체적 내부 격자점에서의 열전도도</p>	<p><math>q_0</math> : 벽에서의 전달 열량</p> <p><math>S</math> : 삭마량</p> <p><math>\bar{S}</math> : 평면, 원통, 구에 따른 상수</p> <p><math>\dot{S}_{ab}</math> : 삭마속도</p> <p><math>\dot{S}_c</math> : 숯 형성 속도</p> <p><math>T</math> : 온도</p> <p><math>T_{ab}</math> : 삭마온도</p> <p><math>T_\infty</math> : 주위온도</p> <p><math>\bar{T}</math> : 검사체적 내부 격자점에서의 온도</p> <p><math>t</math> : 시간</p> <p><math>t_m</math> : 삭마가 일어나는 순간까지 경과된 시간</p> <p><math>t_0</math> : 초기시간</p>
--	---

\*정회원, 국방과학연구소

\*\*정회원, 연세대학교 기계공학과

$V$  : 삭마속도,  $= \frac{dS}{dt}$

$x$	: 거리
$\alpha$	: 열확산 계수
$\bar{\alpha}$	: $\frac{\bar{k}}{\bar{\rho} \bar{c}} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$
$\epsilon$	: 발산율
$\epsilon$	: 수렴한계
$\tau$	: 무차원 시간, $= \frac{t-t_0}{\Delta t}$
$\xi$	: 무차원 거리, $= \frac{x-x_w}{\Delta x}$
$\lambda$	: $h + \epsilon \sigma (T_\infty^2 + T^2) (T_\infty + T)$
$\rho$	: 밀도
$\rho_{ab}$	: 삭마가 일어날 때의 밀도
$\rho_c$	: 숯이 형성될 때의 밀도
$\bar{\rho}$	: 점사체적 내부 격자점에서의 밀도
$\sigma$	: Stefan-Boltzmann 상수
$\omega$	: $\frac{\bar{k}}{x_E - x_W}$
$\Theta, \Phi, \Psi$	: 유한해석식에 관계된 함수
$\Delta x$	: 요소길이
$\Delta t$	: 시간 간격

## 1. 서 론

로켓 추진기관에서 고체 추진체가 연소될 때 온도는 3000°C 이상 오르고 압력도 100기압 이상에 다다른다. 거의 대부분의 일반적인 구조재료를 가지고는 이러한 극한 조건을 견디지 못하므로 삭마성 내열재를 사용하여야 한다. 극한 가열조건하에서 생성된 열을 흡수하는 방법은 재료 표면의 일부분이 녹거나 증발되도록 하는 것이다. 이 현상을 削摩(ablation)라 하며, 가열된 재료 내부에서 화학반응이 일어나면서 높은 압력과 높은 전단력 또는 고속입자의 충격을 받을때 표면에서 삭마가 일어나게 된다. 이렇게 삭마가 일어남으로써 재료 내부의 온도상승을 억제시킬 뿐만 아니라 전체 재료가 모두 높은 온도로 올라가지 않게되며 단지 얇은 표면 층만이 매우 높은 온도로 올라가게 된다. 대부분의 삭마성 내열재는 삭마가 발생되기 전에 원재료(virgin material)가 숯(char)으로 변하여 어느 정도 찻층(char layer)을 형성한 후 숯 표면에서 삭마가 진행됨에 따라 점차 숯층도 내부로 진행하게 된다. 이 다공성인 숯은 단열(thermal insulation)역할을 하게 되며 원재료가 숯으로 변하면서 방출되는 분해개스의 흐름에 의해서도 냉각이 일어

난다.

현재까지의 열반응 현상에 대한 연구를 살펴보면,

Landau<sup>(1)</sup>, 그리고 Sunderland와 Grosh<sup>(2)</sup>는 유한차분법을 적용하여 일정 열유입 또는 대류 경계조건을 갖는 1차원 반무한 물체의 삭마속도를 구하였고, Goodman<sup>(3)</sup>과 Altman<sup>(4)</sup>은 열평형적분법(heat balance integral method)을 이용하여 Landau<sup>(1)</sup>의 이상화된 삭마문제를 취급하였다. 그후 Zien<sup>(5)</sup>은  $\theta$ -모우멘트 적분법( $\theta$ -moment integral method)을 이용하여 Landau<sup>(1)</sup>의 이상화된 삭마모델을 기초로 시간에 따라 변하는 두가지 형태의 특정한 열유입 경계조건, 즉  $q_0 \sim t^m$ 과  $q_0 \sim e^t$ 을 갖는 순간적인 1차원 삭마문제의 근사해를 구하여 열평형적분법에 의한 해와 비교하였다. Chung<sup>(6)</sup> 등은 시간에 따라 변하는 열유입 경계조건을 갖는 1차원 삭마문제에 기존의 열평형적분법, Zien의  $\theta$ -모우멘트 적분법, 그리고 수치적인 유한차분법을 적용하여 그 결과들을 비교하였다. 여기서 열유입 경계조건은 세가지 경우, 즉  $q_0 = t^2$ ,  $q_0 = \exp(t)$ ,  $q_0 = 100(10+t)$ 를 취급하였다. Chung과 Hsiao<sup>(7)</sup>는 참고문헌 6의 분석을 유한 영역으로 확장하였다. 즉, 앞쪽 표면은 시간에 따라 변하는 열유입 조건이고 나머지는 단열조건인 유한 평판의 1차원 삭마 열전달문제를 참고문헌 6에서와 같이 세가지 방법으로 풀어 비교하였으며, 열유입 조건은 네가지 경우, 즉  $q_0 = 20$ ,  $q_0 = 10t$ ,  $q_0 = t^2$ ,  $q_0 = \exp(t/100)$ 에 대하여 고려하였고, 각각에 대하여 삭마량과 삭마속도에 대한 수치결과를 제시하였다. Clever와 Denny<sup>(8)</sup>는 삭마와 숯이 동시에 발생하는 1차원 반무한 삭마성 내열재의 순간적이면서 준정상적인 반응에 대한 연구를 수행하였다. 여기서 원재료 및 충분히 숯이 형성된 재료의 삭마속도를 실험적으로 구하여 반 경험적으로 삭마에 의하여 재료 표면이 제거되는 현상을 해석하였다. Blackwell<sup>(9)</sup>은 Spalding의 exponential differencing 기법을 이용하여 이론해가 알려져 있는 정상상태 1차원 삭마문제를 수치해석하였으며, 실제 예로서 2개의 재료가 조합되어 한쪽면은 일정한 열유입 조건이고 나머지는 단열되어 있는 1차원 유한 평판의 수치결과를 제시하였다. Brogan<sup>(10)</sup>은 한쪽면은 일정한 열유입 조건이고 반대면은 단열조건인 1차원 유한 영역의 삭마 열전도 문제를 수치해석하였으며, Landau<sup>(1)</sup>의 수치결과와 비교하여 타당성을 입증하였다.

