

〈論 文〉

유전적분형 물성방정식에 근거한 선형 점탄성문제의 시간영역 유한요소해석

심우진* · 이호섭**

(1991년 12월 9일 접수)

Time-Domain Finite Element Formulation for Linear Viscoelastic Analysis Based on a Hereditary Type Constitutive Law

W.J. Sim and H.S. Lee

Key Words : Viscoelastic(점탄성), Hereditary Integral(유전적분), Semidiscrete Approximation (반-분리 근사해석), Correspondence Principle(상응원리), Viscoelasticity Matrix (점탄성 물성행렬), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

A new finite element formulation based on the relaxation type hereditary integral is presented for a time-domain analysis of isotropic, linear viscoelastic problems. The semi-discrete variational approximation and elastic-viscoelastic correspondence principle are used in the theoretical development of the proposed method. In a time-stepping procedure of final, linear algebraic system equations, only a small additional computation for past history is required since the equivalent stiffness matrix is constant. The viscoelasticity matrices are derived and the stress computation algorithm is given in matrix form. The effect of time increment and Gauss point numbers on the numerical accuracy is examined. Two dimensional numerical examples of plane strain and plane stress are solved and compared with the analytical solutions to demonstrate the versatility and accuracy of the present method.

기 호 설 명

<p>x : 직교좌표계의 공간벡터</p> <p>t, τ : 시간변수</p> <p>$\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$: 응력, 변형도</p> <p>$\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}$: 편차응력, 편차변형도</p> <p>u_i : 변위</p> <p>\bar{T}_i : 표면력에 관한 경계조건</p> <p>δ_{ij} : Kronecker delta</p> <p>$H(t)$: Heaviside 단위계단함수</p> <p>$K_0, G_0, \alpha, \lambda$: 이완함수의 상수들</p>	<p>$K(t)$: 탄성문제에서 체적계수에 해당하는 이완함수</p> <p>$G(t), \lambda(t)$: 탄성문제에서 Lamé 상수에 해당하는 이완함수</p> <p>$*$: Stieltjes convolution 기호</p> <p>n_i : 단위의외향수직벡터 성분</p> <p>s : Laplace 변환변수</p> <p>$0^-, 0^+$: zero의 바로 전과 후</p> <p>E, ν : 영 계수, 프와송 비</p> <p>Γ, Ω : 경계면, 영역</p> <p>t_R : 지연시간</p> <p>$\mathcal{O}_n(t)$: 시간분포함수</p>
--	---

*정회원, 금오공과대학 기계설계학과

**정회원, 금오공과대학 기계설계학과 대학원

- ΔT : 시간증분
- $N\Delta T$: 현시간
- $[D]$: 재료의 물성행렬
- $\{F\}$: 힘벡터
- $[K(\Delta T)]$: 등가강성행렬
- $\{u\}$: 변위행렬
- $\{\sigma\}$: 응력행렬
- $\{\varepsilon\}$: 변형도행렬
- $(\cdot)_{,j}$: j 방향 편미분
- r : 임의의 반경
- a, b : 내경, 외경
- p : 내압
- σ_θ, σ_r : 원주방향과 반경방향의 응력

상첨자

- : Laplace 변환된 함수
- r : Transpose
- N : 현시간 절점
- n : 임의의 시간 절점

1. 서 론

점탄성 이론의 응용분야로는 로켓트의 고체연료, 원자력 발전소의 콘크리트 압력용기, 기계요소로서의 플라스틱, 중합체(polimer), 생체공학분야, 터널 및 지반과 같은 지질학적 문제 등이 있다. 이런 점탄성문제의 해법으로는 크게 이론해석법,^(1,2) 실험해석법(광탄성)⁽³⁾ 그리고 수치해석법(유한요소법,⁽⁴⁻⁸⁾ 경계요소법^(9,10) 등으로 분류할 수 있으며, 등은, 등방성, 선형 점탄성론의 이론해석과 수치해석의 경우에는 탄성-점탄성 상응원리(the elastic-viscoelastic correspondence principle)가 주로 이론적 바탕을 이룬다.

