

〈論 文〉

## 접착제층의 전단과 법선변형 효과를 고려한 적층판의 진동감쇠특성 연구

김재호\* · 박태학\*\*

(1991년 12월 24일 접수)

### Analytical and Experimental Study on the Damping of Vibrating Layered Plates Including the Effects of Shear and Thickness Deformation of the Adhesive Layer

Chae-Ho Kim and Tae-Hak Park

**Key Words :** Viscoelastic Layer(점탄성층), Cylindrical Bending(원통굽힘), Base Plate(모재), Constraining Plate(구속재), Steady State(정상상태), Shear Deformation(전단변형), Normal Deformation(법선변형), Damping Effect(감쇠효과), Layered Plate(적층판), Stepwise(단계별)

#### Abstract

This paper investigates the vibrational damping characteristics of laminated plates composed of elastic, viscoelastic and elastic layers by theoretical and experimental methods. Laminated plates are in cylindrical bending and visco-elastic adhesive layer is assumed as the visco-elastic spring which takes damping effect through both shear and normal deformations. Governing equations of laminated plates are derived in the form of simultaneous first order differential equations, which account for the longitudinal displacements, rotary inertia and shear deformations of elastic base plate and elastic constraining plate. The numerical calculations of the equations are illustrated by the applications to the cantilever beam in transverse vibration. The results of the solutions agree well with the experimental measurements in general. The damping effects due to the shear and thickness deformations in the adhesives are analyzed and it is shown that for thicker adhesives, the damping effect due to thickness deformation becomes significant and for thinner adhesives, due to shear deformation.

#### 1. 서 론

탄성 및 점탄성 재질로 구성된 적층판의 동특성 연구는 여러학자들에 의해 오래 전부터 수행되어 왔다. 이 분야의 주된 관심은 모재(base plate)에

접착제를 이용하여 구속재(constraining plate)을 붙이므로써 구조물의 공진진동수에서의 진동폭을 줄이는 것이다. 특히 무게와 형상이 중요한 설계요소가 되는 항공우주 산업분야에서 터어보 제트 및 로켓엔진을 장착하는 경우, 광범위한 진동수영역에 걸쳐서 기체가 가진되므로 이때 공진진동수영역에서의 계의 진동폭을 줄이기 위하여 3겹 적층판의 진동 감쇠 특성에 대한 연구가 진행되어 왔다.

\*정회원, 경북대학교 기계공학과

\*\*정회원, 경북대학교 기계공학과 대학원

1939년 William Swallow<sup>(1)</sup>가 constrained layer damper에 의해 구조물의 진동폭을 줄이려는 시도 이후, 1959년 Ross, Ungar 그리고 Kerwin, Jr.<sup>(2)</sup>는 탄성층은 Euler-Bernoulli 보처럼 변형하며, 접착제는 전단변형한다는 가정하에 보에 대한 4계 운동방정식을 유도했다. Whittier<sup>(3)</sup>는 전단강성(shear stiffness)이 높고 굽힘강성(bending stiffness)은 무시할 수 있는 spacer를 바깥층 사이에 설치함으로써 감쇠성능을 향상시킬 수 있다고 제시했다. DiTaranto<sup>(4)</sup>와 Mead 및 Markus<sup>(5)</sup>는 Ross, Ungar와 Kerwin, Jr.의 해석방법을 확장해서 보의 전단변형의 영향을 고려한 6계 운동방정식을 유도했다. Yan과 Dowell<sup>(6)</sup>은 모든 층의 길이방향 및 회전방향관성과 바깥층의 전단변형의 영향을 고려한 해석방법을 제시했다. Douglas와 Yang<sup>(7)</sup>은 탄성-점탄성-탄성재질로 이루어진 3층보를 대상으로 하여 접착제의 법선변형이 감쇠에 미치는 영향을 이론과 실험으로 조사하였으며, Miles와 Reinhall<sup>(8)</sup>은 접착제의 전단과 법선변형의 영향을 고려한 단순지지보의 진동해석을 위해서 Mead와 Markus 이론을 확장, 길이방향 관성효과를 포함시킨 6계 운동방정식을 유도했다. 그러나 회전관성(rotary inertia)의 영향은 모든 층에서 무시했으며 바깥층에서의 전단변형 역시 무시했다. Okazaki<sup>(9,10)</sup> 등은 구속재는 없고 점탄성층만을 피복시킨 곡선보(curved beams)와 원통형상의 곡판(cylindrically curved plate)에 대한 계의 감쇠특성을 여러가지의 경계 조건에 따라 이론과 실험을 통해 규명했다. Dewa와 Okada<sup>(11)</sup>는 보의 중앙에 점탄성층 및 구속재를 부분 피복한 계의 감쇠특성에 대해 연구한 바 있으며, Rao와 Croker<sup>(12)</sup>는 접착재로 접착기이음(lap joint)한 보의 횡진동을 규명함에 있어서 점탄성층은 Kelvin-Voigt 모형으로 가정하고, 모재 및 구속재는 순수 굽힘만을 받는다고 가정하여 이론과 실험을 수행한 바 있다.

본 연구에서는 탄성, 점탄성 및 탄성박판으로 이루어진 복합적층구조물의 진동특성을 해석함에 있어서 모재 및 구속재의 길이방향변위, 회전관성 그리고 전단변형의 영향과 접착제의 법선 및 전단변형의 영향을 고려한 계의 운동방정식을 연립 1계 미분방정식의 형태로 유도하고 수치계산<sup>(13)</sup> 결과를 실험과 비교하였다. 그리고 구속재와 접착제의 두께변화에 따라서 접착제의 법선 및 전단변형이 계의 감쇠특성에 미치는 영향을 고찰하였다.

## 2. 평판의 운동방정식

접착제와 박판들의 적층으로 형성된 Fig. 1과 같은 구조물의 동특성 해석을 함에 있어서 다음과 같은 가정을 한다.

- (1) 적층판은 각각 균일한 등방성재질로 구성되어 있다.
- (2) 점탄성인 접착제층은 평판요소들 사이에서 전단과 법선응력을 전달하는 선형 점탄성 스프링으로 간주한다.
- (3) 적층판은 cylindrical bending을 하고, 모재와 구속재의 미소요소에는 Fig. 2와 같이 bending moment, transverse shear 및 axial force가 각각 작용한다.

