

〈論 文〉

## 가황 고무의 변형 에너지 함수를 통한 재료 특성화 방법에 관한 연구

박현철\* · 윤성기\*\*

(1992년 3월 14일 접수)

### A Study on the Characterization of Gum Vulcanizates by Strain Energy Function of Hyperelastic Material

Hyun Cheol Park and Sung-Kie Youn

**Key Words :** Rubberlike Material(고무유사재료), Hyperelastic Material(이상적 탄성재료), Strain Energy Function(변형에너지 함수), Strain Invariant(연신율 불변량), Stretch(연신율)

#### Abstract

This paper addresses the practical problem of finding a useful strain energy function of the incompressible rubberlike materials. It examines methods by which the form of the functions are determined and shows how the selection of experimental data influences the resulting form of the functions. From this information, an optimal choice of the form of energy functions becomes possible. Phenomenological theories used in this paper are limited to elastic, incompressible material models. Due to the nature of the phenomenological methods, these theories are accurate only for the materials treated. However, they serve as a starting basis for the study of more complicated material behaviors.

#### 1. 서 론

자동차용 타이어와 같은 비선형 탄성 재료(hyperelastic material)에 대한 응력 해석을 하기 위해서는 재료의 비선형성 및 대변형을 고려하여야 한다. 해석적으로 풀기 곤란한 문제에 적용되는 유한 요소법과 같은 수치 해법의 수식화를 위해서는 비선형 탄성 재료의 특성화가 요구되는데, 탄성 이론에 의하면 탄성 재료의 거동은 변형 에너지 함수로 나타낼 수가 있다. 따라서 시험 자료로부터 변형 에너지 함수를 결정해야 한다.

이때 탄성 재료에서는 변형 에너지 함수의 존재만을 가정하였으므로, 시험 자료를 가장 잘 묘사할 수 있고 시험 자료이외의 범위에서는 물리적으로 타당한 거동을 나타내는 변형 에너지 함수를 찾기 위한 연구가 행하여지고 있다. 초기에는 Mooney 유형을 이용하였지만, 측정 기술의 발달로 인하여 Mooney 유형이 시험 자료를 잘 묘사하지 못함이 밝혀졌다.<sup>(1,2,3)</sup>

그리고 변형 에너지 함수의 계수를 결정하는 방법에는 일반적인 근사 방법(curve fitting),<sup>(1)</sup> 에너지 표면(energy surface)의 관찰에 의한 계수 결정법,<sup>(4)</sup> 비선형 최적화를 이용하는 방법<sup>(5)</sup> 등이 있다. 그러나 이러한 연구들에서는 각기 다른 변형 에너지 함수를 이용하였기 때문에 각각의 변형 에너지

\*한국과학기술원 기계공학과

\*\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

함수에 대한 비교 및 평가가 어렵다.

본 글에서는 시험 재료의 특성을 가장 잘 나타낼 수 있으며 시험 자료밖의 범위에서도 물리적 타당성을 갖는 변형 에너지 함수를 찾기 위한 방법의 일환으로 기존의 여러 방법들을 이용하여 동일한 시험 자료에 적용함으로써, Rivlin 형태와 Ogden 형태에 대한 재 조사를 실시하였다.

그리고 비선형 대변형 재료의 실제 사용 예로서 앞에서 언급한 타이어용 고무를 들 수 있는데 이들에 대한 변형 에너지 함수를 결정하기 위한 시험 자료는 실제적 문제때문에 단순 인장과 같은 비교적 간단한 경우에 대하여 한정되어 있으므로, 이러한 자료로부터 여러 종류의 하중 상태를 예측할 수 있는 변형 에너지 함수를 찾고자 하였다.

## 2. 변형 에너지 함수의 형태

변형 에너지 함수는 탄성학에서의 구성 방정식에 의하여 연신율불변량 또는 연신율의 함수로 표시되며, 각각의 변형 에너지 함수에 대한 주응력 방향의 진응력들의 차이는 다음 식으로 표시된다. 앞으로의 모든 과정에서 재료의 등방성, 균질성, 그리고 비압축성( $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ ) 등의 조건이 항상 전제되고 있다.

연신율불변량(invariant)의 함수로서 변형 에너지 함수 ;

$$W = W(I_1, I_2) \tag{1a}$$

$$t_i - t_k = 2(\lambda_i^2 - \lambda_k^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2(\lambda_i^{-2} - \lambda_k^{-2}) \frac{\partial W}{\partial I_2} = 2(\lambda_i^2 - \lambda_k^2) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \tag{1b}$$

연신율(stretch)의 함수로서의 변형 에너지 함수 ;

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \tag{2a}$$

$$t_i - t_k = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \lambda_k \frac{\partial W}{\partial \lambda_k} \tag{2b}$$

여기서  $i, j, k$ 는 1, 2, 3의 순환 상수(permutation constants)를 의미하며, 연신율불변량을 주 응력 방향의 연신율로 표시하면 다음과 같다.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \tag{3}$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \tag{4}$$

변형 에너지 함수의 형태는 열역학이나 분자이

론<sup>(6)</sup> 등에 의하여 결정될 수도 있지만, 실제 시험 자료들과 비교하여 보면 타당한 범위가 협소하고 그 범위 내에서도 오차가 있다. 특히 수치적으로 해를 구할 때에는 변형 에너지 함수가 시험 자료들을 어느 정도의 정밀도를 갖고 표시할 수 있는가에 의해 해의 정확도가 달라진다. 따라서 변형 에너지 함수의 형태를 미리 결정하지 말고 시험 자료에 의해 이를 가장 잘 표시할 수 있는 변형 에너지 함수의 형태를 선택한다.