등방성, 선형 점탄성문제의 수치해석법은 다시 Laplace영역해석법^(8,9)과 시간영역해석법^(4-7,10)으로 구별할 수 있으며 시간영역에서의 유한요소법에 의한 해석은 크게 유전적분이라고 알려진 적분식을 기초로 하는 경우⁽⁴⁾와 응력-변형률에 관한 미분식(구성방정식)을 기초로 하는 경우⁽⁵⁻⁷⁾가 있다. 전자의 경우에는 하중경로에 따른 모든 데이터가 기억되어야 하며 후자의 경우에는 시간증분을 작게 하여야 수렴성 및 정확도가 향상되므로 많은 계산시간이 소모되는 것이 문제점으로 지적될 수가 있다. 그러나 재료의 물성행렬이 지수함수로서 표시

가능한 경우에는 유전적분이라도 전 시간단계의 계산으로서 그 다음 시간절점의 미지 값을 구할 수가 있다. 본 논문은 전자에 해당되는 논문으로 Zienkiewicz 및 Watson⁽⁴⁾이 하중변화에 따른 응력 증분을 탄성 FEM으로 구하고서 프와송 비가 일정하다는 가정을 하여 지연형 물성방정식을 풀어 변형도를 구하는데 반하여, 본 논문에서는 이완형 물성방정식을 바탕으로 하며 프와송 비가 일정하다는 가정을 하지 않는다. 또한 점탄성 지배방정식에 변분원리를 적용하고 유도되어진 식에 유한요소해법을 사용하여 시스템 기본해석을 위한 연립방정식을 유도한다. 이와함께 점탄성 물성함수의 유도 및 응력계산을 위한 공식과 과정도 설명한다. 제시된 방법론의 타당성 및 정확성을 보이기 위해서 평면응력 및 평면변형 문제의 변위 및 응력을 수치해석하여 이론해와 비교 검토하며, 아울러 시간증분의 변화와 Gauss points 수가 수치정확도에 끼치는 영향을 조사한다.

2. 변분 공식화(Variational Formulation)

등방성, 선형 점탄성문제 해석을 위한 변분공식화는 지배방정식에 공간 장함수(spatial field function)에 관한 변분을 곱해서 영역적분을 취하여 구한다. 즉,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sigma_{ij,j}(x,t) + f_i(x,t) \right\} \delta u_i(x) d\Omega = 0 \quad (1)$$

여기서, $\sigma_{ij}(x,t)$ 는 응력, $f_i(x,t)$ 는 체적력(body force), x 는 공간벡터, t 는 시간변수를 의미하며 위의 식(1)과 같은 표현은 semi-discrete variational approximation이라 알려져 있다.⁽¹¹⁾ 한편 선형, 점탄성 재료의 응력-변형도 관계식(혹은 물성방정식)은 다음처럼 이완형과 지연형 두가지로 표현할 수가 있다.^(12,13)

$$\sigma_{ij}(x,t) = D_{ijk1}(t) * d\epsilon_{k1}(x,t) \quad (2a)$$

$$\epsilon_{ij}(x,t) = C_{ijk1}(t) * d\sigma_{k1}(x,t) \quad (2b)$$

여기서, $D_{ijk1}(t)$ 과 $C_{ijk1}(t)$ 는 점탄성 재료의 이완(relaxation)과 지연(retardation) 특성을 나타내는 물성함수이며, *는 stieltjes convolution을 의미한다. 등방성 점탄성재료의 경우에 식(2a)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x,t) &= 2G(t) * d\epsilon'_{ij}(x,t) \\ &+ \delta_{ij}K(t) * d\epsilon_{mm}(x,t) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} &= 2G(t) * d\epsilon_{ij}(x,t) \\ &+ \delta_{ij}\lambda(t) * d\epsilon_{mm}(x,t) \end{aligned} \quad (3b)$$

여기서, $G(t)$, $K(t)$ 및 $\lambda(t)$ 는 이완함수들로서 5 절을 참조하고, $\epsilon_{mm} = u_{m,m} = \text{div } u$ 는 정수압변형률, 그리고 $K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}G(t)$ 이다.