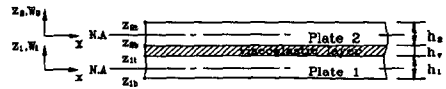


Fig. 1 Geometry and coordinate system for three layer laminated plate

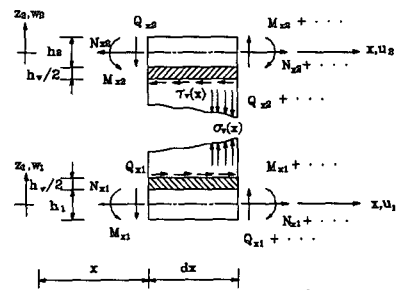


Fig. 2 Equilibrium element in cylindrical bending

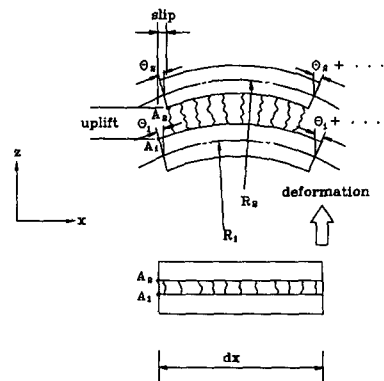


Fig. 3 Slip and uplift in adhesive layer

모재와 구속재 사이의 중간평면에 대한 법선평면은 변형 후에 법선평면으로 남아 있지 않으며 접착제층의 slip과 uplift로 인하여 각각의 박판요소들은 Fig. 3과 같이 변형 후 서로 다른 곡률반경을 갖는다. 그러나 접착제층과 박판 접촉부위에서의 변위와 응력에 대한 연속성은 유지된다.

2.1 접착제의 변위와 변형을 관계식

평판의 미소요소에 대한 기하학적 형상으로부터 plate 1의 상부표면에서의 x방향 변위  $d_{1t}$ 는 식 (1)과 같이 표시된다.

$$d_{1t} = u_1 + z_{1t}\theta_1 = u_1 + (h_1/2)\theta_1 \quad (1)$$

plate 2의 하부표면에서의 x방향 변위  $d_{2b}$ 는 식 (2)와 같이 표시된다.

$$d_{2b} = u_2 + z_{2b}\theta_2 = u_2 - (h_2/2)\theta_2 \quad (2)$$

여기서  $u_i, z_{it}, z_{ib}$  및  $\theta_i (i=1, 2)$ 는 평판  $i$ 의 x방향 변위, 각 탄성층들의 중립축에서의 z방향 상하 거리 및 시계방향 회전각이다. 접착제층의 하부표면의 x방향 변위는 plate 1의 상부 표면의 변위  $d_{1t}$ 와 같고, 상부 표면의 x방향 변위는 plate 2의 하부 표면의 변위  $d_{2b}$ 와 같다.

접착제층의 변형률과 변위사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\gamma_v(x) = \frac{d_{2b} - d_{1t}}{h_v} = \frac{1}{h_v}(u_2 + z_{2b}\theta_2 - u_1 - z_{1t}\theta_1) \quad (3)$$

$$\epsilon_v(x) = \epsilon_x(x) = \frac{w_2 - w_1}{h_v} \quad (4)$$

여기서  $c_v, \gamma_v(x)$ 와  $\epsilon_v(x)$ 는 접착제층의 두께, 전단변형을 및 법선(즉, 두께방향) 변형률을 각각 나타내며,  $w_i (i=1, 2)$ 는 평판  $i$ 의 z방향 변위이다.

2.2 접착제의 응력과 변형을 관계식

접착제층의 응력과 변형률의 관계는 다음과 같이 표시된다.

$$\tau_v(x) = G_v \gamma_v(x) \quad (5)$$

$$\sigma_v(x) = B_v \epsilon_v(x) \quad (6)$$

$\tau_v(x), \sigma_v(x)$  및  $G_v$ 는 접착제의 전단응력, 법선응력 및 전단계수이다. 방정식 (6)의 상수  $B_v$ 는 접착제의 응력과 변형률 관계식으로부터 다음과 같이 구해진다.<sup>(14)</sup>

$$\sigma_v(x) = \lambda_v(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G_v\epsilon_z \quad (7)$$

$$\lambda_v = \frac{\nu_v E_v}{(1 + \nu_v)(1 - 2\nu_v)} \quad (8)$$

여기서  $\epsilon_x, \epsilon_y$  및  $\epsilon_z$ 는 접착제의 변형을 성분이며  $\nu_x$ 는 포와손의 비이고  $\lambda_v$ 는 Lamé'상수이다. 이때 접착제는 등방성 재질이며  $|\epsilon_z| \gg (\epsilon_x, \epsilon_y)$ 라고 가정하면  $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ 이므로 방정식 (7) 및 (8)로부터 식 (9)로 표시된다.

$$B_v = \frac{(1 - \nu_v) E_v}{(1 + \nu_v)(1 - 2\nu_v)} = \frac{2(1 - \nu_v)}{1 - 2\nu_v} G_v \quad (9)$$

방정식 (3)과 (4)를 방정식 (5)와 (6)에 각각 대입하면 다음과 같이 표시된다.

$$\tau_v(x) = G_v/h_v(-u_1 + u_2 - z_{1t}\theta_1 + z_{2b}\theta_2) \quad (10)$$

$$\sigma_v(x) = B_v/h_v(w_2 - w_1) \quad (11)$$

2.3 평형 방정식

(1) plate 1의 평형 방정식

Fig. 4로 부터 x방향 힘들의 합은 다음과 같이 표시된다.

$$\sum F_x = \left(\frac{\partial N_{x1}}{\partial x}\right) dx + \tau_v dx - F'_{x1} dx = 0 \quad (12)$$

여기서  $N_{x1}$ 은 x방향의 힘,  $F'_{x1}$ 은 x와 y방향으로 각각 단위길이인 plate 1의 요소에 작용하는 x방향 관성력을 나타내며 식 (13)과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} F'_{x1} &= \int_{z_{1b}}^{z_{1t}} \ddot{d}_1 \rho_1 dz \cong \int_{z_{1b}}^{z_{1t}} \rho_1 (\ddot{u}_1 + z\ddot{\theta}_1) dz \\ &= \rho_1 \ddot{u}_1 (z_{1t} - z_{1b}) + \rho_1 \ddot{\theta}_1 \left(\frac{z_{1t}^2}{2} - \frac{z_{1b}^2}{2}\right) \\ &= \rho_1 h_1 \ddot{u}_1 + \rho_1 J_1 \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$h_1 = z_{1t} - z_{1b} \quad (14)$$

$$J_1 = \int_{z_{1b}}^{z_{1t}} z^2 dz = \frac{z_{1t}^3}{3} - \frac{z_{1b}^3}{3} \quad (15)$$

이며, 방정식 (12)로부터 다음과 같이 표시된다.

