〈論 文〉

포화 요소가 있는 계를 위한 와인드업 방지 보상 방법

장원욱* · 박영진**

(1992년 3월 10일 접수)

An Anti-Windup Compensation for Systems with Saturation Actuators

Won-Woog Chang and Youngjin Park

Key Words: Windup(와인드업), Saturating Element(포화 요소), Nonlinear Control(비선형 제어)

Abstract

A novel approach based on a nonlinear compensator is proposed to prevent 'windup', which is caused by the saturation of the acutator and the integral action of the controller. The anti-windup compensator is located between the conventional linear controller, designed neglecting the saturation, and the actuator. It was proven based on the describing function method that, if the closed loop control systems are stable assuming no saturation, then there may exist a range of compensator gain which prevents any limit-cycle. The computer simulation results show that the compensator proposed in the manuscript can eliminate the limit cycle and improve the transient response.

기호설명

$G(s)$: 제어기의 전달함수
$H(s)$: 플랜트의 전달함수
$K_a(s)$: 보상기 페루프 전달함수
K_a : 보상기 이득
$GH(s)$: 보상기 부착전 계의 선형부분 개루프 전달함수
$G^*(s)$: 보상기 부착후 계의 선형부분 개루프 전달함수
$N(U^*)$: 비선형 요소의 묘사함수(describing function)
r : 제어계의 기준 입력신호
u : 제어기의 출력신호
v : 플랜트의 입력신호
y : 제어계의 출력신호
U^* : 포화 요소의 입력신호의 진폭
L : 포화 요소의 최대출력

*한국과학기술원 기계공학과
**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

와인드업(windup)현상은, 적분기가 있는 제어기의 출력이 엑튜에이터(acutator)의 포화현상으로 인하여 제어하려는 계에 충분히 전달되지 않는 경우에, 제어기의 출력이 비정상적으로 증가하는 바람직하지 않은 비선형 현상을 말한다. 와인드업 현상이 일어나는 계는 큰 오버슈트가 나타나거나 리밋싸이클 (limit cycle)이 나타나는 등의 비선형 거동을 하게 된다. 그 중에서도 가장 큰 문제는 선형이론에 의하면 안정한 계가 포화현상이 일어나면서 비선형계가 되므로 안정성이 보장되지 못한다는 것

이다. 이런 현상은 큰 제어 신호가 발생하는 시동 초기나 과도기 등에 액튜에이터가 포화됨에 따라서 나타나게 된다.[1]

이런 와인드업 현상이 포화요소가 있는 계에는 언제나 나타날 가능성이 있으므로 와인드업 방지 제어(anti-windup control)의 필요성이 크다고 하겠다. 이 분야에 관한 이제까지의 연구들은 와인드업 작용을 조절할 수 있는 새로운 형태의 제어기를 설계하거나,[2,3,4] 혹은 포화요소가 있는 계의 안정성을 해석할 수 있는 방법을 제시하는 방향으로 이루어져 왔다.[5,6,7] 본 연구에서는 제어기에 관심을 갖던 기존의 방법에서 탈피해서 포화요소에 촛점을 맞추어 와인드업 현상을 해결하는 방법을 제시하고자 한다. 이 방법은 단입출력 시스템에서는 역계산 방법(back calculation method)[2]과 동일하나 제어기와 보상기를 분리하여 설계한 후 보상기를 각각의 엑추에이터 앞에 설치함으로써 다입 출력 시스템에 쉽게 적용될 수 있다는 점에서 새로운 제안이라 할 수 있다. 또한 제어기를 바꾸지 않고도 보상기만을 추가로 설치하여 와인드업을 방지할 수 있으므로 이미 설치된 시스템에의 적용이 용이함도 특기할 만하다.

2. 와인드업 방지 보상 방법(Anti-Windup Compensation)

Fig. 1은 엑튜에이터에서 포화현상이 발생하는 페루프제어 계의 구성도이다. 본 논문연구 대상은 Fig. 1에서 처럼 포화요소를 제외한 모든 구성요소가 선형저으로 작동하는 계에 국한한다. 와인드업 현상은 Fig. 1의 u가 v에 비하여 크게 증가하는

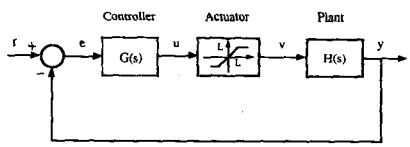

Fig. 1 The block diagram of a system with saturating actuator

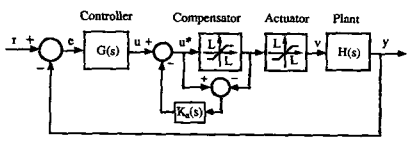

Fig. 2 The block diagram of a system with anti-windup compensator

현상을 일컬으므로, 본 논문에서는 Fig. 2에서 처럼 제어기와 엑튜에이터 사이에 보상기를 부착하여 u와 v사이의 차이를 줄여 와인드업을 방지하려 한다. 보상기안의 포화요소와 엑추에이터의 특성이 일치한다면, 엑튜에이터를 무시하여도 전체 시스템 특성에는 변화가 없으므로 이후부터는 이를 무시한다. 포화가 일어난 경우의 와인드업 현상은 보통 제어기 내의 적분기에 오차값이 누적되어 일어나므로 이를 상쇄하기 위해서는 보상기 페루프 전달함수 $K_a(s)$속에 적분기를 필요로 하게 된다. 미분기와 비례기를 함께 사용하는 방법도 있을 수 있으나, 이 논문에서는

$$K_a(s)=\frac{K_a}{s} \tag{1}$$

만 고려한다. 여기서 상수 K_a는 보상기이득이다.