식(1)에 체적력이 없을 경우에 다음처럼 된다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(x,t) \delta u_i(x) d\Omega = 0 \quad (4)$$

여기서, $\sigma_{ij,j} \delta u_i = (\sigma_{ij} \delta u_{i,j})_{,j} - \sigma_{ij} \delta u_{i,j}$ 이므로 이를 위의 식(4)에 대입하면

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega = 0 \quad (5)$$

이 된다. 그리고

$$\sigma_{ji} \delta u_{i,j} = \delta_{ji} \delta u_{i,j} = \sigma_{ji} \delta u_{j,i} = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (6a)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6b)$$

이므로 식(6a)와 경계에서의 표면력에 관한 경계 조건 $\sigma_{ij}(x,t) n_j(x) = \tilde{T}_i(x,t)$ 을 식(5)에 대입하면 다음처럼 된다.

$$\int_{\Gamma} \tilde{T}_i(x,t) \delta u_i(x) d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x,t) \delta \epsilon_{ij}(x) d\Omega = 0 \quad (7)$$

식(7)에 식(2a)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ijk1}(t) * d\epsilon_{kl}(x,t) \delta \epsilon_{ij}(x) d\Omega \\ = \int_{\Gamma} \tilde{T}_i(x,t) \delta u_i(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

그리고 지수(index) k 와 l 은 서로 바뀌어도 상관 없으므로(symmetric) 식(8)은 다음처럼 쓸 수가 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ijk1}(t) * du_{k,1}(x,t) \delta u_{i,j}(x) d\Omega \\ = \int_{\Gamma} \tilde{T}_i(x,t) \delta u_i(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

3. Finite element Method with Semi-Discrete Approximation

만약 변위와 표면력이 시간과 공간변수의 함수일 때 그 함수들은 근사적으로 다음처럼 시간함수와

공간함수의 곱의 시간축에 따른 합으로 표현할 수가 있다.

$$u_i(x,t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) u_i^n(x) \quad (10a)$$

$$t_i(x,t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) t_i^n(x) \quad (10b)$$

여기서, $\Phi_n(t)$ 와 $u_i^n(x)$ 는 시간구간 $(n-1)\Delta T \leq t \leq n\Delta T$ 에서 $u_i(x,t)$ 의 시간과 공간함수를 의미한다. 식(10a)를 식(9)에 대입하고 시간함수를 적분 기호 밖으로 끄집어 내어 정리하면

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{n=1}^N D_{ijk1}(x) * d\Phi_n(t) \right\} \int_{\Omega} u_{k,1}^n(x) \delta u_{i,j}(x) d\Omega \\ = \int_{\Gamma} \tilde{T}_i(x,t) \delta u_i(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

이 된다. 그리고 경계면에서 $\tilde{T}_i(x,t) = \tilde{T}_i(x)H(t)$ 의 경우, 식(11)에서 등식좌우의 적분항은 탄성문제의 계산과 꼭 같음을 알 수가 있다. 한편 식(11)의 좌항 괄호 내의 시간함수의 적분계산은 다음처럼 전개되어 진다.