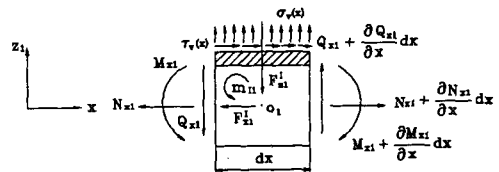


Fig. 4 Force equilibrium for differential volume of plate 1

$$\frac{\partial N_{x1}}{\partial x} = -\tau_v + F'_{x1} \quad (16)$$

방정식 (16)에 방정식 (10) 및 (13)을 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial N_{x1}}{\partial x} = \left( \frac{G_v}{h_v} u_1 + \rho_1 h_1 \dot{u}_1 \right) + \left( \frac{G_v}{h_v} z_{1t} \theta_1 + \rho_1 J_1 \dot{\theta}_1 \right) - \frac{G_v}{h_v} u_2 - \frac{G_v}{h_v} z_{2b} \theta_2 \quad (17)$$

z방향 힘들의 합은 다음과 같다.

$$\Sigma F_z = \frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} dx + \sigma_v dx - F'_{z1} dx = 0 \quad (18)$$

여기서  $F'_{z1}$ 은 x와 y방향으로 각각 단위길이인 plate 1의 요소에 작용하는 z방향 관성력을 나타내며 식 (19)와 같이 표현된다.

$$F'_{z1} = \rho_1 h_1 \dot{w}_1 \quad (19)$$

방정식 (18)로부터 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} &= -\sigma_v + \rho_1 h_1 \dot{w}_1 = -\frac{B_v}{h_v} (w_2 - w_1) + \rho_1 h_1 \dot{w}_1 \\ &= \left( \frac{B_v}{h_v} w_1 + \rho_1 h_1 \dot{w}_1 \right) - \frac{B_v}{h_v} w_2 \end{aligned} \quad (20)$$

모멘트 평형은 질량중심  $O_1$ 점에 대해 시계방향을 (+)로 부호를 잡으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma M_{O1} &= \frac{\partial M_{x1}}{\partial x} dx - Q_{x1} dx \\ &+ \tau_v dx \left( z_{1t} + \frac{h_v}{2} \right) - m'_1 dx = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $m'_1$ 은 x방향으로 단위길이에 대한 관성모멘트이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m'_1 &= \int_{z_{1b}}^{z_{1t}} \ddot{d}_1 \rho_1 z dz = \int_{z_{1b}}^{z_{1t}} \rho_1 (\ddot{u}_1 + \ddot{\theta}_{1z}) z dz \\ &= \rho_1 J_1 \ddot{u}_1 + \rho_1 I_1 \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,

$$I_1 = \int_{z_{1b}}^{z_{1t}} z^2 dz = \frac{z_{1t}^3}{3} - \frac{z_{1b}^3}{3} \quad (23)$$

이며, 방정식 (21)과 (22)로부터 정리하면 식 (24)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{x1}}{\partial x} &= Q_{x1} - \tau_v \left( z_{1t} + \frac{h_v}{2} \right) + m'_1 \\ &= Q_{x1} - \frac{G_v}{h_v} (-u_1 + u_2 - z_{1t} \theta_1 + z_{2b} \theta_2) \left( z_{1t} + \frac{h_v}{2} \right) \\ &+ \rho_1 J_1 \ddot{u}_1 + \rho_1 I_1 \ddot{\theta}_1 = \left( \frac{G_v}{h_v} \left( z_{1t} + \frac{h_v}{2} \right) u_1 + \rho_1 J_1 \ddot{u}_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left( \frac{G_v}{h_v} \left( z_{1t} + \frac{h_v}{2} \right) z_{1t} \theta_1 + \rho_1 I_1 \ddot{\theta}_1 \right) + Q_{x1} \\ &- \frac{G_v}{h_v} \left( z_{1t} + \frac{h_v}{2} \right) u_2 - \frac{G_v}{h_v} \left( z_{1t} + \frac{h_v}{2} \right) z_{2b} \theta_2 \end{aligned} \quad (24)$$

(2) plate 2의 평형 방정식

Fig. 5로부터 x방향 힘들의 합은 다음과 같다.

$$\Sigma F_x = \frac{\partial N_{x2}}{\partial X} dx - \tau_v dx - F'_{x2} dx \quad (25)$$

방정식 (25)로부터 대입 정리하면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{x2}}{\partial x} &= \tau_v + F'_{x2} = \frac{G_v}{h_v} (-u_1 + u_2 - z_{1t} \theta_1 \\ &+ z_{2b} \theta_2) + \rho_2 h_2 \ddot{u}_2 + \rho_2 J_2 \ddot{\theta}_2 \\ &= -\frac{G_v}{h_v} u_1 - \frac{G_v z_{1t}}{h_v} \theta_1 \\ &+ \left( \frac{G_v}{h_v} u_2 + \rho_2 h_2 \ddot{u}_2 \right) \\ &+ \left( \frac{G_v z_{2b}}{h_v} \theta_2 + \rho_2 J_2 \ddot{\theta}_2 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

z방향 힘들의 합은 다음과 같다.

$$\Sigma F_z = \frac{\partial Q_{x2}}{\partial x} dx - \sigma_v dx - F'_{z2} dx = 0 \quad (27)$$

방정식 (27)로부터 대입 정리하면 식 (28)과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{x2}}{\partial x} &= \sigma_v + \rho_2 h_2 \dot{w}_2 = \frac{B_v}{h_v} (w_2 - w_1) + \rho_2 h_2 \dot{w}_2 \\ &= -\frac{B_v}{h_v} w_1 + \left( \frac{B_v}{h_v} w_2 + \rho_2 h_2 \dot{w}_2 \right) \end{aligned} \quad (28)$$

질량중심  $O_2$ 에 대한 모멘트평형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma M_{O2} &= \frac{\partial M_{x2}}{\partial x} dx - Q_{x2} dx - \tau_v dx \left( z_{2b} - \frac{h_v}{2} \right) \\ &- m'_2 dx = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

방정식(29)로부터 정리하면 식 (30)과 같다.