3. 와인드업 방지 보상기가 부착된 계의 선형 안정성 해석(포화 현상을 무시한 경우)

보상기를 부착하기 전의 계가 선형 조건하에서 안정할 경우, 보상기를 부착한 계의 안정성 문제를 고려하기로 하자. 대부분의 실제 불안정한 비선형 시스템은 리밋사이클을 가지므로 이 논문에서 안정성이라 함은 리밋사이클의 존재 여부를 말하는 것으로 한다.

비선형 시스템은 선형 시스템과는 달리 목표값(set point) 또는 기준 입력(reference input)에 따라 안정성이 다르므로 여기서는 목표값이 원점에 있는 경우에 대한 안정성만을 고려한다. Fig. 3은 안정성 해석을 위해서 기준 입력(Fig. 2의 r)을 0으로 가정하고 재구성한 등가의 계를 나타내고 있다. 포화요소 이외의 모든 요소가 선형요소이므로 계의 작동 구간은 포환현상이 일어나는 비선형 구간과 포화현상이 일어나지 않는 선형 구간으로 분류될 수 있다. 우선 포화현상이 일어나지 않는 선

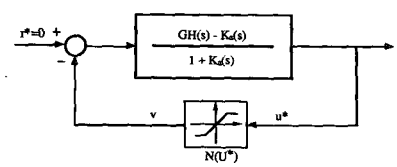

Fig. 3 The block diagram of the equivalent system

형 작동구간에서 보상기 부착계의 안정성을 고려하기로 하자. Fig. 3과 같이 재구성한 계의 개루프 전달함수는 다음과 같이 표시된다.

$$G^*(s)=\frac{GH(s)-K_a(s)}{1+K_a(s)} \tag{2}$$

여기서 $GH(s)$는 보상기 부착전 계의 선형부분 개루프 전달함수이다. 이 경우의 선형 작동 구간에서의 폐루프 특성방정식은 다음과 같다.

$$G^*(s)+1=0 \tag{3}$$

제어기와 플랜트(plant)의 전달함수 및 보상기 폐루프 전달함수는 다음과 같이 유리다항식의 분자 및 분모로 표시될 수 있다.

$$GH(s)=\frac{N_G(s)}{s^\alpha D_G(s)} \tag{4}$$

$$K_a(s)=\frac{N_a(s)}{D_a(s)} \tag{5}$$

이때, 이들이 실현 가능하기 위해서는 분자항의 차수가 분모항의 차수보다 낮아야 한다.

이를 (3)식에 대입하면, 다음의 보상기 부착 폐루프계의 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$1+G^*(s)=\frac{s^\alpha D_G(s)+N_G(s)}{s^\alpha D_G(s)}\frac{D_a(s)}{D_a(s)+N_a(s)}=0 \tag{6}$$

한편 보상기가 부착되기 전의 원래 폐루프계의 선형 작동구간에서의 전달함수는 다음과 같다.

$$T(s)=\frac{GH(s)}{1+GH(s)}=\frac{N_G(s)}{s^\alpha D_G(s)+N_G(s)} \tag{7}$$

정상오차를 없애기 위하여는 $\alpha\geq 1$을 만족해야 한다. 또한, 이경우에만 와인드업 현상이 일어나므로 이 논문에서는 이 경우를 중점적으로 다룬다.

다음의 식은 원래 폐루프계의 특성방정식을 나타내며, 계가 선형 작동구간에서 안정하다면 이 특성방정식의 근은 모두 s 평면의 허수축 좌측에 존재한다.

$$s^\alpha D_G(s)+N_G(s)=0 \tag{8}$$

(6)식의 폴(pole)과 제로(zero)가 소거되지 않는다고 하면 보상기 부착 계의 특성방정식은 원래계의 특성방정식에 보상기 폐루프 전달함수 $K_a(s)$의 분모를 곱한 형태가 된다.

보상기 폐루프 전달함수로 (1)식을 사용한 경우에 계의 안정성을 고려하자.

● $\alpha\geq 1$인 경우

$$1+G^*(s)=\frac{s^\alpha D_G(s)+N_G(s)}{s^\alpha D_G(s)}\frac{s}{s+K_a} \tag{9}$$

$$=\frac{s^\alpha D_G(s)+N_G(s)}{s^{\alpha-1}D_G(s)(s+K_a)}=0$$

특성방정식은 분자항만이 고려되고, $D_G(s)$와 $N_G(s)$의 특성상 $(s+K_a)$항을 제외한다면 분자와 분모항 간에 소거가 일어 날 수 없으므로, 보상기를 부착한 계의 특성방정식이 원래계의 방정식과 일치함을 알 수 있다. 그러므로, 원래계가 안정하도록 선형 제어기를 설계한 경우, 보상기를 차후에 부착하여도 선형 작동 구간에서의 안정성이 유지됨을 알 수 있다.