$$\begin{aligned} D_{ijk1}(t) * d\Phi_n(t) &= \Phi_n(t) * dD_{ijk1}(t) \\ &= \int_{0^+}^t \Phi_n(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} D_{ijk1}(\tau) d\tau \\ &= \Phi_n(t) D_{ijk1}(0^+) \\ &+ \int_{0^+}^t \Phi_n(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} D_{ijk1}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서 $\Phi_n(t-\tau)$ 는 $(n-1)\Delta T \leq t-\tau \leq n\Delta T$ 에서 성립하므로 $t-n\Delta T \leq \tau \leq t-(n-1)\Delta T$ 범위에서 $\Phi_n(t-\tau)$ 값이 존재한다. 따라서, 식 전개에 있어서 식(12)을 사용하는 것 보다는 부분적분하여 얻어지는 다음식을 이용하는 것이 편리하다.

$$\Phi_n(t) D_{ijk1}(0^+) - \int_{0^+}^t \Phi_n(t') \frac{\partial}{\partial t'} D_{ijk1}(t-t') dt' \quad (13)$$

식(13)의 시간적분항 계산에 앞서 시간축의 분할과 그리고 각 시간구간에서의 분포함수 $\Phi_n(t)$ 에 대한 가정으로서 시간축은 등간격으로 나뉘어 졌으며 각 시간 구간에서 $\Phi_n(t)$ 는 일정하다고 한다. 즉,

$$t = t_N = \sum_{n=1}^N \Delta T = N\Delta T \quad (14)$$

$$\begin{cases} \Phi_n(t) = 1 & (n-1)\Delta T \leq t \leq n\Delta T \\ \Phi_n(t) = 0 & \text{그 외의 구간} \end{cases} \quad (15a)$$

혹은

$$\Phi_n(t) = H(t - (n-1)\Delta T) - H(t - n\Delta T) \quad (15b)$$

위의 가정에서 시간축은 등간격으로 하지 않을 수 있으며 또한, 각 시간 구간에서 $\Phi_n(t)$ 는 선형 혹은 그 이상의 차수로써 표현할 수도 있다. 식(13)의 적분항을 전개한다.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \Phi_n(t') \frac{\partial}{\partial t'} D_{ijk1}(t-t') dt' \\ &= \left[\int_{0^+}^{\Delta T} + \int_{\Delta T}^{2\Delta T} + \cdots + \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} + \cdots + \int_{(N-1)\Delta T}^{N\Delta T} \right] \cdot \\ & \quad \{ \Phi_n(t') \frac{\partial}{\partial t'} D_{ijk1}(t-t') \} dt' \\ &= \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \frac{\partial}{\partial t'} D_{ijk1}(t-t') dt' \\ &= [D_{ijk1}(t-t')]_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \\ &= [D_{ijk1}(t-n\Delta T) - D_{ijk1}(t-(n-1)\Delta T)] \\ &= [D_{ijk1}\{(N-n)\Delta T\} - D_{ijk1}\{(N-n+1)\Delta T\}] \end{aligned} \quad (16)$$

식(16)을 식(13)에 대입하고 그 결과를 $D'_{ijk1}(n\Delta T)$ 라고 하자. 즉,

$$\begin{aligned} D'_{ijk1}(n\Delta T) &= \Phi_n(t) D_{ijk1}(0^+) \\ & \quad - [D_{ijk1}\{(N-n)\Delta T\} \\ & \quad - D_{ijk1}\{(N-n+1)\Delta T\}] \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, t 는 현재시각이므로 $\Phi_n(t)$ 는 $n=N$ 에서만 1이고 n 이 N 보다 작은 시간절점에서 zero가 된다. 식(17)을 이용해서 식(11)은 다음처럼 변경된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} [\delta u_{i,j}(x) D'_{ijk1}(n\Delta T) u_{k,1}^n(x)] d\Omega \\ &= \int_r [\tilde{T}_i(x,t) \delta u_i(x)] dF \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)을 행렬식으로 다음처럼 표현할 수가 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} [B]^T [D'(n\Delta T)] [B] d\Omega \{u\}^n = \{F\}^N \quad (19) \\ & \int_{\Omega} [B]^T [D'(N\Delta T)] [B] d\Omega \{u\}^N \\ &= \{F\}^N - \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega} [B]^T [D'(n\Delta T)] [B] d\Omega \{u\}^n \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)의 $[D'(N\Delta T)]$ 는 식(17)에서 n 대신 N 을 대입함으로써 구해진다. 즉,

$$\begin{aligned} [D'(N\Delta T)] &= [D(0^+)] - [D(0^+) - D(\Delta T)] \\ &= [D(\Delta T)] \end{aligned} \quad (21)$$