본 글에서는 이를 위하여 현상학을 이용하기 때문에 이 함수의 형태는 결정되어 있지 않고, 단지 시험 자료들에 의해서 만이 결정된다.

이때 일축 인장, 순수 전단, 그리고 동일 이축 인장 등에 대한 시험을 실시해야 하는데, 이를 연신율불변량 또는 연신율의 평면에 표시하면 Fig. 1, 2와 같다.

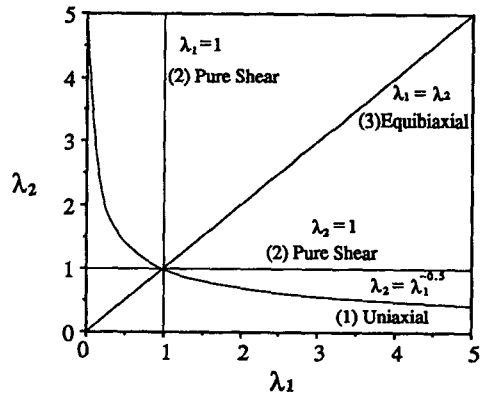


Fig. 1 Combinations of homogeneous deformations in  $\lambda_1, \lambda_2$  for incompressible material.

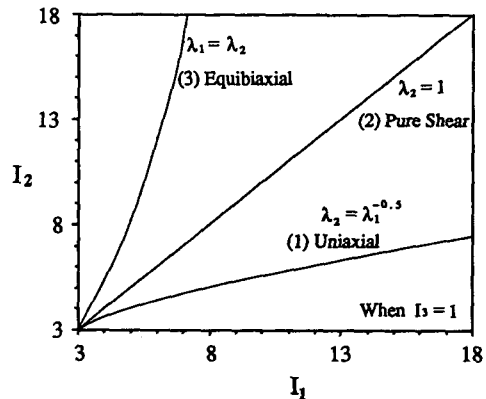


Fig. 2 Combinations of  $I_1, I_2$  of homogeneous deformations for incompressible material.

수치적인 면에서 오랜 역사를 갖고 있는 연신율 불변량의 함수로 표시되는 대표적인 변형 에너지 함수가 식(5)의 Rivlin 형태이다.

$$W(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (5)$$

여기서 항의 갯수를 증가시키면 피팅(fitting)의 특성상 시험 자료들을 잘 묘사할 수는 있지만, 시험 자료의 범위 밖에서는 맞지 않게된다. 완전 확장(complete expansion)을 위해서 Table 1에서와 같은 항의 조합이 필요하다.<sup>(1)</sup> 이러한 항을 갖는 식들은 고차항이 생략된 식(truncated equation)이 되므로, 어느 정도의 정밀도를 갖고 시험 자료에 근사적으로 맞춘 시험 관계식이 된다.

변형 에너지 함수가 주 연신율의 함수일때 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>(2)</sup>

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (6)$$

이때  $w(\lambda_i)$  ( $i=1, 2, 3$ )는 주 연신율( $\lambda_i$ )에 대하여 형태가 같은 함수이다. 이러한 사실은 많은 시험에 의하여 어느 정도의 연신율의 범위까지는 적용되지만 그 범위 밖의 연신율에 대하여는 맞지 않는다. 따라서 이는 가설(hypothesis)로 받아들여지고 있는데, 이를 Valanis-Landel의 가설이라고 한다.

그러므로 Valanis-Landel의 가설이 맞는 범위에서는 변형 에너지 함수를 분리형(separable form)으로 표시 가능하다. 이 방법을 이용하면 연신율이 물리적 의미가 있으므로 연신율불변량으로 표시할 때 보다 이해하기 쉽고, 응력의 표시가 간단해진다.

분리형 형태로 식(5)를 재 구성하면

$$w(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda \alpha_i - 1) \quad (\alpha_i, \mu_i : \text{상수}) \quad (7)$$

이 되며, 이때 지수의 범위를 자연수에서 실수까지 확장시킨 것이 Ogden 형태이다. 여기서  $N$ 은 Ogden 형태에서의 항의 갯수이며, 상수  $\alpha_i, \mu_i$ 는 물리적 안정성과 실체성 때문에, 다시 말하면 연신율의 증가에 의한 응력의 단순 증가(monotonic increase) 현상에 의해  $\mu_i \alpha_i > 0$ 이 되어야 한다.