● $\alpha<1$인 경우

보상기는 원점에 폴을 제공하는 역할을 하게 된다. 이 폴은 보상기 폐루프부분에 있는 적분기의 동특성을 나타내고 있으며, $\alpha\geq 1$인 경우와는 다르게, 제어기내의 적분기에 의하여 상쇄되지 않았음을 보여준다. 이는 와인드업 현상이 일어나지 않는 계에 불필요한 보상기를 붙인 경우가 되므로 더 이상 고려치 않는다.

위의 증명에 의해서 처음에 포화현상을 고려하지 않은 선형계가 안정하게 설계되었다면 보상기가 부착된 계도 선형구간에서 안정함을 보였다. 다음 절에서는 묘사함수방법(describing function method)을 사용하여 비선형 작동구간에서의 안정성을 고찰하기로 한다.

4. 와인드업 방지 보상기가 부착된 계의 비선형 안정성 해석

비선형계의 안정성 해석은 여러 가지가 있을 수 있으나 그 중 가장 보편적인 것은 자려진동(self-inuced oscillation)현상의 존재 해석이라 하겠다.[8] 이 정상 진동(steady state oscillation)은 이에 가까운 진동이 모두 이를 향해서 수렴하거나 발산하는 극한의 주기진동이므로 리밋 사이클이라 하며 계의 선형부분의 개회로 주파수 응답함수(open loop frequency response function) $G^*(j\omega)$와 비선형 요소의 묘사함수(describing function) $N(U^*)$사이에 다음의 관계가 만족되면 나타나게 된다.[9]

$$G^*(j\omega)=-\frac{1}{N(U^*)} \tag{10}$$

여기서 $N(U^*)$는 비선형요소의 묘사함수를 나타

낸다.

포화요소의 묘사함수는 다음과 같다.[10]

$$N(U^*)=\begin{cases}1 & ,U^*\le L\\ \frac{2}{p}\left(\sin^{-1}\left(\frac{L}{U^*}\right)+\left(\frac{L}{U^*}\right)\sqrt{1-\left(\frac{L}{U^*}\right)^2}\right), & U^*>L\end{cases} \quad (11)$$

여기서 U^*는 포화요소의 입력 진폭을, L은 포화요소의 최대 출력을 표시한다.

주파수 영역에서 $-1/N(U^*)$는 -1부터 $-\infty$까지의 실수값을 갖는다. 그러므로 $G^*(j\omega)$가 -1보다 작은 실수축과 만나지 않는다면 리밋싸이클은 존재하지 않게 된다.

4.1 보상기 부착에 따른 나이퀴스트 플롯 (Nyquist plot)의 변화

$GH(j\omega)$가 물리적으로 실현가능한 계라고 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$GH(j\omega)=\frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)^{\alpha}(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots} \quad (12)$$
$$=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_n},\quad (n>m)$$

이제 (12)식을 $G^*(j\omega)$에 대입하면

$$G^*(j\omega)=\frac{GH(j\omega)-\frac{K_a}{j\omega}}{\frac{K_a}{j\omega}+1} \quad (13)$$
$$=\frac{[K(j\omega)(1+j\omega T_a)\cdots]-[K_a(j\omega)^{\alpha-1}(1+j\omega T_1)\cdots]}{(j\omega)^{\alpha-1}(K_a+j\omega)(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots}$$
$$=\frac{[b_0(j\omega)^{m+1}+b_1(j\omega)^m+\cdots]-K_a[a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots]}{(K_a+j\omega)[a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\cdots]}$$

이 식에서 ω가 0과 ∞의 값을 가질때의 $G^*(j\omega)$는 다음과 같이 구해진다.

$\omega=0$ 일때

$$\alpha=0,\quad G^*(j\omega)|_{\omega=0}=-1$$
$$\alpha=1,\quad G^*(j\omega)|_{\omega=0}=\frac{K-K_a}{K_a} \quad (14)$$
$$\alpha\ge 2,\quad |G^*(j\omega)|_{\omega=0}=\infty$$

$\omega=\infty$일때

$$G^*(j\omega)=0 \quad (15)$$

계에 보상기를 부착함으로 인하여 나타나는 나이퀴스트 플롯의 변화는 $GH(s)$가 원점에 폴을 가지고 있지 않은 경우에는 $\omega=0$에서 위상이 180도 변화해서 -1점에서 시작을 하게 된다. 그리고 원점에 폴을 가지고 있는 계의 경우에는 보상기의 부착이 $GH(s)$의 원점에 있는 폴을 하나 없애는 역할을 하게 되므로 $\omega=0$에서 위상을 90도 만큼 변화시킨다.