$$\frac{\partial M_{x2}}{\partial x} = Q_{x2} + \tau_v \left( z_{2b} - \frac{h_v}{2} \right) + m'_2$$

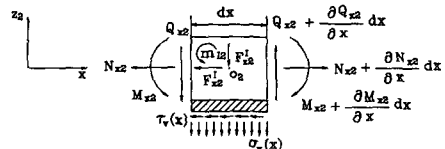


Fig. 5 Force equilibrium for differential volume of plate 2

$$\begin{aligned}
&= Q_{x2} + \frac{G_v}{h_v} (-u_1 + u_2 - z_{1t}\theta_1 \\
&+ z_{2b}\theta_2) (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) \\
&+ \rho_2 J_2 \ddot{u}_2 + \rho_2 I_2 \ddot{\theta}_2 \\
&= -\frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) u_1 - \frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) z_{1t}\theta_1 \\
&+ \left[ \frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) u_2 + \rho_2 J_2 \ddot{u}_2 \right] \\
&+ \left[ \frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) z_{2b}\theta_2 + \rho_2 I_2 \ddot{\theta}_2 \right] + Q_{x2} \quad (30)
\end{aligned}$$

(3) 평판의 응력과 변형률 관계<sup>(14,15,16)</sup>

평판  $i$  ( $i=1, 2$ )의  $x$ 방향 변형률은 식 (31)과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{N_{xi}}{C_i} \quad (31)$$

여기서 extensional stiffness  $C_i$ 는 다음과 같다.

$$C_i = \int B_{pi} dz_i \quad (32)$$

평판이 등방성 재질인 경우  $B_{pi} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}$ 가 된다.

$z$ 방향의 변형률은 다음과 같다.

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{Q_{xi}}{K_i} - \theta_i \quad (33)$$

여기서 횡전단 강성(transverse shear stiffness)  $K_i$ 는

$$K_i = \int G_i dz_i \quad (34)$$

이며,  $G_i$ 는 탄성층  $i$ 의 전단계수이다.

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} = \frac{M_{xi}}{D_i} \quad (35)$$

여기서  $D_i$ 는 flexural rigidity이며 다음과 같이 표시된다.

$$D_i = \int B_{pi} z_i^2 dz_i \quad (36)$$

(4) 운동 방정식

계가 조화함수 형태의 외력을 받아서 진동할 경우 계의 정상상태 해(steady state solution)를 다음과 같이 가정한다.

$$N_{xi} = N_i(x) e^{i\omega t} \quad (37)$$

$$u_i = u_i(x) e^{i\omega t} \quad (38)$$

$$M_{xi} = M_i(x) e^{i\omega t} \quad (39)$$

$$\theta_i = \theta_i(x) e^{i\omega t} \quad (40)$$

$$Q_{xi} = Q_i(x) e^{i\omega t} \quad (41)$$

$$W_i = W_i(x) e^{i\omega t} \quad (42)$$

식 (37) ~ (42)를 (17), (20), (24), (26), (28), (30), (31), (33) 및 (35)에 대입한 뒤 정리하면 다음과 표시된다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{x1}}{\partial x} &= \left( \frac{G_v}{h_v} - \rho_1 h_1 \omega^2 \right) u_1 + \left( \frac{G_v}{h_v} z_{1t} - \rho_1 J_1 \omega^2 \right) \theta_1 \\
&- \frac{G_v}{h_v} u_2 - \frac{G_v}{h_v} z_{2b} \theta_2 \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} = \left( \frac{B_v}{h_v} - \rho_1 h_1 \omega^2 \right) w_1 - \frac{B_v}{h_v} w_2 \quad (44)$$

$$\frac{\partial M_{x1}}{\partial x} = \left( \frac{G_v}{h_v} - \rho_1 h_1 \omega^2 \right) w_1 - \frac{B_v}{h_v} w_2 \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{x1}}{\partial x} &= \left[ \frac{G_v}{h_v} (z_{1t} + \frac{h_v}{2}) - \rho_1 J_1 \omega^2 \right] u_1 \\
&+ \left[ \frac{G_v}{h_v} (z_{1t} + \frac{h_v}{2}) z_{1t} - \rho_1 I_1 \omega^2 \right] \theta_1
\end{aligned}$$

$$+ Q_{x1} + \frac{G_v}{h_v} (z_{1t} + \frac{h_v}{2}) u_2 - \frac{G_v}{h_v} (u_{1t} + \frac{h_v}{2}) z_{2b} \theta_2 \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{x2}}{\partial x} &= -\frac{G_v}{h_v} u_1 - G_v \frac{z_{1t}}{h_v} \theta_1 + \left[ \frac{G_v}{h_v} - \rho_2 h_2 \omega^2 \right] u_2 \\
&+ \left[ G_v \frac{z_{2b}}{h_v} - \rho_2 J_2 \omega^2 \right] \theta_2 \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_{x2}}{\partial x} = -\frac{B_v}{h_v} w_1 + \left( \frac{B_v}{h_v} - \rho_2 h_2 \omega^2 \right) w_2 \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{x2}}{\partial x} &= -\frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) u_1 - \frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) z_{1t} \theta_1 \\
&+ \left( \frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) - \rho_2 J_2 \omega^2 \right) u_2
\end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{G_v}{h_v} (z_{2b} - \frac{h_v}{2}) z_{2b} - \rho_2 I_2 \omega^2 \right) \theta_2 + Q_{x2} \quad (48)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{N_{xi}}{C_i} \quad (49)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{Q_{xi}}{K_i} - \theta_i \quad (50)$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} = \frac{M_{xi}}{D_i}, \quad i=1, 2 \quad (51)$$

방정식 (43) ~ (51)을 매트릭스 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} \{y(x)\} = [A] \{y(x)\} \quad (52)$$

여기서,

$$y(x) = \{N_{x1} \ u_1 \ M_{x1} \ \theta_1 \ Q_{x1} \ w_1 \ N_{x2} \ u_2 \ M_{x2} \ \theta_2 \ Q_{x2} \ w_2\}^T \quad (53)$$