이 함수를 이용하면 시험 자료를 1개의 항으로도 어느 정도 표시 가능하며 3개의 항으로 시험 자료를 잘 표시할 수 있다.<sup>(5)</sup>

### 3. 변형 에너지함수의 계수 결정 방법

일반적으로 쓰이는 방법은 우선 변형 에너지 함수의 형태를 결정한 다음 이를 구성 방정식에 적용하거나 변형 에너지 함수의 정의를 이용하여 계산치와 시험치의 차이를 최소화 시키는 변형 에너지 함수의 계수를 찾는 것이다. 이를 위해 여러가지 노름(norm)이 사용되는데,  $L_1$  노름은 간혹 시험 자료들이 흩어져 있을때 유리하며,  $L_2$  노름은 가장 널리 쓰이는 것으로 문헌등에서 주로 쓰이며,  $L_{\infty}$  노름은 응력의 시험적 오차를 무시할 때 이용되는데, 본 글에서는  $L_2$  노름을 이용한다.

이용될 시험자료는 주응력과 주응력 방향의 연신율이며, 변형 에너지 함수의 형태에 따라서 선형 계수 결정법과 비선형 계수 결정법으로 나눈다.

#### 3.1 선형 계수 결정

##### (1) 방법 I

식 (5)를 식 (1b)에 대입하면, 응력을 식(5)의 계수에 대한 1차 연립 방정식으로 표시할 수 있다. 일반적으로 계수의 수보다 식의 수(=시험 자료의 수)가 많으므로 선형 최소 자승(linear least square)법을 사용하여 식(5)의 계수를 얻는다.

$$S = \frac{1}{N_{\text{data}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{data}}} (\hat{t}_i - t_i)^2 \quad (8)$$

여기서  $N_{\text{data}}$ 는 전체 시험 자료의 갯수를 의미한다.

그리고 연신율이 커질수록 비선형성이 증가하므로, 연신율이 큰 경우가 작은 경우보다 식(8)의  $S$  (average squared deviation)에 큰 영향을 주기 때문에 가능하면 연신율이 큰 시험 자료를 많이 포함하여 계수를 결정한다.<sup>(6)</sup> 또한 시험의 오차는 높은 응력에서보다 낮은 응력 상태에서 크다고 알려져 있고, 가장 큰 오차(stress deviation)는 다음의 두 가지 이유에서 비교적 큰 연신율에서 주로 발생한다. 첫번째는 시험 오차의 절대량은 큰 연신율에서 가장 크고, 두번째는 변형률이 증가할수록 변형 에너지 함수의 절대값이 증가하여 오차의 크기가 커지므로, 필연적으로 큰 연신율에서 대부분 발생한다.

##### (2) 방법 II

식(1b)를 이용하지 않고 에너지의 정의를 이용

하여 식(5)만을 이용하여 식(5)의 계수를 구하는 방법도 있다. 변형 에너지 함수를 에너지의 정의를 이용하면, 시험 자료로부터 직접 변형 에너지 함수 값을 계산할 수 있다. 즉 응력에 변형률을 곱해주면 변형 에너지 함수값을 얻는다. 이 값으로부터 선형 최소 자승법을 이용하여 식(5)의 계수를 구한다.<sup>(4)</sup> 이 방법을 이용하면 방법 I 과는 달리 식(8)의 S가 항의 수에 반비례하지는 않는다.

이때 Rivlin 형태는 변형에너지 함수로 정의되며 Ogden 형태는 변형 에너지를 연신율로 미분한 함수로 정의되었기 때문에 선형 계수(예, Rivlin form)를 결정할 때에는 방법 I, II를 이용할 수 있지만, 비선형 계수(예, Ogden form)를 결정할 때에는 주로 방법 I 만을 이용한다.

Rivlin 형태에서부터 실제로 계산에 이용될 변형 에너지 함수의 형태를 얻기 위하여, Table 1에서 처럼 연신율불변량  $I_1, I_2$ 에 대한 완전 확장(Table 1의 No.1~4)형태와 연신율  $\lambda_1, \lambda_2$ 에 대한 완전 확장(Table 1의 No.5~8) 형태를 이용한다. 그리고 Table 1에서 Hines-Wilson<sup>(4)</sup>이 주장하는 항은 연신율불변량에 대한 변형 에너지값을 그려본 후 관측에 의해서 선택된 항이다. 본 글에서는 Table 1의 각 각의 형태에 대하여 방법 I 과 방법 II를 적용하였다.

3.2 비선형 계수 결정

비선형의 대표적인 예가 되는 변형 에너지 함수가 식(7)이 되는데, 이 식을 식(2b)에 대입하면 계수  $\alpha_i, \mu_i$ 에 대한 비선형 연립 방정식이 된다. 이를 공칭 응력(nominal stress)으로 표시하면 다음

과 같다.

$$F_i = \sum_{k=1}^N \mu_k (\lambda_i^{-1+\alpha_i} - \lambda_i^{-1+C\alpha_i}) \tag{9}$$

여기서 N은 Ogden형태의 항의 갯수이며, 상수 C는 -0.5(단순 인장 압축), -1.(순수전단), -2.(동일 2축인장)의 값을 갖는다.

위의 경우처럼 결정해야 되는 계수가 시험 자료의 수보다 적게 되므로  $L_2$ 노움을 최소화하는 계수를 구한다. 이때는 비선형이므로 선형 최소 자승법을 이용하지 못한다. 따라서 계수를 결정하는데 초기에는 시험 자료의 관찰에 의하거나 반복 작업을 통해 구했으나, 최적화 방법의 발전으로 인하여 Levenberg-Marquardt기법(algorithm)을 이용하면 체계적으로 구할 수 있다.<sup>(5)</sup>

이때 하나의 항만을 이용해도 어느 정도 시험치와 맞출 수 있으나 3항 정도면 모든 범위의 시험 자료들을 잘 표시할 수 있다고 한다. 이를 좀 더 체계적으로 알아보기 위하여 Table 2에서 처럼 항을 하나에서 부터 4개의 항까지 확장시켜 Table 3의 시험자료에 적용시켰다.