(13)식으로부터 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$G^*(j\omega)+1=\frac{GH(j\omega)+1}{1-\frac{K_a}{\omega}j} \quad (16)$$

(16)식에서 다음의 결과들을 추론할 수 있다. 첫째, 낮은 주파수에서의 많은 변화에도 불구하고 높은 주파수에서의 변화는 크지 않다. 둘째, 보상기 이득 K_a의 증가는 나이퀴스트 플롯을 실수 축상의 점 -1을 향해서 끌어 당기는 동시에 시계 반대 방향으로 돌리는 역할을 한다. 이러한 보상기의 작용은 나이퀴스트 플롯이 -1보다 작은 실수 축과 만나는 경우에 K_a값의 증가로 만나지 않도록 하는데 이용될 수 있다. 즉 리밋사이클의 존재를 K_a의 조정으로 없앨 수 있음을 의미한다.

4.2 보상기 이득 결정 방법

$G^*(j\omega)$의 나이퀴스트 플롯이 -1보다 작은 음의 실수축과 교차하면 리밋사이클을 갖게된다. 따라서 보상기 이득은 $G^*(j\omega)$의 나이퀴스트 플롯이 그 구간을 회피하도록 결정되어야 한다.

$G^*(j\omega)$를 실수부와 허수부로 나누면 다음과 같이 표시된다.

$$G^*(j\omega)=\frac{-K_a\omega I(\omega)-K_a{}^2+\omega^2R(\omega)}{K_a{}^2+\omega^2} \quad (17)$$
$$+j\frac{K_a\omega R(\omega)+\omega^2I(\omega)+K_a\omega}{K_a{}^2+\omega^2}$$

여기서 $R(\omega)$는 $GH(j\omega)$의 실수부를 $I(\omega)$는 $GH(j\omega)$의 허수부를 나타낸다.

리밋사이클의 주기가 0과 무한대인 극한경우와 그렇지 않은 경우를 나누어 각기 다루기로 한다.

$0<\omega<\infty$경우

이때 $G^*(j\omega)$가 다음의 두 조건 (i)과 (ii)중 하나만 만족하면 $0<\omega<\infty$에서 -1보다 작은 음의 실수 값을 갖지 않게 된다.

(i) $Im\{G^*(j\omega)\}\neq 0,\quad (0<\omega<\infty)$

(17)식을 이 조건에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$K_aR(\omega)+\omega I(\omega)+K_a\neq 0,\quad (0<\omega<\infty) \quad (18)$$

이 식을 만족하는 $GH(j\omega)$의 조건은

(1) $R(\omega^*)=-1$ and $I(\omega^*)\neq 0$ (19)

(2) $R(\omega^*)\neq -1$ and $I(\omega^*)=0$ (20)

(3) $R(\omega^*)\neq -1$ and $K_a\neq\frac{-\omega^* I(\omega^*)}{R(\omega^*)+1}$ (21)

그러므로 위의 세 조건들과 조건 (i)과는 서로 교환하여 사용하여도 무방하다.

(ii) $\mathrm{Im}\{G^*(j\omega^*)\}=0$ and $Re\{G^*(j\omega^*)\}>-1 (0<\omega^*<\infty)$

이 조건은 다음의 두 식으로 정리된다.

$$K_aR(\omega^*)+\omega^*I(\omega^*)+K_a=0 \quad (22)$$

$$\frac{-K_a\omega^*I(\omega^*)-K_a^2+\omega^{*2}R(\omega^*)}{K_a^2+\omega^{*2}}>-1 \quad (23)$$

또한, (22)식을 다음과 같이 정리하자.

$$\omega^*I(\omega^*)=-K_aR(\omega^*)-K_a \quad (24)$$

$$R(\omega^*)=\frac{-\omega^*I(\omega^*)-K_a}{K_a} \quad (25)$$

이 각각의 식을 (23)식에 대입하면 조건 (ii)에 상응하는 다음 식을 구할 수 있다.

$$R(\omega^*)>-1 \text{ and } \frac{I(\omega^*)}{K_a}<0 \quad (26)$$

(24)식을 (17)식에 대입하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$Im[G^*(j\omega^*)]=0,$$
$$Re[G^*(j\omega^*)]=Re[GH(j\omega^*)] \quad (27)$$

이 식은 보상기 부착 후 존재할 수 있는 리밋 싸이클의 주기 및 진폭의범위를 나이퀴스트 플롯에서부터 예측하는데 사용될 수 있다.

ω가 0 또는 ∞의 극한값을 가질 경우

$G^*(j\omega)$의 값은 4.1절에서 고려한 것처럼 K가 양수일 경우 -1보다 작은 음의 실수값을 갖지 않는다. 그러나 $GH(s)$가 원점에 폴을 가지지 않는 경우 또는 K가 음수일 경우에는 $\omega=0$에서 리밋사이클을 갖게 된다. 그러나 이 경우에는 주기가 무한대이므로 리밋사이클이라 할 수 없다. ω가 무한대로 수렴할 때 $G^*(j\omega)$의 값은 원점으로 수렴하므로 리밋사이클은 존재하지 않는다.

이제 $G^*(j\omega)$가 보상기 이득에 관계없이 리밋 싸이클을 갖지 않을 $GH(j\omega)$의 조건을 정리하면

$K_a>0$인 경우

$-1+0j$점을 제외한 $R(\omega)\geq -1$, $I(\omega)\leq 0$

이 구역을 $GH(j\omega)$의 평면에 나타내면 Fig. 4의 빗금친 구역과 같다. 이는 보상기 이득 값에 상관없이, $GH(j\omega)$가 빗금친 구간안에 들어가는 주파수 ω로 진동하는 리밋 사이클이 존재할 수 없음을 뜻한다.