[A]는  $12 \times 12$  매트릭스이며 다음과 같다.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & G_v/h_v - \rho_1 h_1 \omega^2 & 0 & G_v z_{1t}/h_v - \rho_1 J_1 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & -G_v/h_v & 0 & -G_v z_{1t}/h_v & 0 & 0 \\ 1/C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_v(z_{1t}+h_v/2)/h_v & 0 & G_v(z_{1t}+h/2)z_{1t}/h_v - \rho_1 J_1 \omega^2 & 1 & 0 & 0 & -G_v(z_{1t}+h_v/2)/h_v & 0 & -G_v(z_{1t}+h_v/2)z_{2b}/h_v & 0 & 0 \\ -\rho_1 J_1 \omega^2 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1/D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_v/h_v - \rho_1 h_1 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_v/h_v \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1/K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_v/h_v & 0 & -G_v z_{1t}/h_v & 0 & 0 & 0 & G_v/h_v - \rho_2 h_2 \omega^2 & 0 & G_v z_{2b}/h_v - \rho_2 J_2 \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_v(z_{2b}-h_v/2)/h_v & 0 & -G_v(z_{2b}-h_v/2)z_{1t}/h_v & 0 & 0 & 0 & G_v(z_{2b}-h_v/2)/h_v & 0 & G_v(z_{2b}-h_v/2)z_{2b}/h_v & 1 & 0 \\ & & & & & & & -\rho_2 J_2 \omega^2 & & -\rho_2 J_2 \omega^2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_v/h_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_v/h_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/K_2 - \rho_2 h_2 \omega^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

### 3. 수치 해석, 실험 및 고찰

본 논문의 이론전개과정의 타당성을 입증하고, 동시에 점탄성층에 의한 압축 혹은 범선변형에 의한 감쇠효과와 전단변형에 의한 감쇠(compressional and shear damping) 효과를 비교 분석하기 위하여 Fig. 6과 같은 외팔보를 대상으로하여 수치 해석과 실험을 수행하였다.

실험측정에 사용된 다섯 종류의 시편에 대한 내용이 Table 1에 나타나 있다.

평판의 탄성계수는 측정을 통해 구하였으며  $E = 1.825 \times 10^{12}$  (dyne/cm<sup>2</sup>)으로 나타났다. 실험에 사용한 점탄성 재료는 3M사 제품인 Scotchdamp SJ2015X Type 112이다. 이 재료의 동적전단계수  $G_v$ 와 손실계수(loss factor)  $\alpha$ 의 진동수  $f$ 에 대한

변화관계식은 다음과 같고, 3M사에서 제공한 자료를 그대로 사용하였다.

$$G_v = (f)^{0.55731} \times 5.96617 \times 10^5 \times (1.0 + i\alpha) \quad (\text{dyne/cm}^2), \quad (\text{온도} : 23.88^\circ\text{C}) \quad (55)$$

$$\alpha = 0.0520947 \times \ln(f) + 0.644273, \quad (\text{온도} : 23.88^\circ\text{C}) \quad (56)$$

접착제는 비압축성( $\mu=0.5$ )재질이라고 가정하여,  $E_v=3G_v$ 를 적용했다.

평판에 대해 상술한 운동방정식을 보에 적용하기 위해서는 다만 평판의 탄성계수  $B_p$ 에  $(1-\nu^2)$ 을 곱해 주면 된다<sup>(17)</sup>

Fig. 6과 같은 외팔보의 자유단에 조화함수인 외력  $F = F_0(1) e^{i\omega t}$ 가 작용하는 경우, 경계조건은  $x=0$ 에서  $u_1 = w_1 = \theta_{x1} = N_{x2} = Q_{x2} = M_{x2} = 0$ 이고,  $x=1$ 에서  $N_{x1} = M_{x1} = N_{x2} = M_{x2} = Q_{x2} = 0$ ,  $Q_{x1} = F$ 가 된다. 그러므로 방정식 (52)로 나타나는 계의 운동방정식은  $x=0$ 와 1에서의 경계치 문제(boundary value problem)가 되며 그 해는 경계치 문제를 초기치문제(initial value problem)로 전환해서 4차

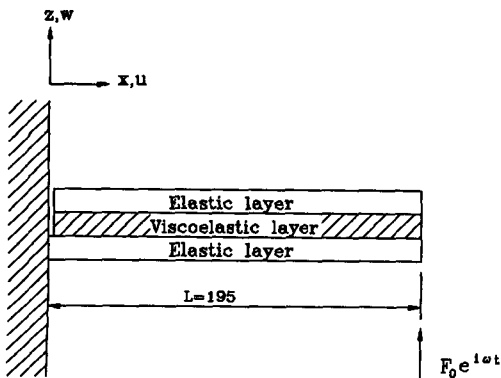


Fig. 6 Geometry and coordinate system for the three-layer damped beam

Table 1 Physical data of specimens (unit:mm)

specimen type	1	$h_1$	$h_v$	$h_2$	$b$	elastic beam	viscoelastic material
specimen1			0.25	1.15			Scotchdamp
specimen2			1.00	1.15			SJ2015X
specimen3	195	2	1.875	1.15	10.00	steel	Viscoelastic
specimen4			1.00	2.00			Polymer
specimen5			1.875	2.00			Type 112

Runge-Kutta method로 수치해석하는 단계별 적분 방법<sup>(13)</sup>(stepwise integration method)으로 구했다. 이때 사용한 전산기는 Cyber 180~860 기종이다. 실험 측정은 impact hammer와 질량 1그램인 가속도계를 이용하여, 진동수 10~3000 Hz 범위에 걸쳐 가진지점의 inertance를 측정하였으며, Fig. 7은 실험 측정장치도이다.

Fig. 8~12는 Table 1의 시편에 대해 본 논문의 이론해에서 구한 수치계산해와 실험을 통해 측정된 inertance를 나타낸 그림이다. 여기서 수치계산

inertance는 다음과 같이하여 구한다. 즉 방정식 (52)의  $y(x)$  값 중에서 변위  $W_2 = W_2(1) e^{i\omega t}$ 를 시간  $t$ 에 대해 2번 미분하면 가속도  $-\omega^2 W(1) e^{i\omega t}$ 가 되고 이를 가진력  $F = F_0(1) e^{i\omega t}$ 로 나눈다. Fig. 8, 9 및 10은 모재와 구속재 두께를 고정하고 접착제 두께만을 증가시킨 경우이며, Fig. 11 및 12는 구속재 두께를 모재와 동일한 두께인 2.0 mm로 고정하고 접착제 두께를 증가시킨 경우이다. 시편 종류