변형 에너지 함수의 형태는 매우 다양하고 여러 가지가 있지만 비교적 널리 알려진 형태가 Ogden 형태와 Rivlin 형태이므로 본 글에서는 이러한 변형 에너지 함수에서의 계수 결정을 주로 다루었다.

4. 가황 고무의 분류

편의상 가황 고무(vulcanized rubber)는 문헌등에 주로 쓰이는 합성 고무(synthetic rubber)와 실

Table 1 Retained coefficients of Rivlin functions(Eq. 5)

No.	Type of Approximation	Rivlin Coefficients	Remark
1	1st order Invariant	$C_{10}, C_{01}$	Mooney Form
2	2nd order Invariant	$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}$	
3	3rd order Invariant	$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}, C_{21}, C_{12}, C_{30}$	
4	4th order Invariant	$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}, C_{21}, C_{12}, C_{30}, C_{40}, C_{31}, C_{22}, C_{13}, C_{40}$	
5	1st order Deformation	$C_{10}$	neo-Hookean Form
6	2nd order Deformation	$C_{10}, C_{01}, C_{20}$	
7	3rd order Deformation	$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{30}$	
8	4th order Deformation	$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}, C_{21}, C_{40}$	
9	Haines-Wilson <sup>(4)</sup>	$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$	

Table 2. Retained coefficients of Ogden functions (Eq. 7)

No.	Type of Approximation	Ogden Coefficients
10	1term	$\alpha_1, \mu_1$
11	2terms	$\alpha_1, \mu_1, \alpha_2, \mu_2$
12	3terms	$\alpha_1, \mu_1, \alpha_2, \mu_2, \alpha_3, \mu_3$
13	4terms	$\alpha_1, \mu_1, \alpha_2, \mu_2, \alpha_3, \mu_3, \alpha_4, \mu_4$

Table 3 Materials used in this paper

Line	Max. Stretch	Material	Reference
(1)	2.6	Vulcanized Rubber	[9]
(2)	3.5	Sulfur Cured Natural Rubber	[1]
(3)	5.0	3% Sulfur Rubber	[3]
(4)	7.4	Vulcanized Rubber	[4]

제 타이어 등의 제조에 많이 쓰이는 카본 블랙(carbon black)이 첨가된 합성 고무(carbon black filled rubber)로 나눌 수 있다. 상용으로는 Mooney 형태가 주로 쓰이지만 카본 블랙이 첨가된 합성 고무를 묘사할 때에는 제한이 있고 Rivlin 에너지 함수의 항의 갯수를 증가시키면 시험 자료 밖의 범위에서는 항의 수가 적은 것보다 좋지 않은 값을 준다.

이때 합성 고무는 다음과 같은 특성을 갖고 있다.<sup>(9,10)</sup>

(가) 변형의 정도가 작을 때에는  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ 가  $(I_1, I_2)$ 의 함수가 되며,

(나) 변형의 정도가 클 때에는  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ 와  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ 값이 보다 매우 커지며,  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ 는  $I_1$ 만의 함수가 되고,

(다) 위의 두 경우 이외의 즉 보통 정도의 변형(moderate strain)에서는 Mooney 형태를 만족한다. 즉  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ 가  $(I_1, I_2)$ 의 함수가 아닌 상수가 됨을 의미한다.

이에 대하여 카본 블랙이 첨가된 합성 고무의 경우에는 전체적인  $(I_1, I_2)$ 의 영역에서의 에너지 표면의 모양은 합성 고무와 유사하지만, (나)의 경우가 변형이 그리 크지 않을 때부터 발생되기 때문에 Mooney 형태를 만족하는 영역이 상대적으로 감소하게 된다.<sup>(10)</sup>

## 5. 변형 에너지 함수의 연구

### 5.1 시험자료

본 글에서 이용된 시험 자료들은 Table 3와 같다. 이때 이용된 모든 자료는 합성 고무에 대한 것이지만, Table 3에서의 (4)의 경우처럼 큰 연신율을 갖는 합성 고무의  $(I_1, I_2)$ 에 대한 에너지 표면과 에너지를 연신율불변량으로 미분한 값들의 모양은 카본 블랙이 첨가된 합성 고무의 경우와 매우 유사하므로 Table 3에서의 (4)의 시험 결과에 대해서는 카본 블랙이 첨가된 합성 고무에 대한 시험 결과의 경향과 같다고 할 수 있다.<sup>(9,10)</sup> 그리고 Table 3에서의 (3)의 자료는 시험치가 그래프로 주어져 있으므로 숫자로 바꾸는 과정에서 시험 결과를 정확히 묘사하지는 못하였다.