$K_a<0$인 경우

음수인 K_a를 사용하면 와인드업을 증가시키는 현상이 일어나 대체로 과도 응답 등의 특성이 나빠지므로 사용을 권장할 수 없으나 특수한 경우에 리밋 사이클을 제거하기 위하여 사용될 수도 있을 것이다. 이 경우, Fig. 4의 실수축에 대칭인 구역에서 K_a의 값에 상관없이 리밋사이클의 존재하지 않는다.

$GH(j\omega)$가 위에서 정의된 영역을 제외한 부분에 값을 갖는 경우는 그 주파수 영역에 한해서 식(21)로부터 다음의 함수를 정의한다.

$$f(\omega)=\frac{-\omega I(\omega)}{R(\omega)+1}=\omega\tan[\theta(\omega)] \quad (28)$$

여기서 $\theta(\omega)$는 Fig. 5에서와 같이 정의 된다.

$K_a>\mathrm{Max}\{f(\omega)\}$ 또는 $0<K_a<\mathrm{Min}\{F(\omega)\}$ 되도록 K_a를 결정하면 리밋사이클을 피할 수 있다. Fig. 5에서와 같이 $GH(j\omega)$가 실수축을 통과하여 제2상한으로 들어오는 경우에는 각도 θ는 0도에서부터 증가하므로 $K_a>\mathrm{Max}\{f(\omega)\}$인 구간에서만

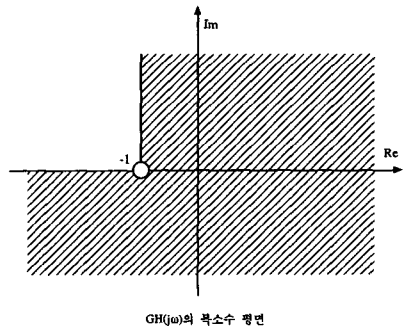

Fig. 4 The domain without limit cycle for Ka>0

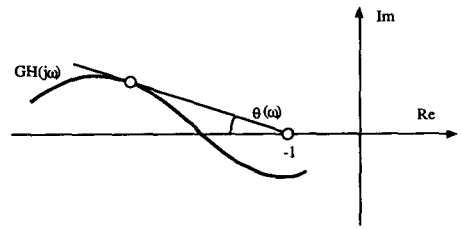

Fig. 5 The definition of $\theta(\omega)$

리밋사이클을 피할 수 있다.

앞에서 설명한 바와 같이 원래계의 나이퀴스트 프롯으로부터 쉽게 리밋 사이클을 없애는 보상기 이득을 구할 수 있다. 이를 다음에 예제를 통하여 보이고자 한다. 한가지 주의할 점은, 본 논문에서 사용한 묘사함수 방법은 근사방법이므로 모의실험이나 감도해석(sensitivity analsysis) 등을 통한 검증을 필요로 한다는 것이다.

4.3 리밋 사이클제거 보상기 이득 결정의 예

시동 초기에 와인드업 현상이 일어나고 입력의 진폭에 따라서 리밋 사이클을 갖는 Fig. 6과 같은 계를 고려하기로 하자.[11] Fig. 6은 질량과 감쇠요소로 이루어진 이차계에 PDF형식의 제어기를 사용한 경우의 블록 선도를 나타내고 있다.

이 계는 -1에 3중근의 폐회로 특성치를 갖도록 설계된($K_D=2.99$, $K_P=3$, $K_I=1$) 선형적으로는 안정한 계이다. 여기서 포화요소의 최대 출력은 0.25로 가정하였다. Fig. 7은 여러크기의 계단 목표값에 대한 응답을 나타내고 있다. 목표값이 약 2.75보다 적을 경우 출력은 목표값에 수렴하고, 클 경우에는 발산하는 것을 알 수 있다.

이제 보상기의 이득을 결정하기 위해서 이 제어계의 선형부분 개루프 전달함수 $GH(s)$를 구하면 다음과 같다.

$$GH(s)=\frac{2.99s^2+3s+1}{s^2(s+0.01)} \tag{29}$$

Fig. 8의 나이퀴스트 플롯에서 $GH(j\omega)$가 실수축과 만나는 점이 -8 근방이고 이때의 $\omega^*=0.59$, $U^*/L=11.8$이므로 리밋 사이클의 주기는 약 11 ($2\pi/0.59$)정도, 포화요소 입력진폭은 약 3(11.8×0.25)정도, 계의 출력 범위는 약 2.7 ± 1.2정도로 예측된다. 또한 이 리밋 사이클이 불안정할 것이라는 점도 예측이 가능하다. 이러한 예측을 Fig. 7의 모의 실험결과와 비교하면 잘 일치함을 알 수 있다. 여기서 특기할 것은 Fig. 8에 의한 안정성 해석은 엄밀한 의미에서 목표값이 0인 경우에만 해당하는 것이나 예제와 같이 목표값 자체가 변하는 경우에도 근사적으로 적용될 수 있다는 점이다.