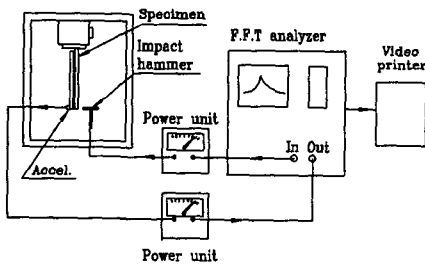


Fig. 7 Experimental set-up

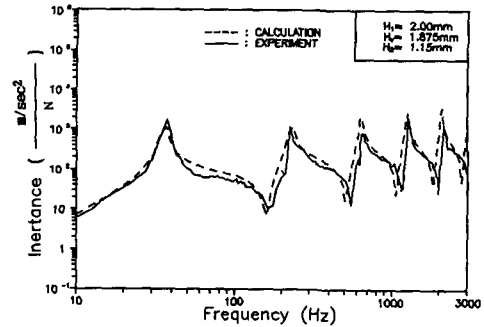


Fig. 10 Transverse driving point inertance for specimen 3

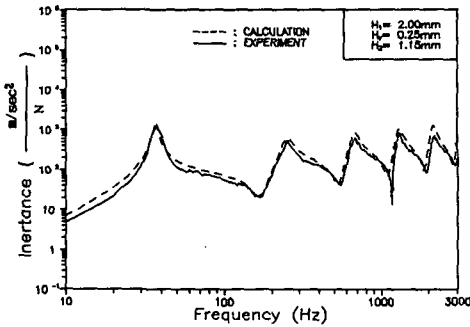


Fig. 8 Transverse driving point inertance for specimen 1

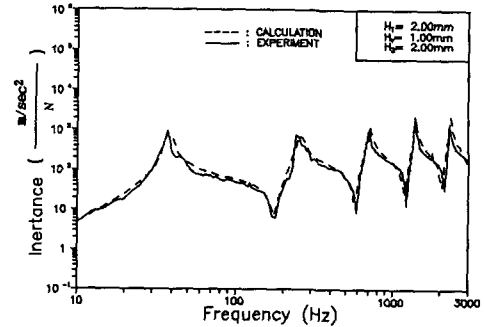


Fig. 11 Transverse driving point inertance for specimen 4

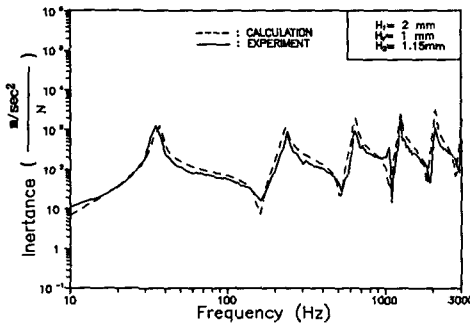


Fig. 9 Transverse driving point inertance for specimen 2

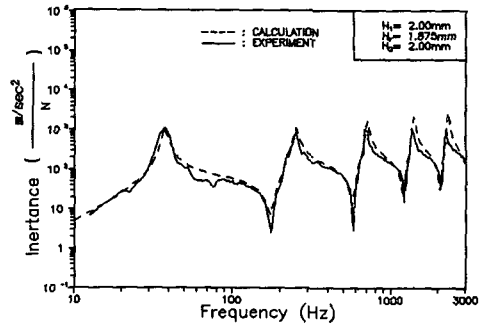


Fig. 12 Transverse driving point inertance for specimen 5

를 이와 같이 분류하고 실험한 이유는 본 논문에서 확립한 이론이 접착제 및 구속재의 두께 변화에 관계없이 적용 가능하다는 것을 나타내기 위해서이며, 수치계산과 실험을 통하여 구한 결과는 전 진동수영역에서 상호간에 매우 근사하고 있음을 알 수 있다.

점탄성 재료의 법선 및 전단변형이 미치는 감쇠 효과를 에너지원리를 적용하여 아래와 같이 분석한다. 각각의 시편에 대해 Fig. 6과 같은 외력이 작용하여 정상상태의 진동을 하는 경우, 외력이 한 일  $W_e$ 는 점탄성 재료의 감쇠작용에 의해 발산되는 에너지  $W_d$ 와 같다.<sup>(18)</sup> 외부로 발산되는 에너지의 총합  $W_a$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$W_a = \int_{vol} \Delta W_n dV + \int_{vol} \Delta W_s dV \quad (57)$$

여기서  $\Delta W_n$ 과  $\Delta W_s$ 는 점탄성 재료의 법선 및 전단변형에 의해 사이클당 단위체적으로부터 발산되는 에너지이다.

$$\Delta W_n = \int_0^T \sigma_v \frac{d\varepsilon_v}{dt} dt \quad (58)$$

방정식 (58)에  $\sigma_v = \sigma_v(x) \sin(\omega t - \delta_1)$  및  $\varepsilon_v = \varepsilon_v(x) \sin(\omega t - \delta_2)$ 를 대입 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta W_n = \pi \sigma_v(x) \varepsilon_v(x) \sin \delta \quad (59)$$

여기서  $\delta = \delta_2 - \delta_1$ 는 응력과 변형률사이의 위상차로서, loss angle이다. 응력과 변형률 관계를 복소수형태로 나타내면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_v &= (E_1 + iE_2) \varepsilon_v = E_1(1 + i\beta) \varepsilon_v \\ &= E_1(1 + i \tan \delta) \varepsilon_v \end{aligned} \quad (60)$$

$$\sigma_v(x) = E_1 \sqrt{1 + \beta^2} \varepsilon_v(x) \quad (61)$$

$$\tan \delta = \frac{E_2}{E_1} = \beta \quad (62)$$

여기서  $E_1$ 과  $E_2$ 는 복소탄성계수의 저장계수(storage modulus)와 손실계수(loss modulus)이다.