Fig. 3, 4, 5, 6, 7은 시험 자료들을 이용하여  $(I_1, I_2)$ 에 대한 에너지 표면과 에너지를 연신율불변량으로 미분한 값들을 그린 것이다. 최대 연신율의 증가에 의해 4절에서 언급한 합성 고무의 특성이 나타나며 전체적인 모양은 거의 유사하므로 편의상 (1)과 (4)의 경우만을 나타내었으며,  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ 의 모양은 모든 자료에 대해 매우 비슷하기 때문에 (1)의 경우만을 나타내었다.

Rivlin과 Ogden 형태와 같은 급수 형태 이외의 함수<sup>(2,7,11)</sup>에서는 연신율불변량의 값이 커질수록 Fig. 5, 6, 7을 잘 묘사하지 못하고 있으며, 이들의

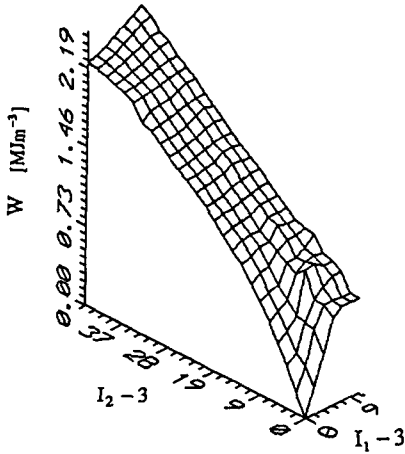


Fig. 3 Energy surface vs.  $(I_1, I_2)$  plane for the data of ref.<sup>(9)</sup>

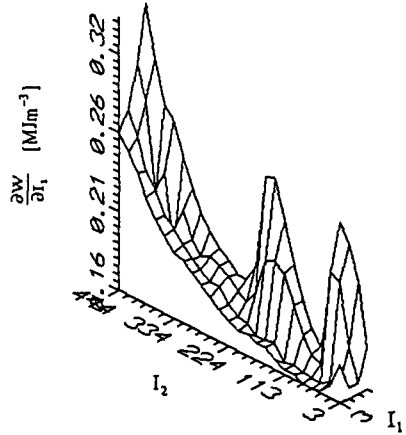


Fig. 6  $\partial W/\partial I_1$  vs.  $(I_1, I_2)$  plane for the data of ref.<sup>(4)</sup>

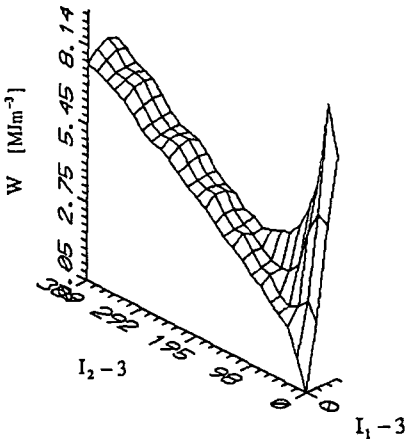


Fig. 4 Energy surface vs.  $(I_1, I_2)$  plane for the data of ref.<sup>(4)</sup>

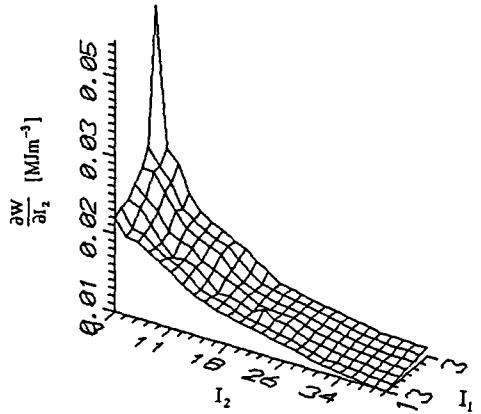


Fig. 7  $\partial W/\partial I_2$  vs.  $(I_1, I_2)$  plane for the data of ref.<sup>(9)</sup>

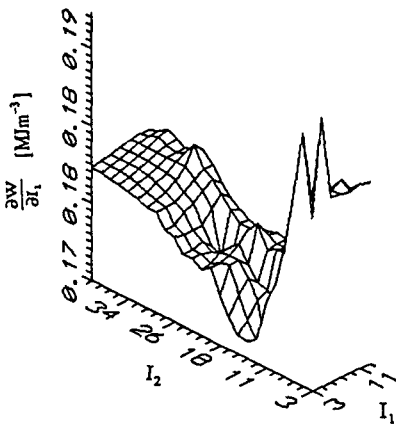


Fig. 5  $\partial W/\partial I_1$  vs.  $(I_1, I_2)$  plane for the data of ref.<sup>(9)</sup>

변형 에너지 함수를 이용할때는 Mooney형태를 이용할 때보다 시험 자료들과의 오차가 더 크다. 따라서 본 글에서는 Rivlin과 Ogden형태에 대해서만 진행하였다.

### 5.2 변형 에너지 함수의 정밀도

이때 방법 I, II를 Fig. 3, 4, 5, 6, 7를 이용하여 다시 요약하면, 방법 I은  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ 을 직접 결정하며, 방법 II는 변형 에너지 함수( $W$ )를 결정한 후 이를 이용하여  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ 과 자료들과 비교하는 것이라고 할 수 있다. 일반적으로 자료를 근사 (curve fitting)하여 얻어지는 함수를 미분하면 항

의 수와 항의 종류에 매우 민감하기 때문에, 이를 이용하면 각 자료들에 대한 Rivlin 형태에서의 최적의 항의 조합을 얻을 수 있다.