로켓 추진기관에 사용되는 삭마성 내열재의 열설계 및 해석을 위해서 지금까지 적용해 왔던 방법은 삭마량 및 슛두께를 예측하기 위하여 삭마에 의한 냉각효과를 무시하고 수치해석을 하거나 또는 선형적인 단순이론식을 사용하는 것이었다. 그러나 이러한 근사적인 방법으로는 복잡한 실제상황을 해석하기 어렵고, 열설계 조건이 극심한 경우에는 예측결과와 시험결과가 크게 다르다.

해외 선진국에서는 삭마성 내열재의 내부에서 일어나는 열화학반응을 고려하여 수치해석을 수행하기도 하지만, 계산시간이 너무 오래 걸리고, 내열재료 및 제작 공법이 다양하여 사용하는 물성치들도 이에 따라 크게 변할 뿐 아니라 프로그램을 사용하기 위한 전처리과정이 매우 복잡하여 현재의 본 연구팀에서 적용하기에는 비능률적이다. 한편, 이에 대한 대체기법으로써 삭마현상만을 고려하여 수치해석하는 방법도 있으나 안정한 해를 얻기가 어렵고, 특히 삭마와 슛이 여러재료에서 동시에 발생하는 것을 고려하지 못하고 있는 실정이다<sup>(1~10)</sup>

본 연구는 삭마성 내열재가 여러개 조합되어 있는 경우 삭마 및 슛이 여러 재료에서 동시에 발생하는 것을 고려함으로써 열반응 현상을 보다 실제에 가깝게 해석하고, 유한해석법으로 수치계산을 하여 안정한 해를 얻음으로써 열설계를 능률적으로 수행하고 열해석의 신뢰도를 높이기 위해서 수행되었다.

삭마성 내열재의 내부 열반응은 처너층(virgin layer), 분해층(decomposition layer), 슛층(char layer), 경계층(boundary layer) 등 네 영역으로 구분할 수 있으며, 이것들이 서로 연관되어 매우 복잡한 현상들이 발생하므로 이를 엄밀하게 해석하는 것은 거의 불가능하다. 본 연구에서는 이러한 열반응 과정을 유효삭마열 및 유효삭마온도와 유효스icc열 및 유효스icc온도 개념, 즉 일정한 열량이 공급되어 내열재료가 어느 온도에 도달하면 그때부터 삭마 및 슛이 발생된다고 보고 상변화 현상을 해석하였다. 여기서 유효삭마열 및 유효삭마온도와 유효스icc열 및 유효스icc온도는 실험적으로 구한다<sup>(12~14)</sup>

상변화 문제는 비선형성이 심하고, 상변화 경계면에서 온도구배가 급격히 변하며, 삭마에 의하여 표면이 후퇴됨으로 인하여 안정한 해를 얻기가 대단히 어렵다. 이와 관련된 지금까지의 발표 논문들은 안정한 해를 얻기 위하여 이동표면기준 좌표계 설정기법<sup>(1~9)</sup>을 적용하고 이 부위의 격자를 조밀하

게 구성하여 왔다. 그러나 이 방법은 삭마와 슛이 여러 재료에서 동시에 발생하는 문제에 대해서는 적합하지 못하며, 이에 대한 연구실적도 전무하다시피하다.