방정식 (61)을 (59)에 대입하면 식 (63)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta W_n &= \pi \sigma_v(x) \varepsilon_v(x) \sin \delta \\ &= \pi E_1 \sqrt{1 + \beta^2} \varepsilon_v(x)^2 \sin \delta = \pi E_2 \varepsilon_v(x)^2 \end{aligned} \quad (63)$$

같은 방법으로 전단변형에 의한 발산에너지  $\Delta W_s$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\Delta W_s = \int_0^T \tau_v \frac{d\gamma_v}{dt} dt \quad (64)$$

방정식 (64)에  $\tau_v = \tau_v(x) \sin(\omega t - \delta_1)$  및  $\gamma_v = \gamma_v(x) \sin(\omega t - \delta_2)$ 를 대입 정리하면

$$\Delta W_s = \pi \tau_v(x) \gamma_v(x) \sin \delta \quad (65)$$

응력과 변형률 관계에서

$$\begin{aligned} \tau_v &= (G_1 + iG_2) \gamma_v = G_1(1 + i\beta) \gamma_v \\ &= G_1(1 + i \tan \delta) \gamma_v \end{aligned} \quad (66)$$

$$\tau_v(x) = G_1 \sqrt{1 + \beta^2} \gamma_v(x) \quad (67)$$

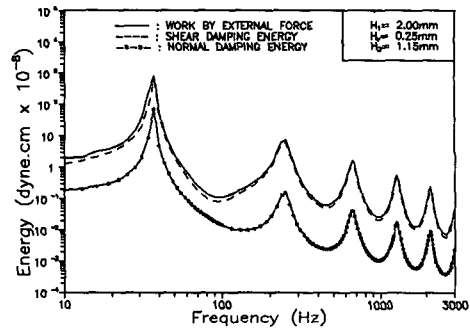


Fig. 13 External work and energy dissipated by damping for specimen 1

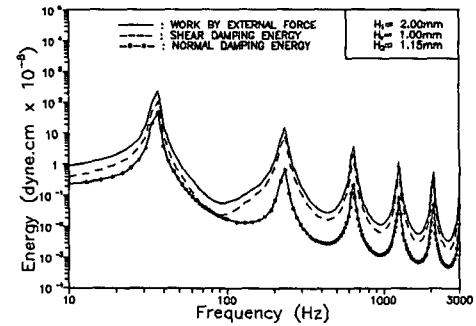


Fig. 14 External work and energy dissipated by damping for specimen 2

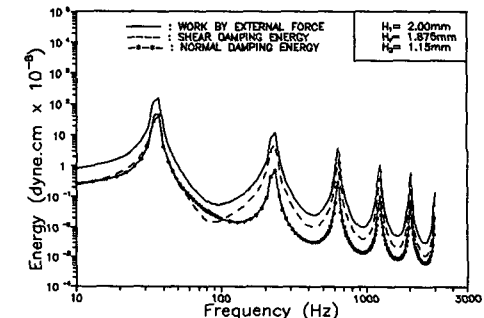


Fig. 15 External work and energy dissipated by damping for specimen 3



$$\tan \delta = \frac{G_2}{G_1} = \beta \quad (68)$$

여기서  $G_1$ 과  $G_2$ 는 복소전단계수의 저장계수와 손실계수이다.

방정식 (67)을 (65)에 대입하면

$$\begin{aligned} \Delta W_s &= \pi \tau_v(x) \gamma_v(x) \sin \delta = \pi G_1 \sqrt{1 + \beta^2} \gamma_v(x)^2 \sin \delta \\ &= \pi G_2 \gamma_v(x)^2 \end{aligned} \quad (69)$$

외력이 한 사이클 동안에 행한 일  $W_e$ 는 방정식 (70)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W_e = \int_0^T F \frac{dw_1}{dt} dt \quad (70)$$

외력  $F = F_0 e^{i\omega t}$  일때, 외력이 가해지는 점에서의  $z$ 방향 변위는  $w_1^*(1)$ 은  $i(\omega t - \phi)$ 의 조화함수로 가정한다. 이때  $\phi$ 는 외력과 변위사이의 위상차를 나타낸다. 이상을 방정식 (70)에 대입 후 정리하면 아래와 같이 표시된다.

$$W_e = F_0 w_1^* \pi \sin \phi \quad (71)$$

Fig.13~15는 모재와 구속재의 두께를 2.0 및 1.15 mm로 일정하게 유지하고 접착제의 두께만을 변화시킨 시편에 대해 일과 발산에너지와의 관계를 보여주는 그림들이다. 접착제의 두께가 얇을수록 전단변형에 의한 발산에너지(dissipated energy)가 법선변형에 의한 발산에너지에 비해 크며 접착제의 두께가 두꺼워질수록 법선변형에 의한 발산에너지가 전단변형에 의한 발산에너지에 비해 커짐을 알 수 있다.

Fig. 16 및 17은 모재와 구속재 두께를 2.0 mm로 동일하게 하고 접착제 두께를 증가시킨 경우로서 낮은 진동수영역에서는 법선변형에 의한 발산에너지가 감쇠에 미치는 영향이 크며 높은 진동수영역으로 갈수록 전단과 법선변형에 의한 발산에너지가 감쇠에 미치는 영향이 비슷하게 됨을 알 수 있다.

Fig. 14와 Fig. 16 그리고 Fig. 15와 Fig. 17로 부터 모재와 접착제의 두께를 동일하게 하고 구속재 두께만을 변화시킨 경우, 구속재의 두께변화가 점탄성층의 법선 및 전단감쇠 효과에 미치는 영향을 알 수가 있다. 구속재 두께가 1.15 mm에서 2 mm로 증가한 Fig. 16과 Fig. 17의 경우가 Fig. 14와 Fig. 15의 경우에 비해서 낮은 진동수 영역인 10~100 Hz에서는 법선변형에 의한 발산에너지가 전단변형에 의한 발산에너지보다 커지는 현상을 나

타내고 있다.

이상의 내용을 종합해서 정리하면 점탄성재료의 두께가 두꺼울수록 법선변형에 의한 감쇠효과가 크고, 얇을수록 전단변형에 의한 감쇠효과가 크며, 구속재의 두께가 두꺼울수록 점탄성층의 법선변형에 의한 감쇠효과가 증가함을 알 수 있다.