방법 I의 결과(Fig. 8의 a,b,c,d)를 자세히 살펴 보면 각각의 시험 자료에 대한 시험치와 계산치의 차이는 Rivlin 형태, 또는 Ogden 형태에서의 항의 수에 대하여 다르지만 일정한 경향을 갖고 있음을 볼 수 있다. 즉 Table 1에서의 변형(연신율)에 대한 Rivlin 형태의 완전 확장이 연신율불변량에 대한 Rivlin 형태의 완전 확장보다 좋은 결과를 주고 있다.

또한 방법 II에서 보면 어떤 항의 조합이 가장 적절한지 알 수 있는데, 위의 경우처럼 각각의 시험 자료들이 비슷한 경향(Fig. 9의 a,b,c,d)을 나타내며 공통적인 어느 항의 조합에서 최소의 오차(시험치와 계산치와의 차이)를 갖고 있음을 알 수 있는데, 이를 위의 방법 I의 결과와 비교 종합하여 보면 위의 4가지 재료에서는 Rivlin 형태의 3차 변형 확장(3rd order deformation expansion of Rivlin form, i.e. No.7 in Table 1)이 Rivlin 형태 중에서 가장 좋다고 생각된다.

그리고 Ogden 형태에 대해서 살펴보면, 하나 또는 두개의 항을 이용하여도 시험 자료와의 오차가 비교적 적다. 그러나  $(I_1, I_2)$ 에 대한  $\frac{\partial W}{\partial I_1}, \frac{\partial W}{\partial I_2}$ 을 그려보면 전체적인 모양을 묘사하지 못하며 3항부터 비교적 잘 묘사하기 때문에, 비록 시험과의 오차가 적다고 해도 하나 또는 두개의 항을 이용하지 않고 3개의 항을 갖는 Ogden 형태를 이용해야 하며, <sup>(5,9)</sup> 이는 Rivlin 형태중 Rivlin 형태의 3차 변형 확장이 가장 적은 Rivlin항을 갖고  $(I_1, I_2)$ 에 대한  $\frac{\partial W}{\partial I_1}, \frac{\partial W}{\partial I_2}$ 의 모양을 비교적 잘 묘사할 수 있다는 사실과 비교하여 볼 때 3항을 갖는 Ogden 형태가 Ogden 형태 중에서 가장 좋다고 여겨진다.

5.3 변형 에너지 함수의 정확도

5.1절에서 언급한 재료들(비선형 hyperelastic 재료)의 거동을 나타낼 때 가장 적절한 항의 조합이 Rivlin 형태의 3차 변형 확장이라는 사실을 재검토 및 확인하여 보기로 한다.

우선 단순 인장만의 시험 자료로부터 얻은 변형 에너지 함수를 이용하여 전체 거동을 예측하는 것에 대하여 살펴보면  $(I_1, I_2)$ 의 영역에서 단순 인장

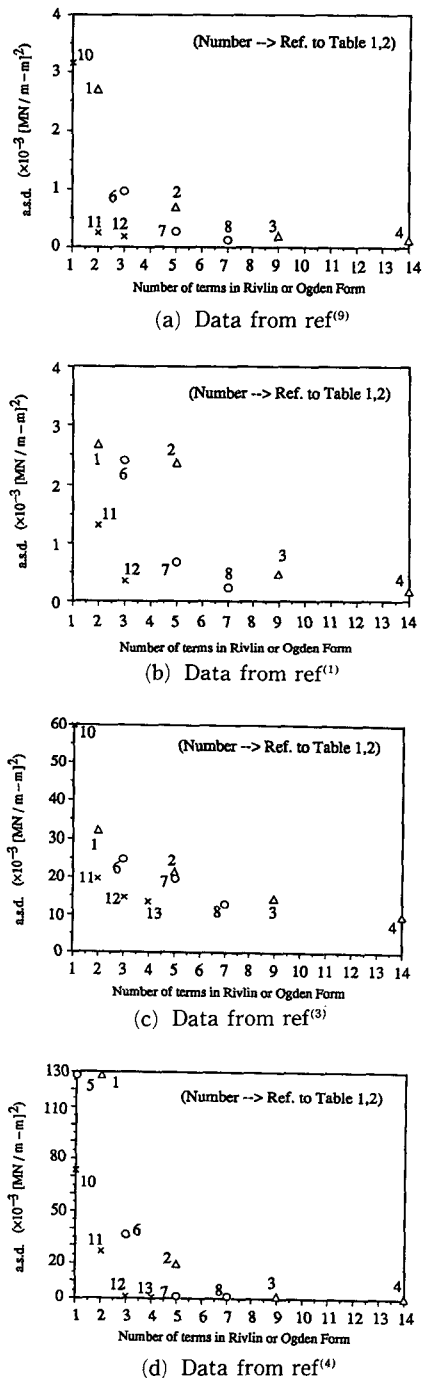
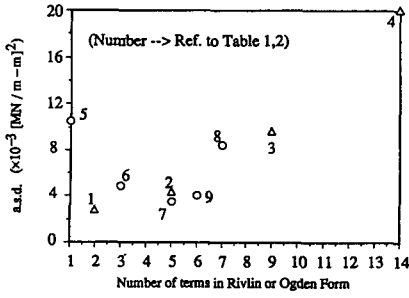
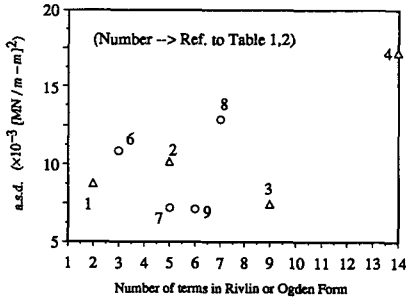