본 연구는 삭마에 의한 표면후퇴 현상을 해석하기 위하여 Brogan<sup>(10)</sup>이 제시한 front node dropping기법을 적용하여 여러개의 상이한 재료로 구성된 조합 내열 부품에서 삭마와 슛이 동시에 발생하는 경우에 대한 내부 열반응 예측도 가능하게 하였다. 이 수치기법은 해석하고자 하는 부분에 대한 격자생성(mesh generation)을 수행하여 각 격자점의 좌표를 고정된 후, 삭마에 의하여 표면이 후퇴될 때 첫번째 격자점은 두번째 격자점과 일치될 때까지 존재하다가 제거되고, 두번째 격자점도 세번째 격자점과 일치될 때까지 존재하다가 제거된다. 이때 나머지 격자점의 위치는 항상 일정하게 고정되며 삭마가 정지될 때까지 이 과정이 계속된다. 또한 본 연구분야에 수치해석 기법으로 유한해석법(FAM: finite analytic method)을 국내의 최초로 적용하여 비선형성이 심한 것을 효과적으로 처리하므로써 안정한 해를 얻을 수 있었다. 유한해석법은 1981년 Chen<sup>(11)</sup>이 제안한 기법으로, 국소 격자계에 대하여 선형화된 지배 방정식의 엄밀해를 구하여 전체 문제 영역에 확장하는 방법이다. 이 방법은 수치 계산식의 유도과정이 매우 복잡하기는 하나, 그 결과가 정확하고 안정한 해를 얻을 수 있어서 점차 적용 사례가 증가하고 있으며 본 문제의 수치해석에 매우 적합한 기법으로 판단된다.

수치계산 결과의 타당성을 입증하기 위하여 삭마성 내열재가 1개 존재하는 경우 이 내열재의 삭마현상만을 고려한 Chung(1983)<sup>(7)</sup>, Blackwell(1988)<sup>(9)</sup>등의 해석 결과들과 비교 검토하였으며, 여러 재료에서 삭마와 슛이 동시에 발생하는 경우에 대해서는 비교자료를 구할 수 없어서 본 연구소에서 얻은 로켓 추진기관 시험결과와 비교 검토하였으나 본 논문에는 실지 못하였다.

## 2. 이 론

### 2.1 지배 방정식

비정상 열전도에 대한 비선형 1차원 지배 방정식은 heat source 또는 heat sink가 없는 경우 다음과 같이 표시된다.

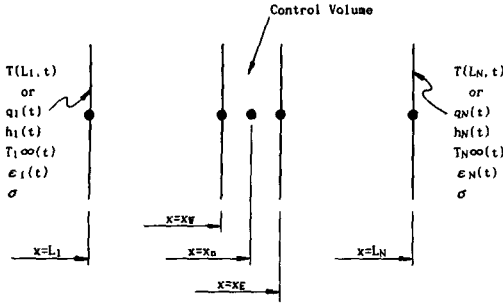


Fig. 1 Schematic of control volume and boundary conditions

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} [kA \frac{\partial T}{\partial x}] \quad (1)$$

위의 지배 방정식을 유한해석식으로 전개하기 위하여 다음과 같이 초기 및 경계조건을 정의한다.

Fig. 1에서 보는 바와같이 재료 내부에 3개의 격자점으로 구성된 하나의 검사체적에 대하여 정의하면 초기 조건은  $t=t_0$ 에서

$$T(x, t_0) = g_0'(x) = p' + q'x + r'x^2 \quad (2a)$$

와 같이 2차식으로 가정하고, 경계조건은  $x=x_w$ 에서

$$T(x_w, t) = g_w'(t) = a_w' + b_w't \quad (2b)$$

와 같이 1차식으로 가정하고,  $x=x_E$ 에서도

$$T(x_E, t) = g_E'(t) = a_E' + b_E't \quad (2c)$$

와 같이 1차식으로 가정한다.

그리고 처음 격자점과 마지막 격자점에 대하여 정의하면 경계조건은  $x=L_1$ 에서 표면온도 경계조건일 경우

$$T(L_1, t) = T_{L_1}(t) \quad (3a)$$

와 같이 표시되며, 열유입과 대류 및 복사열전달 경계 조건일 경우

$$\begin{aligned} q_1(t) + h_1(t)[T_{1\infty}(t) - T(L_1, t)] \\ + \epsilon_1 \sigma [T_{1\infty}^4(t) - T^4(L_1, t)] \\ = -k(T) \frac{\partial T}{\partial x}(L_1, t) \end{aligned} \quad (3b)$$

와 같이 표시된다. 또한  $x=L_N$ 에서 표면온도 경계 조건일 경우

$$T(L_N, t) = T_{LN}(t) \quad (4a)$$

와 같이 표시되며, 열유입과 대류 및 복사열전달

경계 조건일 경우

$$\begin{aligned} -[q_N(t) + h_N(t)\{T_{N\infty}(t) - T(L_N, t)\} \\ + \epsilon_N \sigma \{T_{N\infty}^4(t) - T^4(L_N, t)\}] \\ = -k(T) \frac{\partial T}{\partial x}(L_N, t) \end{aligned} \quad (4b)$$

와 같이 표시된다.

여기에서 열전달계수  $h(t)$ 는 로켓 추진기관의 연소조건과 기하학적 조건에 따라 외부식으로 부터 계산되어 상수로 주어진다.

### 2.2 수치해석

본 연구에서 사용하는 수치적기법은 Brogan<sup>(10)</sup>의 front node dropping 기법을 사용한 유한해석법에 기초한다. 여기서는 지배 방정식에 대한 유한해석식을 전개 하는데, 식(1) 및 (2a)~(2c)를 무차원화하고 finite Fourier transform을 적용한 후 구하고자 하는 계산시간에서의 식으로 전개한다. 그리고 이 식을 사용하여 경계조건에 대한 유한해석식을 유도하고, 삭마속도 및 숲 형성속도에 대한 식을 유도한다.