Fig. 8에 나타난 $GH(j\omega)$는 $\omega<0.59$(rad/sec)인 구간에서 제2상한에 존재한다. 그러므로 보상기 이득 결정에는 $\omega<0.59$의 영역만을 고려하면 된다.

(28)식을 이용해서 $f(\omega)$를 계산하면

$$f(\omega)=\frac{2.99\omega^4-1.03\omega^2}{\omega^4-2.97\omega^2-0.01} \tag{30}$$

$0<\omega<0.59$에서 $f(\omega)$는 Fig. 9에서와 같이 $\mathrm{Max}\{f(\omega)\}\cong0.287$, $\mathrm{Min}\{f(\omega)\}=0$이므로 $K_a>0.287$되도록 보상기의 이득을 결정하면 리밋사이클을 없앨 수 있다. Fig. 8은 $K_a>0.287$인 경우에 $G^*(j\omega)$의 나이퀴스트 플롯이 -1보다 작은 음의 실수축과 교

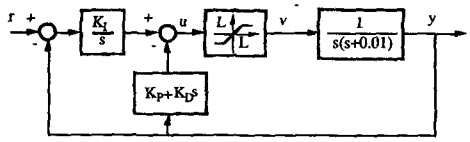

Fig. 6 The block diagram of a system with limit cycle

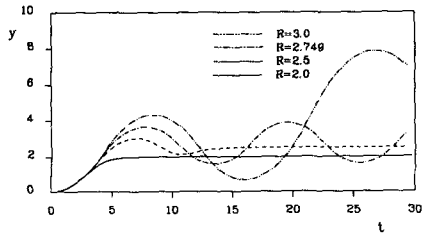

Fig. 7 Output response of a system without anti-windup compensator

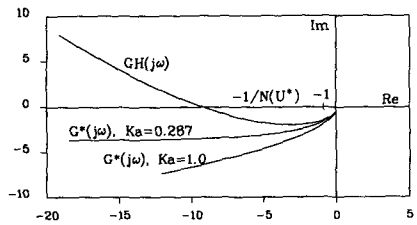

Fig. 8 The locus of $-1/N(U^*)$ and Nyquist plot of $GH(j\omega)$ and $G^*(j\omega_1)$

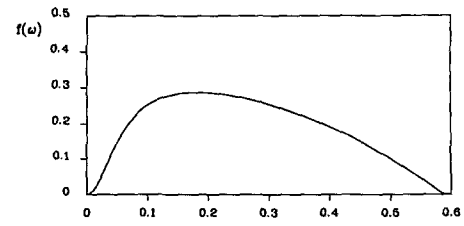

Fig. 9 Plot of $f(\omega)$

차하지 않음을 보여 준다. Fig. 10(K_a=0.287)와 Fig. 11(K_a=1.0)은 보상기 부착계의 모의실험의 결과로, 예상한대로 시동 초기의 성능이 향상되고 리밋싸이클도 없어짐을 보여주고 있다. 보상기 이득을 증가할수록 과도성능이 좋아짐을 볼 수 있으나, 실제 보상기 설계시에는 점프 공진(jump resonance)등의 또다른 비선형 특징들을 고려하여 보상기 이득을 결정하여야 할 것이다.

5. 다입력다출력계의 와인드업 방지 보상

이제까지의 다른 보상 방법들은 연성이 나타나는 다입력 다출력계에는 사용할 수 없는 한계성을 노출시켰다. 그러나 본 논문에서 소개하고 있는 보상 방법은 제어기를 대상으로 하지 않고 포화 요소의 포화 문제를 다루기 때문에 단입력 단출력계에 사용하던 보상 방법과 동일한 방법으로 연성이 나타나는 다입력 다출력계에 사용이 가능하다. 이제 연성이 나타나는 다입력 다출력계가 와인드업을 일으키는 경우에 이 보상 방법에 의해서 와인드업 현상이 해결될 수 있음을 알아보도록 하자.

본 논문에서 소개하고 있는 보상 방법은 선형이론에 의해서 제어기가 설계되어 있는 제어계에 와

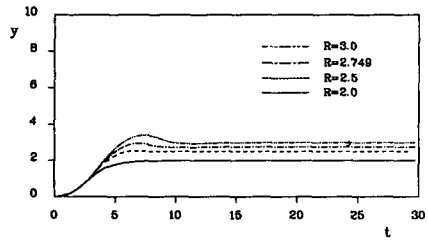

Fig. 10 Output response of the system with anti-windup compensator(K_a=0.287)

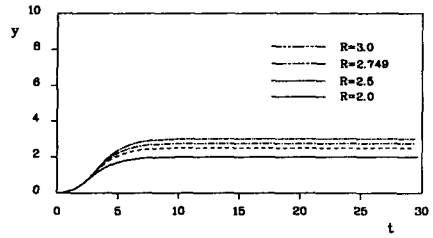

Fig. 11 Output response of the system with anti-windup compensator(K_a=1.0)

인드업이 일어나는 경우를 대상으로 한다. 그러므로 먼저 제어계를 구성하고, 플랜트(plant)에 가해지는 액튜에이터의 최대값이 제한되는 경우에 와인드업이 발생하면 보상기를 부착하여 와인드업 현상을 해결하기로 한다.