Fig. 18은 횡진동을 하는 계의  $x$  및  $z$ 방향 변위 크기를 검토하기 위하여 Fig. 6과 같이 외력이 가

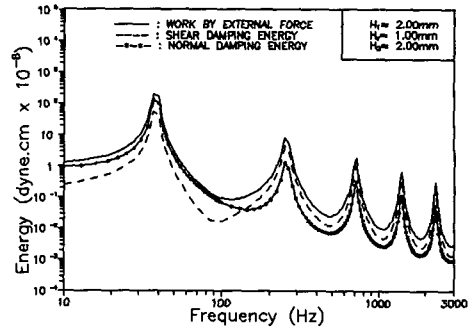


Fig. 16 External work and energy dissipated by damping for specimen 4

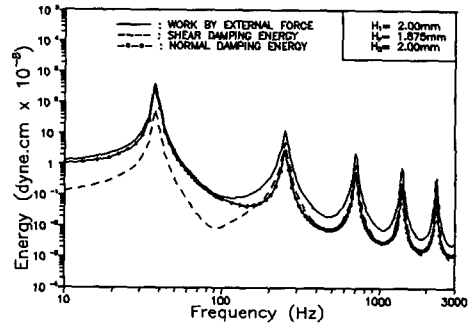


Fig. 17 External work and energy dissipated by damping for specimen 5

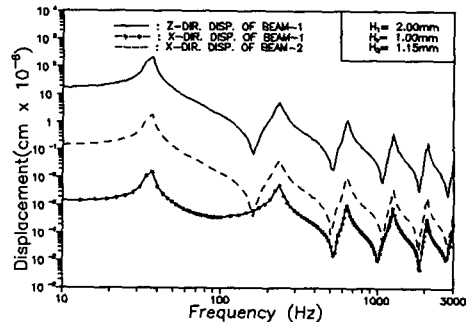


Fig. 18 X-dir. and z-dir. displacement

해지는 위치에서의 모재의  $z$ 방향 변위  $w_1(1)$  및  $x$ 방향 변위  $u_1(1)$  그리고 구속재의  $x$ 방향 변위  $u_2(1)$ 를 전 진동수영역에 대하여 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 횡진동을 하는 계의 축방향 변위  $u_1$  및  $u_2$ 는  $z$ 방향 변위  $w_1$ 에 비해서 무시할 수 있는 정도의 양임을 알 수 있다. 여기서  $u_2$ 의 변위가  $u_1$ 보다 큰것은 모재는 외팔보 경계조건이나  $u_2$ 는 양단 자유 경계조건이기 때문이다.

#### 4. 결 론

구조물의 공진진동수에서의 진동폭을 줄이기 위하여 탄성, 점탄성 및 탄성재질로 이루어진 계에 점탄성재질의 접착제가 미치는 영향을 고찰한 결과 다음과 같은 결론에 도달했다.

(1) 각 층의 전단효과와 회전관성효과(rotary inertia effect), 축방향 변위 및 접착제의 전단과 법선변형효과를 고려한 적층판의 1계 미분방정식 형태의 운동방정식을 유도하고, 그 수치해석결과와 실험결과를 비교하여 본 결과, 전반적으로 잘 일치하였다.

(2) 접착제의 두께가 클수록 법선변형에 의한 감쇠효과가 크고, 얇을수록 전단변형에 의한 감쇠효과가 크다.

(3) 구속재의 두께만을 증가시킬 경우 낮은 진동수 영역에서 점탄성층의 법선변형에 미치는 영향이 전단변형에 미치는 영향보다 크게 작용한다.

#### 후 기

이 연구는 1991년도 교육부 지원 한국학술진흥재단의 학술연구조성비에 의하여 연구되었으며, 이에 재단 및 관계자 여러분께 감사의 뜻을 포함합니다.

#### 참고문헌

(1) Swallow, W., 1939, "An Improved Method of Damping Panel Vibrations," British Patent Specification 513, 171.  
 (2) Ross, D., Ungar, E.E. and Kerwin, Jr. E. M., 1959, "Structural Damping," Ruzicka, J.E., ed., ASME, New York, pp49~87.  
 (3) Whittier, J.S., 1959, "The Effect of Configurational Additions Using Viscoelastic Interfaces

on the Damping of a Cantilever Beam," WADC Technical Report 58~568, Wright Air Development Center.

(4) DiTaranto, R.A., 1965, "Theory of the Vibratory Bending for Elastic and viscoelastic Finite Length Beams," Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 881~886.  
 (5) Mead, D.J. and Markus, S., 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions," J. of Sound and Vibration, Vol.10(2), pp. 163~175.  
 (6) Yan, M. J. and Dowell, E. H., 1972, "Governing Equations for Vibrating Constrained Layer Damping of Sandwich Plates and Beams," Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, Vol.39, pp. 1041~1046.  
 (7) Douglas, B. E. and Yang, J.C.S., 1978, "Transverse Compressional Damping in the Vibratory Response of Elastic-Viscoelastic-Elastic Beams," AIAA Journal, Vol.16, No.9, pp.925~930.  
 (8) Miles, R.N. and Reinhall, P.G., 1978, "An Analytical Model for the Vibration of Laminated Beams Including the Effects of Both Shear and Thickness Deformation in the Adhesive Layer," Trans. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 108, pp.56~64.  
 (9) Okazaki, A., Urata, Y. and Ookouchi, T., 1988, "Damping Properties of Two-Layered Curved Beams with an Unconstrained Viscoelastic Layer," Trans. Japan Soc. Mech. Eng., Vol.54 No.498, pp.402~409.  
 (10) Okazaki, A., Urata, Y. and Ookouchi, T., 1988, "Damping Properties of Two-Layered Cylindrically Curved Plates with an Unconstrained Viscoelastic Layer," Trans. Japan Soc. Mech. Eng., Vol.54, No.508, pp.2957~2965.  
 (11) Dewa, H., Okada, Y. and Nagai, B., 1989, "Damping Characteristics of Flexural Vibration for Partially Covered Beams with Constrained Viscoelastic Layers," Trans. Japan Soc. Mech. Eng., Vol.55, No.515, pp.1575~1581.  
 (12) Rao, M.D. and Crocker, M.J., 1990, "Analytical and Experimental Study of the Vibration of

- Bonded Beams with a Lap Joint," Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics, Vol.112, pp.444~451.
- (13) Harry Kraus, 1967, "Thin Elastic Shells," John Wiley & Sons, New York, pp.419~458.
- (14) Yuceoglu, U. and Updike, D.P., 1981, "Bending and Shear Deformation Effects in Lap Joints," ASCE, J. of the Engr.Mech. Div., Vol. 107(EM1), pp. 55~76.
- (15) Tsai, S.W. and Hahn, H. T., 1980, "Introduction to Composite Materials," Technomic, Westport, pp.115~215.
- (16) Yuceoglu, U. and Updike, D.P., 1980, "Stress Concentrations in Bonded Multi-Layer Stiffening Strips and Base Plates," Emerging Technology Conference, ASME, pp. 99~110.
- (17) Ugural, A.C., 1981, "Stress in Plates and Shells," McGraw-Hill, New York, pp.2~25.
- (18) Findley, W.N., Lai, J.S. and Onaran, k., 1976, "Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials," North-Holland, Amsterdam, pp.90~96.