여기에서 유도한 모든 식들은 직접 유도한 식들이며, 지면 관계상 결과식들만을 소개한다.

- (1) 지배 방정식에 대한 유한해석식
- (가) 단순 내열부품 내부 격자점  $n$ 에 대한 식

$$A_n T_w + B_n T_n + C_n T_E = D_n, \quad 2 \leq n \leq N+1 \quad (5)$$

여기서

$$A_n = -\Phi(\xi_n) \quad (6a)$$

$$B_n = 1 \quad (6b)$$

$$C_n = -\Psi(\xi_n) \quad (6c)$$

$$D_n = \Theta(\xi_n) \quad (6d)$$

그리고

$$\Phi(\xi) = 1 - \xi - \frac{\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi}{6\bar{a}_n} + F(\xi) + G(\xi) \quad (7a)$$

$$\Psi(\xi) = \xi + \frac{\xi^3 - \xi}{6\bar{a}_n} - F(\xi) + G(\xi) \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\xi) = & \left( \frac{\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi}{6\bar{a}_n} - F(\xi) - G(\xi) \right) T_{0w} \\ & + \left( -\frac{\xi^3 - \xi}{6\bar{a}_n} + F(\xi) - G(\xi) \right) T_{0E} \\ & - \frac{\xi^2 - \xi}{2} \bar{S}_n - 2\bar{a}_n(2r + \bar{S}_n) \cdot G(\xi) \end{aligned} \quad (7c)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{4\bar{a}_n\pi^3} \sum \frac{\sin 2n\pi\xi}{n^3} e^{(-4a_n\eta^2\pi^2)} \quad (7d)$$

$$G(\xi) = \frac{2}{\bar{a}_n\pi^3} \sum \frac{\sin(2n-1)\pi\xi}{(2n-1)^3} e^{(-a_n(2n-1)^2\pi^2)} \quad (7e)$$

$$\bar{a}_n = \frac{\bar{k}_n}{\bar{\rho}_n \bar{c}_n} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (7f)$$

$$\text{무차원 변수 } \xi = \frac{x-x_w}{\Delta x}, \quad \tau = \frac{t-t_0}{\Delta t} \quad (7g)$$

$$r = \frac{1}{\xi_n} T_{0w} - \frac{1}{\xi_n(1-\xi_n)} T_{0w} + \frac{1}{1-\xi_n} T_{0E} \quad (7h)$$

$\bar{S}_n$  = 평면, 원통형, 구형에 따라 변하는 상수 (7i)

여기서 하첨자  $w, n, E$ 는 각각 무차원변수  $\xi=0, \xi_n, 1$ 에서의 값을 나타내며, 온도  $T$ 에 붙은 하첨자  $0$ 는 무차원변수  $\tau=0$ 에서의 값을 나타내며, 하첨자  $+$ 가 없는 것은  $\tau=1$ 에서의 값을 나타낸다.

(나) 조합 내열부품의 접촉면 또는 동일재료 내부의 슛층성면에 위치한 격자점  $m$ 에 대한 식

$$A_m T_{m-1} + B_m T_m + C_m T_{m+1} = D_m \quad (8)$$

여기서

$$A_m = \omega^- \frac{\partial \Phi_{m-1}(1)}{\Phi_{m-1}(\xi_{m-1})} \quad (9a)$$

$$B_m = \omega^- \left( \partial \Psi_{m-1}(1) - \partial \Phi_{m-1}(1) \frac{\Psi_{m-1}(\xi_{m-1})}{\Phi_{m-1}(\xi_{m-1})} \right) - \omega^+ \left( \partial \Phi_{m+1}(0) - \partial \Psi_{m+1}(0) \frac{\Phi_{m+1}(\xi_{m+1})}{\Psi_{m+1}(\xi_{m+1})} \right) \quad (9b)$$

$$C_m = -\omega^+ \frac{\partial \Psi_{m+1}(0)}{\Psi_{m+1}(\xi_{m+1})} \quad (9c)$$

$$D_m = \omega^+ \left( \partial \Theta_{m+1}(0) - \partial \Psi_{m+1}(0) \frac{\Theta_{m+1}(\xi_{m+1})}{\Psi_{m+1}(\xi_{m+1})} \right) - \omega^- \left( \partial \Theta_{m-1}(1) - \partial \Phi_{m-1}(1) \frac{\Theta_{m-1}(\xi_{m-1})}{\Phi_{m-1}(\xi_{m-1})} \right) \quad (9d)$$

$$\omega^- = \frac{\bar{k}_{m-1}}{x_m - x_{m-2}}, \quad \omega^+ = \frac{\bar{k}_{m+1}}{x_{m+2} - x_m} \quad (9e)$$