Fig. 12와 같이 두개의 입력과 두개의 출력을 가지고 있으며 연성이 나타나고 입력의 최대값이 제한을 받는 다입력 다출력계를 고려 대상으로 한다.

Fig. 12의 계에서 입력은 스프링과 감쇠요소로 서로 연결되어 있는 질량 M_1과 M_2에 가해지는 힘이며 출력은 M_1과 M_2의 변위 X_1과 X_2이다. 이와 같은 계에 대해서 X_1과 X_2를 제어하기로 하자.

먼저 입력의 크기가 제한되지 않는다고 가정하고 선형이론에 의해서 제어계를 구성한다. 좌표 변환을 하여 입력과 출력 사이의 연성을 제거한 후에 이 계를 두개의 단입력 단출력계로 간주하고 각각에 PDF형식의 제어기를 사용하여 제어하기로 한다. 좌표를 X_1, X_2 대신에 X_G, X_S를 사용하면 두 좌표는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\tilde{X}=TX \tag{31}$$

여기서

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}X_G\\X_S\end{bmatrix}$$

X_G : 무게중심의 변위

X_S : 스프링의 상대 변위

$$T=\begin{bmatrix}\dfrac{M_1}{M_1+M_2} & \dfrac{M_2}{M_1+M_2}\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

T : 좌표 변환 행렬

Fig. 13은 좌표 변환을 하여 계의 연성을 제거한 후에 각각에 PDF형식의 제어기를 사용한 계의 블록 선도이다. $M_1=M_2=1.0$, $C=0.5$, $K=0.25$의 값을 가정하였으며, 제어기의 이득은 연성이 제거된 단입력 단출력 폐루프계의 특성 방정식이 각각 (32)와 (33)식과 같도록 조정하였다.

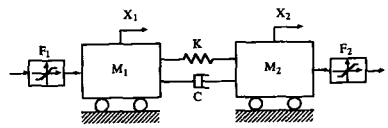

Fig. 12 Two car system

$$s^3+6s^2+16s=0 \quad (32)$$

$$s^3+6s^2+16.5s+15.5=0 \quad (33)$$

위의 특성 방정식은 근을 -2, $-2+2j$, $-2-2j$와 $-1, 7$, $-2.2+2.1j$, $-2.2-2.1j$를 갖는다.

연성이 제거된 Fig. 13과 같은 계에서 액튜에이터가 포화되면 Fig. 14와 같은 새로운 형태의 연성이 나타나게 된다. 이 경우에 두개의 독립된 단입력 단출력계로 간주하였던 제어 계획은 의미가 없어지게 되고 제어기는 제대로 성능을 발휘하지 못

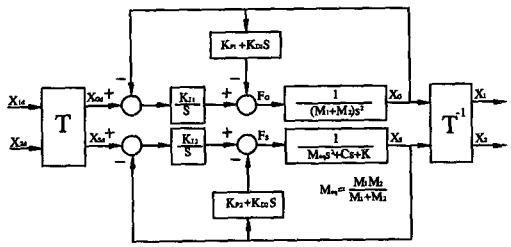

Fig. 13 The block diagram of a uncoupled MIMO system controlled by PDF type controllers

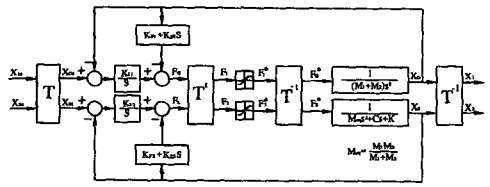

Fig. 14 The block diagram of a coupled nonlinear MIMO system with windup

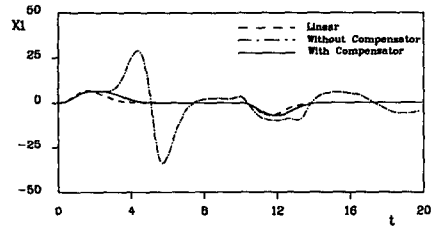

Fig. 15 Output response of mass 1 displacement ($X1$)

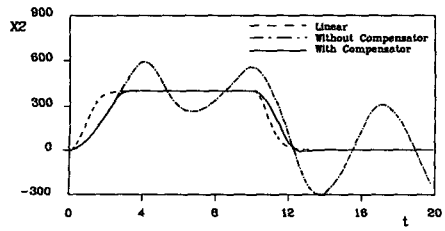

Fig. 16 Output response of mass 2 displacement ($X2$)

하게 된다. Fig. 14는 포화 현상이 일어남으로 인해서 포화 요소의 앞 뒤에 다시 연성이 나타나는 비선형계의 블록 선도를 보여 주고 있다. 액튜에이터의 선형 작동 구간 내에서는 Fig. 13의 선형계와 Fig. 14의 비선형계가 동일한 계가 된다. Fig. 14와 같은 계가 와인드업을 일으키는 경우에 보상기를 포화 요소의 바로 앞에 부착함으로 와인드업을 해결하기로 한다.