Fig. 8 (a~d) Comparisons of the average squared deviation(a.s.d.) in each experimental data for method I

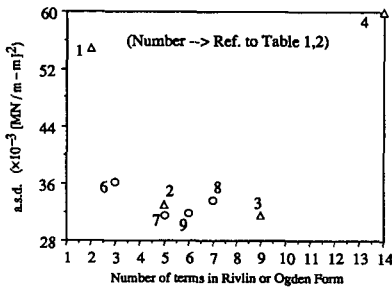
의 경우에 대한 에너지 함수의 거동은 Rivlin 형태에서  $I_1$ 만의 항으로 확장하는 것이 좋다는 것(Fig.



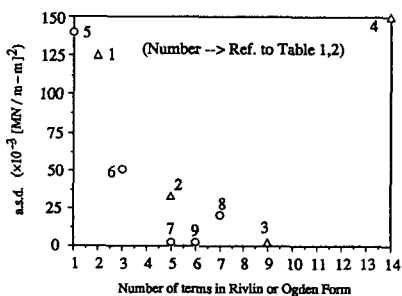
(a) Data from ref<sup>(9)</sup>



(b) Data from ref<sup>(1)</sup>



(c) Data from ref<sup>(3)</sup>



(d) Data from ref<sup>(4)</sup>

Fig. 9 (a~b) Comparisons of the average squared deviation(a.s.d.) in each experimental data for method II

2)을 알 수 있다. 확인하기 위하여 다른 모든 항의 조합에 대하여 비교하여 보아도  $I_1$ 만으로 확장하는 것에 미치지 못하여, 그 결과도 앞의 경우처럼

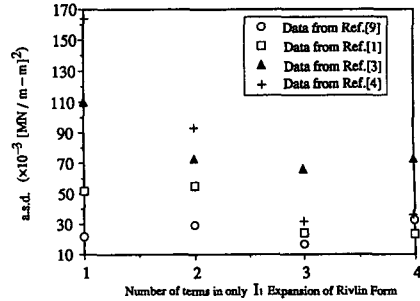


Fig. 10 Comparisons of the average squared deviation (a.s.d.) in each experimental data using strain energy function obtained from the simple extension data

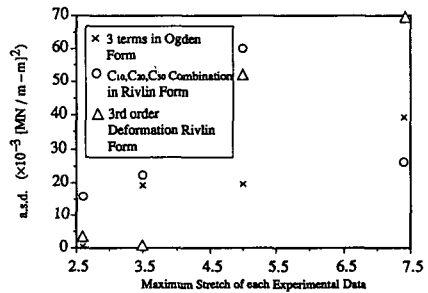


Fig. 11 Comparisons of the average squared deviation (a.s.d.) in each experimental data using strain energy function obtained from the simple extension and pure shear data

각 자료에 대하여 오차의 크기는 다르지만 Fig. 10에서처럼 공통된 유형을 갖고 있으며 최소 오차를 갖는 항은 Rivlin 형태의 3차 변형 확장 내에서 존재하고 그 항을 Rivlin 형태의 계수로 표시하면  $C_{10}, C_{20}, C_{30}$ 이다.

그리고 단순 인장과 순수 전단의 자료만으로 위의 절차를 재현하여 각 경우에 대한 결과를 Fig. 11에 나타내었다. 이 경우 가장 좋은 항의 조합이 최대 연신율의 증가에 따라  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{30}$ 에서  $C_{10}, C_{20}, C_{30}$ 으로 바뀔 수 있었다. 이는 최대 연신율의 증가에 의해 합성 고무에 대한 시험 자료의 특성이 카본 블랙이 첨가된 합성 고무의 특성<sup>(10)</sup>을 보이는 것을 간접적으로 보여 주는 것이다.

이상에서 보면 Rivlin 형태의 3차 변형 확장에 대한 항의 조합을 경계로 여분의 다른 항을 첨가하면 계수를 결정하기 위한 시험 자료 범위밖의 자료와는 오차가 커지며, 계수를 결정하기 위한 자료의 변형 유형(type of deformation)에 따라 Rivlin 형태의 3차 변형 확장의 항의 조합내에서 최적의 항



의 조합을 찾을 수 있다. 그리고 Ogden 형태에 대해서 살펴보면 3항 이내에서 최적의 항의 조합을 찾을 수 있지만 Rivlin 형태와는 달리 항의 조합을 예측할 수 없기 때문에, 일부의 시험 자료만을 이용하여 전체 거동을 예측하기에는 그리 좋지 못하다.