(2) 경계조건에 대한 유한해석식

(가) 표면온도 경계조건에 대한 식

① 식(3a)에 대한 유한해석식

$$B_2 T_2 + C_2 T_3 = D_2 \quad (10)$$

여기서

$$B_2 = 1 \quad (11a)$$

$$C_2 = -\Psi(\xi_2) \quad (11b)$$

$$D_2 = \Theta(\xi_2) + \Phi(\xi_2) T_L \quad (11c)$$

② 식(4a)에 대한 유한해석식

$$A_{N-1} T_{N-2} + B_{N-1} T_{N-1} = D_{N-1} \quad (12)$$

여기서

$$A_{N-1} = -\Phi(\xi_{N-1}) \quad (13a)$$

$$B_{N-1} = 1 \quad (13b)$$

$$D_{N-1} = \Theta(\xi_{N-1}) + \Psi(\xi_{N-1}) T_{LN} \quad (13c)$$

(나) 열유입과 대류 및 복사열전달 경계조건에 대한 식

① 처음 격자점 1에 대한 유한해석식

$$B_1 T_1 + C_1 T_2 = D_1 \quad (14)$$

여기서

$$B_1 = \lambda_1 - \omega \cdot \left( \partial \Phi_2(0) - \partial \Psi_2(0) \frac{\Phi_2(\xi_2)}{\Psi_2(\xi_2)} \right) \quad (15a)$$

$$C_1 = -\omega \cdot \frac{\partial \Psi_2(0)}{\Psi_2(\xi_2)} \quad (15b)$$

$$D_1 = q_1 + \lambda_1 T_{1\infty} + \omega \cdot \left( \partial \Theta_2(0) - \partial \Psi_2(0) \frac{\Theta_2(\xi_2)}{\Psi_2(\xi_2)} \right) \quad (15c)$$

$$\lambda_1 = h_1 + \varepsilon_1 \sigma (T_{1\infty}^2 + T_1^2) (T_{1\infty} + T_1) \quad (15d)$$

$$\omega = \frac{\bar{k}_2}{x_3 - x_1} \quad (15e)$$

② 마지막 격자점  $N$ 에 대한 유한해석식

$$A_N T_{N-1} + B_N T_N = D_N \quad (16)$$

여기서

$$A_N = \omega \cdot \frac{\partial \Phi_{N-1}(1)}{\Phi_{N-1}(\xi_{N-1})} \quad (17a)$$

$$B_N = \lambda_N + \omega \cdot \left( \partial \Psi_{N-1}(1) - \partial \Phi_{N-1} \frac{\Psi_{N-1}(\xi_{N-1})}{\Phi_{N-1}(\xi_{N-1})} \right) \quad (17b)$$

$$D_N = q_N + \lambda_N T_{N\infty} - \omega \cdot \left( \partial \Theta_{N-1}(1) - \partial \Phi_{N-1} \frac{\Theta_{N-1}(\xi_{N-1})}{\Phi_{N-1}(\xi_{N-1})} \right) \quad (17c)$$

$$\lambda_N = h_N + \varepsilon_N \sigma (T_{N\infty}^2 + T_N^2) (T_{N\infty} + T_N) \quad (17d)$$

$$\omega = \frac{\bar{k}_{N-1}}{x_N - x_{N-2}} \quad (17e)$$

(3) 슛 형성속도 및 식마속도에 대한 유한해석식

(가) 슛 형성속도에 대한 식

① 처음 격자점 1에서 슛이 형성될 경우

$$\dot{S}_c = \frac{1}{\rho_c H_c^*} \left( D_1 - B_1 T_1 - C_1 T_2 \right) \quad (18)$$

여기서 유효스울  $H_c^*$ 는 처녀 상태의 내열부품이

숫으로 변하는데 필요한 열량이며<sup>(12-14)</sup>,  $B_1, C_1, D_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\omega$ 는 식 (15a) ~ (15e)와 동일하다.

② 조합 내열부품의 접촉면 또는 동일 재료 내부의 격자점  $m$ 에서 숫이 형성될 경우

$$\dot{S}_c = \frac{1}{\rho_c H_c^*} (D_m - A_m T_{m-1} - B_m T_m - C_m T_{m+1}) \quad (19)$$

여기서  $A_m, B_m, C_m, D_m, \omega^-, \omega^+$ 는 식 (9a) ~ (9e)와 동일하다.

(나) 삭마속도에 대한 식(격자점  $k$ )

$$\dot{S}_{ab} = \frac{1}{\rho_{ab} H_{ab}^*} (D_K - B_K T_K - C_K T_{K+1}) \quad (20)$$

여기서 유효삭마열  $H_{ab}^*$ 는 처녀 상태의 내열부품이 삭마되기까지 필요한 열량이며<sup>(12-14)</sup>,  $B_K, C_K, D_K, \lambda_K, \omega$ 는 식 (15a) ~ (15e)에서 1이  $K, 2$ 가  $K+1, 3$ 이  $K+2$  일 때와 동일하다.

(3) 수렴 및 안정성

매 시간단계마다 이전단계의 값들을 가지고 직접해를 구하는 외재적(explicit) 시간진행법은 프로그램의 작성이 용이한 장점이 있는 반면 안정한 수렴을 얻기 위해서 시간간격이 제한을 받기 때문에 해를 구하기 위해서는 상대적으로 많은 횟수의 반복계산을 실행하여야만 한다. 적절하지 못한 격자 배치나 지나치게 큰 시간 간격은 해의 안정성에 나쁜 영향을 끼치게 된다.