Fig. 15와 Fig. 16은 포화 현상이 고려되지 않은 선형계의 경우와 액튜에이터의 포화 현상이 고려되어 와인드업이 일어난 경우, 그리고 보상기에 의해서 보상이 이루어진 세가지 경우의 컴퓨터 모의실험에 의한 응답을 보여주고 있다. 여기에서 $X1$의 목표값은 전시간 구간에서 0이고 $X2$의 목표값은 시간구간 0에서 10 사이에는 400, 시간구간 10에서 20 사이는 0이며, 액튜에이터의 최대출력은 180으로, 보상기의 이득은 각각 $K_{a1}=1.0$, $K_{a2}=2.0$으로 하였다.

Fig. 15와 Fig. 16에서 볼 수 있는 것처럼 포화 현상이 고려되지 않을 Fig. 13과 같은 선형계의 경우는 제어가 잘 이루어지는 것을 볼 수 있다. 그러나 액튜에이터에 포화가 일어나서 Fig. 14와 같은 비선형계가 되면 계가 와인드업을 일으키게 되고 불안정해져 발산함을 볼 수 있다. 이것은 와인드업 방지 제어의 필요성을 보여 주는 좋은 예가 될 것이다. 이와같이 전혀 제어가 이루어지지 않는 계에 두개의 보상기를 각각 포화 요소 앞에 부착하여 보았다. 컴퓨터 모의 실험 결과, 이 보상 방법에 의해서 다입력 다출력계에 있어서도 와인드업 현상이 제어될 수 있음을 알 수 있다. 그러나 본 논문에서 제시된 방법으로는 한개의 액튜에이터만이 포화될 때의 다입 출력계의 리딧 사이클 해석 및 보상기 이득 결정은 가능하나 예제에서처럼 여러개의 액튜에이터가 동시에 포화되는 경우는 해석적으로 다룰 수 없다. 이에 관한 해석적인 연구는 현재 진행 중이다.[12]

6. 결론

본 논문에서 제안된 보상기는 와인드업(windup) 현상을 없애는데 우수한 능력을 보인다. 특히 이 보상기는 선형 제어기가 설계 및 설치된 이후에라도 제어기를 바꾸지 않고 부가로 설치할 수 있는 장점이 있다. 이 보상기는 포화현상이 일어나지 않

으면 전혀 작동하지 않으므로 선형 작동구간의 동특성은 보상기 부착 전과 동일하다.

포화현상을 무시한 폐루프 단입 출력, 선형계가 안정할 경우, 엑튜에이터에서 포화현상이 발생하여도 보상기를 부착하여 계를 안정시킬 수 있음을 묘사함수(decribing function) 방법을 통하여 증명하였으며 나이퀴스트 플롯(Nyquist Plot)을 사용하여 보상기 이득을 체계적으로 구할 수 있는 방법을 제시하였다. 그리고 단일 입출력계는 물론 두개의 입력과 출력이 연성되어 있는 계가 와인드업을 일으키는 경우에도 보상기를 사용해서 와인드업 현상을 제거할 수 있음을 보였다.

참고문헌

(1) Astrom, K.J. and Wittenmark, B. 1990, "Computer Controlled Systems-Theory and Design, Second edition," Prentice-Hall, pp. 224~226.

(2) Fertik, H.A. and Ross, C.W., 1967, "Direct digital control algorithms with anti-windup feature," ISA Transactions, Vol,6, No.4, pp. 317~328.

(3) Krikelis, N.J., 1980, "State feedback integral control with 'intelligent' integrators," Int. J. Control, Vol. 32, No. 3, pp. 465~473.

(4) Astrom, K.J. and Wittenmark, B., 1984, "Computer Controled Systems-theory and design, First edition," Prentice-Hall, pp. 369~373.

(5) Glattfelder, A.H. and Schaufelberger, W., 1983, "stability Analysis of Single Loop Control Systems with Saturation and Antireset-Windup Circuits," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-28, No.12, pp. 1074~1081.

(6) Chen B.S. and Wang, S.S., 1988, "The Stability of Feedback Control with Nonlinear Satuating Actuator : Time Domain Approach," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-33, No. 5, pp. 483~487.

(7) Sangsik Yang, 1990, "Stability Analysis of a Control system with an Antireset-Windup Limiter by Liapunov's Second Method," Proc. of 1990 KACC, Vol.2, pp. 1289~1294.

(8) Atherton, D.P. "Stability of Nonlinear Systems," Research Studies Press.

(9) Takahashi, Y. Rabins, M. J. and Auslander, D. M., 1970, "Control and Dynamic Systems," Addison-Wesley, p. 526.

(10) Sridhar, R. 1960, "A General Method for Deriving the Describing Funcions for a Certain Class of Nonlinearities," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-5, No. 2, pp. 135~141.

(11) Sangsik Yang, 1989, "Stability and Performance of a Control System with an Intelligent limiter," Proc. of 1989 ACCV2(of3), pp. 1699~1705.

(12) 장원욱, 1992 "포화요소가 있는 계를 위한 와인드업 방지 보상 방법", 한국과학기술원 기계공학과 석사학위 논문.