#### 5.4 결과 검토

본 글에서는 체계적인 방법을 통하여 Rivlin 형태의 3차 변형 확장이 우수하다는 것을 보인 반면, Haines<sup>(4)</sup>는 에너지 표면의 관찰에 의해서 Rivlin 형태에서 계수가  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$ 인 항의 조합이 우수하다고 하였다. 이는 Rivlin 형태의 3차 변형 확장의 계수가  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{30}$ 인 것과 비교하여 볼 때 본 방법의 신뢰도를 높일 수 있었다. 또한 기존의 여러 자료에서 알 수 있듯이, 같은 정도의 오차를 갖기 위해서는 연신율불변량에 대한 완전 확장보다는 물리적 의미를 갖는 연신율에 대한 완전 확장이 더 적은 수의 Rivlin항이 필요하다는 사실도 알 수 있었다.

이때 시험 자료가 합성 고무의 4가지 재료에 대한 것이지만, 결과를 보면 거의 유사한 경향을 보이고 있으므로 어느 정도 일반성은 있다고 여긴다. 그리고 간단한 시험 자료를 이용하여 전체 거동을 예측할 때 Rivlin항이  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{30}$ 에서  $C_{10}, C_{20}, C_{30}$ 으로 변한다는 것은 4절에서 언급한 합성 고무의 특성에 대한 수치적 증명이 된다.

## 6. 맺음말

일반적으로 현상 이론을 이용하면 시험 자료이외의 범위에서는 맞지 않으며, 변형 에너지 함수가 급수로 표시될 때 항이 증가할수록 시험 자료를 잘 맞출 수는 있지만 시험 자료이외의 범위에서는 맞지 않는 정도가 점점 심해진다.

본 글에서 이용된 4가지의 합성고무에서는 Rivlin형태 중에서 시험 자료를 잘 나타낼 수 있으면서도 최소의 항을 갖는 형태는 3차 변형 확장이 되며, Ogden 형태에서는 3항을 갖는 Ogden 형태가 된다.

이때 광범위한 시험 자료가 없을 때에는 변형의 유형에 따라 Rivlin 형태의 3차 변형 확장의 항 내에서 최적의 항의 조합을 찾을 수 있었다. 즉 단순 인장의 경우 최적항의 조합을 Rivlin 형태의 계수

로 표시하면  $C_{10}, C_{20}, C_{30}$ 이며, 단순 인장과 순수 전단의 경우에는 최대 연신율의 증가에 의해  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{30}$ 에서  $C_{10}, C_{20}, C_{30}$ 으로 최적의 항의 조합이 바뀌지는 사실을 알 수 있었다. 이는 최대 연신율의 증가로 인하여, 합성 고무의 시험 자료의 특성이 카본 블랙이 첨가된 합성 고무의 특성을 나타내는 것을 의미한다.

## 참고문헌

- (1) James, A.G., Green, A. and Simpson, G.M., 1975, "Strain Energy Functions of Rubber I. Characterization of Gum Vulcanizates," *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 19, pp. 2033~2058.
- (2) Obata, Y., Kawabata, S. and Kawai, H., 1970, "Mechanical Properties of Natural Rubber Vulcanizates in Finite Deformation," *Journal of Polymer Science*, Vol.8, Part A-2, pp. 903~919.
- (3) Vangerko, K.C. and Treloar, L.G., 1978, "The Inflation and Extension of Rubber Tube for Biaxial Studies," *Journal of Physics D*, Vol.11, pp. 1969~1978.
- (4) Haines, D.W. and Wilson, W.D., 1979, "Strain Energy Density Function for Rubberlike Materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 27, pp. 345~360.
- (5) Twizell, E.H. and Ogden, R.W., 1983, "Non-linear Optimization of the Material Constants in Ogden's Stress-Deformation Function for Incompressible Isotropic Elastic Materials," *Journal of Australian Mathematical Society Series B*, Vol. 24, pp. 424~434.
- (6) Treloar, L.R.G., 1975, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford University Press.
- (7) Valanis, K.C. and Landel, R.F., 1967, "The Strain Energy Function of a Hyperelastic Material in Terms of the Extension Ratios," *Journal of Applied Physics*, Vol.38, No. 7, pp. 2997~3002.
- (8) Ronald, E.B.S., 1988, "Determining the Parameters of Elastic Strain Energy Functions," Master Thesis, The University of Texas at Austin.
- (9) Jones, D.F. and Treloar, L.R., 1975, "The

- Properties of Rubber in Pure Homogeneous Strain," *Journal of Physics D*, Vol.8, pp. 1285~1304.
- (10) Yeok, O.H., 1990, "Characterization of Elastic Properties of Carbon Black Filled Rubber Vulcanizates," Meeting of the Rubber Division, American Chemical Society.
- (11) Peng, T.J. and Landel, R.F., 1972, "Stored Energy Function of Rubberlike Materials Derived from Simple Tensile Data," *Journal of Applied Physics*, Vol. 43, No. 7, pp. 3064~3067.
- (12) Atkin, R.J. and Fox, N., 1980, *An Introduction to the Theory of Elasticity*, Longman Mathematical texts.
- (13) Ogden, R.W., 1984, *Nonlinear Elastic Deformations*, Ellis Horwood Ltd. Chichester, England.
- (14) Spencer, A.J.M., 1980, *Continuum Mechanics*, Logman Mathematical texts.