수치계산 해의 수렴판정은 다음과 같은 판별기준을 가지고 하였다. 즉, 현재의 반복 횟수  $j$ 에서 계산된 온도  $[T_n^{j+4}]$ 를  $[T_n^j]$ 라고 표시하면,

$$\left| \frac{T_n^{j+1} - T_n^j}{T_n^j} \right|_{\max} \leq \epsilon \quad (21)$$

### 3. 수치해석 결과 및 검토

삭마성 내열재가 1개 밖에 존재하지 않는 경우에 대한 수치해석 결과의 타당성을 검토하기 위해서 개발된 프로그램을 사용하여 기존논문과 동일한 조건으로 계산한 결과와 기존논문의 해석결과와 비교하였다. 그런데 기존 논문의 해석 결과가 수치상으로 나와 있지 않기 때문에 여기에서는 그림으로써 비교 검토하였다. 시간에 따른 온도분포와 삭마량

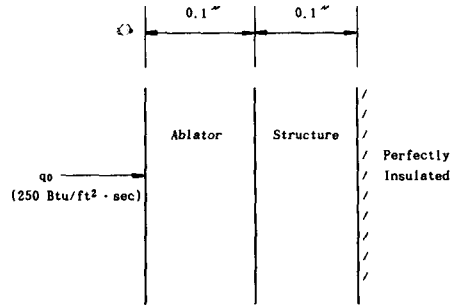


Fig. 2 Schematic of sample ablation problem

은 Blackwell<sup>(9)</sup>의 그림과 비교하였고, 시간에 따른 삭마량 및 삭마속도는 4가지의 열유입 경계조건에 대하여 Chung<sup>(7)</sup>의 그림과 비교 하였다.

Blackwell<sup>(9)</sup>의 경우 사용된 해석모델은 Fig. 2와 같으며 재료의 열적성질, 즉 열전도계수  $k$ , 밀도  $\rho$ , 비열  $C_p$ , 열확산계수  $\alpha$ , 유효삭마열  $H_{ab}^*$ , 삭마온도  $T_{ab}$ 는 각각 다음과 같다.

삭마성 내열재 (0.1 in)

- $k=0.000036 \text{ But/ft}^2\text{-sec-R}$ ,  $\rho=120 \text{ lbm/ft}^3$   
 $C_p=0.3 \text{ Btu/lbm-R}$ ,  $\alpha=1.0 \times 10^{-6} \text{ ft}^2/\text{sec}$   
 $H_{ab}^*=1000 \text{ Btu/lbm}$ ,  $T_{ab}=1500 \text{ R}$

● 구조재 (0.1 in)

- $k=0.025 \text{ Btu/ft}^2\text{-sec-R}$ ,  $\alpha=200 \text{ lbm/ft}^3$   
 $C_p=0.25 \text{ Btu/lbm-R}$ ,  $\alpha=5.0 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\text{sec}$

그리고 내열재는 15개의 요소로 나누었고, 첫번째 요소는 0.0005in로 하였으며, 구조재는 4개의 요소로 나누었다. 두 재료의 초기온도는 536R이며, 경계조건은 한쪽에서는 일정 열유입조건, 즉  $q_0=250 \text{ Btu/ft}^2\text{sec}$ 이고, 다른 한쪽은 단열조건이다.

본 연구에서는 삭마재를 2부분으로 분할하여 각각 50개, 30개의 요소로 나누었으며, 경계부분의 격자점들을 밀집되게 배치하여 해의 안정성 및 정확성을 기하도록 하였다. 구조재는 20개의 요소로 나누었다. 해의 수렴 여부를 판정하기 위한 식(21)의  $\epsilon$ 값은 0.001로 하였으며, 계산은 TriGem 386V 컴퓨터를 사용하였다. Fig. 3에 두 결과를 비교하여 나타내었다.

Fig 3에서 보아 알 수 있듯이 Blackwell<sup>(9)</sup>의 계산결과는 실선으로 본 연구결과는 점선으로 나타내었다. 삭마는 온도가 1500R이 되었을 때 발생하는데 시간에 따른 삭마량 계산결과가 두 경우 거의 일치하고 있으며, 온도분포도  $t=0.2$ 초, 1.0초에서

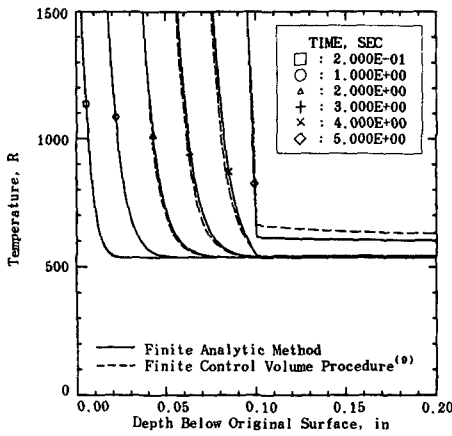


Fig. 3 Temperature profile in ablator and structure for various values of time

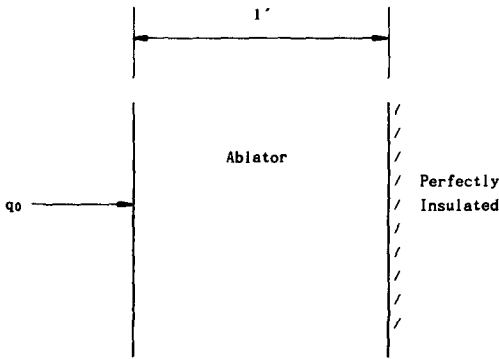


Fig. 4 Schematic of sample ablation problem

는 거의 일치하고 있고, 시간이 지남에 따라 약간의 차이를 보이고 있다. 그리고 논문의 계산결과와 본 연구결과가 거리에 따른 급격한 온도구배를 모두 잘 나타내고 있는데 이것은 본 연구에서 유한해석법을 사용하므로써 경계부분에서의 급격한 온도구배를 보다 잘 감지 할 수 있기 때문인 것으로 판단된다. 그리고 Blackwell<sup>(9)</sup>의 경우 최초 삭마발생 시간이 0.0151초로 나타나고 있고, 본 연구에서는 0.0146초로 나타나 거의 일치하고 있으며 3% 정도의 차이를 보이고 있다.

Chung<sup>(7)</sup>의 경우 사용된 해석모델은 Fig. 4와 같으며, 재료의 열적성질, 즉 열전도계수  $k$ , 밀도  $\rho$ , 비열  $C_p$ , 열확산계수  $\alpha$ , 유효삭마열  $H_{ab}^*$ , 삭마온도  $T_{ab}$ , 초기온도  $T_0$ 는 각각 다음과 같다.

$$k=0.1 \text{ Btu/ft}^2\text{-sec-}^\circ\text{F}, \rho=120 \text{ Lbm/ft}^3$$

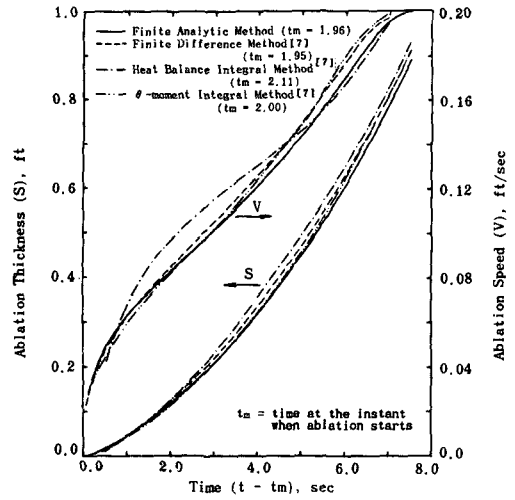


Fig. 5 Comparisons of ablation thickness and speed of various methods for  $q_0=20$

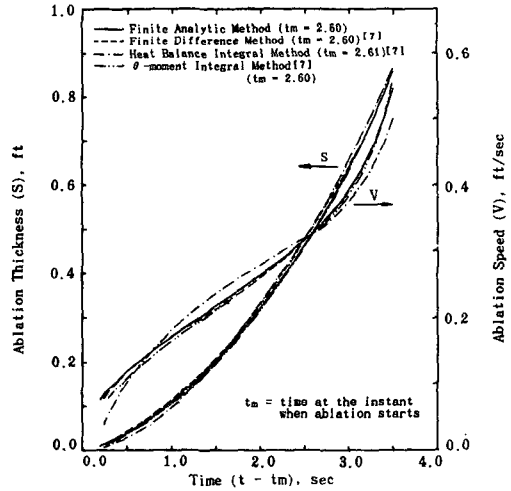


Fig. 6 Comparisons of ablation thickness and speed of various methods for  $q_0=10t$

$$C_p=0.008333\text{Btu/Lbm-}^\circ\text{F}, \alpha=0.1 \text{ ft}^2/\text{sec}$$

$$H_{ab}^*=0.8333\text{But/Lbm}, T_{ab}=100^\circ\text{F}, T_0=0^\circ\text{F}$$

경계조건은 한쪽에서는 일정 열유입 조건, 즉  $q_0 = 20, 10t, t^2, \exp(t/100)$ 의 네가지를 예로 사용하였고 다른 한쪽은 단열조건이다. 본 연구에서 사용한 조건도 위와 같으며 요소들의 수는 앞의 경우와 마찬가지로 내열재를 2부분으로 나누어 각각 50개, 30개의 요소로 하였으며  $\epsilon$ 값도 똑같이 0.001로 하였다.

Fig. 5~8에 chung<sup>(7)</sup>의 세가지 방법에 의한 계산

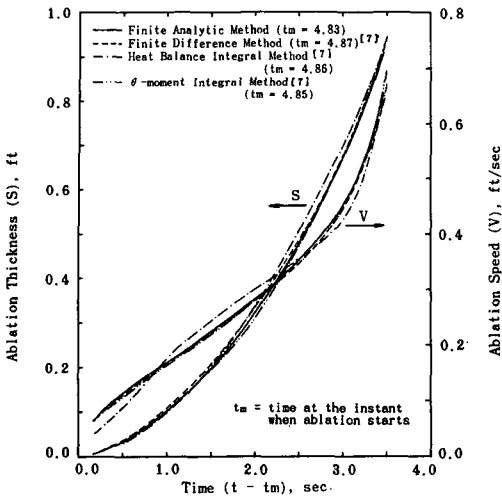


Fig. 7 Comparisons of ablation thickness and speed of various methods for  $q_0 = t^2$

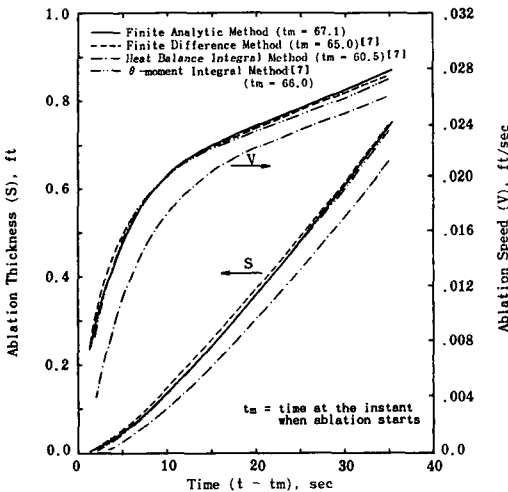


Fig. 8 Comparisons of ablation thickness and speed of various methods for  $q_0 = \exp(t/100)$

결과와 본 연구결과를 시간에 따른 삭마량과 삭마 속도로 비교하여 나타내었으며, 기록된 시간은 반응시간에서 최초 삭마 발생시간,  $t_m$ 을 제외한 값이다.

Fig. 5~8에서 볼 수 있듯이 본 연구결과를 실선으로 논문의 계산결과는 해석방법에 따라 유한차분법은 점선, 열평형 적분법은 일점쇄선,  $\theta$ -모우멘트 적분법의 계산결과는 이점쇄선으로 나타내었으며, 대체적으로 열평형 적분법을 제외하고 나머지 두 방법에 의한 논문의 계산결과와 본 연구결과가

거의 일치하고 있다. 최초 삭마 발생시간,  $t_m$ 은 거의 일치하고 있으며 3% 정도의 차이를 보이고 있다. 여기에서 삭마가 전 재료에 걸쳐 진행될 때까지의 결과는 논문의 그림과 유사하게 하기 위해 제시하지 않았는데 이에 대한 계산도 단지 시간만을 연장하여 똑같은 방법으로 수행하면 된다.

앞의 두 경우에서 SI단위를 사용하지 않은 것은 기존 논문과 단위를 일치시켜 계산결과를 쉽게 비교할 수 있도록 하기 위한 것이다.

### 4. 결 론

연구결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 유효삭마열 및 온도와 유효숫열 및 온도 개념을 사용하고, 삭마 및 숫층 형성에 의한 표면후퇴와 다상변화, 그리고 조합 내열부품에서의 다발적 숫층형성을 고려하여 삭마성 내열재의 내부 열반응에 대한 해석기법을 국내의 최초로 개발하였다.
- (2) 수치해석 방법으로 유한해석법을 사용하여 경계 부분에서의 급격한 온도구배를 잘 감지함으로써 정확하고 안정된 해를 얻었다.
- (3) 본 연구결과와 기존논문에서 발표된 해석결과를 비교 검토하여 볼 때 잘 일치하였다.

### 참고문헌

- (1) Landau, H.G., 1950, "Heat Conduction in a Melting Solid," Quarterly Applied Mathematics, Vol.8, No.1, pp.312~319.
- (2) Sunderland, J.E. and Grosh, R.J., 1961, "Transient Temperature in a Melting Solid," Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, Vol.83, pp.409~414.
- (3) Goodman, T.R., 1958, "The Heat Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase," Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, Vol.80, pp.335~342.
- (4) Altman, M., 1961, "Some Aspects of the Melting Solution for a Semi-Infinite Slab." Chemical Engineering Progress Symposium Series, Vol.57, pp.16~23.
- (5) Zien, T.F., 1978, "Integral Solution of Ablation Problems with Time-Dependent Heat Flux," AIAA-78~864.



- (6) Chung, B.T.F., Chang, T.Y., Hsiao, J.S. and Chang, C.I., 1983, "Heat Transfer with Ablation in a Half-Space Subjected to Time Variant Heat Fluxes," Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, Vol. 105, pp. 200~203.
- (7) Chung, B.T.F. and Hsiao, J.S., 1985, "Heat Transfer with Ablation in a Finite Slab Subjected to Time-Variant Heat Fluxes," AIAA Journal, Vol.23, No.1 also Jan. 1983, AIAA-83-0582.
- (8) Clever, R.M. and Denny, V.E., 1975, "Response of Charring Ablators to Severe Aerodynamic and Erosion Environments," Journal of Spacecraft, pp. 558~564.
- (9) Blackwell, B.F., 1988 "Numerical Prediction of 1-D Ablation Using a Finite Control Volume Procedure With exponential Differencing," AIAA-88-0085.
- (10) Brogan, J.J., 1965, "A Simple Numerical Solution for Heat Conduction in a Solid with a Receding Surface," Journal of Spacecraft, Vol.2, No.1, pp.112~113.
- (11) Chen, C.J. and Singh, K., 1981, "Finite Analytic Method-Finite Analytic Numerical Solution of Two-Dimensional Navier-Stokes Equations in Primitive Variables," Energy Division and Iowa Institute of Hydraulic Research, The Univ. of Iowa, Iowa, Vol.3.
- (12) Schaefer, J.W., Dahm, T.J., Rodriguez, D.A., Reese, J. J. and Wool, M.R., 1968, "Studies of Ablative Material Performance for Solid Rocket Nozzle Applications," NASA CR-72429, Aeronautics Report No. 68-30.
- (13) Stephen, W.A., Frakes, T.E. and O'Hara, T.V., 1974, "High Chamber Pressure Blast Tube and Nozzle Material Evaluation," AD 780531, Air Force Propulsion Laboratory, Vol. I.
- (14) 국방과학연구소, 1981, "추진기관 열해석," Tm 81-01.