식(21)을 식(20)의 좌변에 대입하여 다시쓰면

$$\int_{\Omega} [B]^T [D(\Delta T)] [B] d\Omega \{u\}^N$$

$$= \{F\}^N - \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega} [B]^T [D'(n\Delta T)] [B] d\Omega \{u\}^n \quad (22)$$

혹은

$$[K(\Delta T)] \{u\}^N = \{F\}^N - \sum_{n=1}^{N-1} [K(n\Delta T)] \{u\}^n \quad (23)$$

식(22), (23)에서 등호 우측 \sum 항의 N 은 $N \geq 2$ 인 양의 정수이어야 한다.

그리고

$$[K(\Delta T)] = \int_{\Omega} [B]^T [D(\Delta T)] [B] d\Omega \quad (24)$$

식(23)에서 N 은 현 시각을 의미하고 n 은 임의의 시각을 의미하는데, 시간축이 등간격으로 나뉘어져 있을 때 등가강성행렬 (equivalent stiffness matrix) $[K(\Delta T)]$ 는 일정하므로 매 시각에서의 $\{u\}^N$ 은 등호우측의 $(N-1)$ 유전효과 (hereditary effect) 계산만을 보충함으로써 간단히 계산된다.

4. 응력계산

등방성, 선형 탄성론에서의 응력-변형도 관계식은 다음과 같은 행렬식으로 표현될 수 있다. 즉,

$$\{\sigma\} = [D(E, \nu)] \{\epsilon\} \quad (25)$$

한편, 등방성 선형 점탄성론에서의 응력-변형률 관계식은 상응원리를 이용해서 다음처럼 쓸 수가 있다.

$$\{\bar{\sigma}(x,s)\} = [D(s\bar{E}, s\bar{\nu})] \{\bar{\epsilon}(x,s)\} \quad (26a)$$

$$= \left[\frac{1}{s} D(s\bar{E}, s\bar{\nu}) \right] \{s\bar{\epsilon}(x,s)\} \quad (26b)$$

여기서 $(\bar{\quad})$ 은 적분하한(lower limit)이 0⁻인 Laplace 변환함수를 의미하며 위의 식을 역변환시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\sigma(x,t)\} &= \int_{0^+}^t [D(t-\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \{\epsilon(x,\tau)\} d\tau \\ &= [D(t)] \{\epsilon(x,0)\} + \int_{0^+}^t [D(t-\tau)] \\ & \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \{\epsilon(x,\tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (27)$$

여기서, 식(27)은 식(26a)와 같음을 확인할 수 있으며, 부분적분을 통하여 다음처럼 바뀌어 표현된다.

$$\begin{aligned} \{\sigma(x,t)\}^T &= \int_0^t \{\varepsilon(x,t-\tau)\}^T \frac{d}{d\tau} [D(\tau)]^T d\tau \\ &= \{\varepsilon(x,t)\}^T [D(0)]^T - \int_0^t \{\varepsilon(x,\tau)\}^T \\ &\quad \frac{d}{d\tau} [D(t-\tau)]^T d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

식 (10a,b)에서처럼 현 시각 $t=N\Delta T$ 에서의 변형도에 대한 근사적인 표현을 다음처럼 쓸 수가 있다.

$$\{\varepsilon(x,t)\} = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \varepsilon_{i,j}^n(x) \quad (29a)$$

$$= \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \{\varepsilon(x,n\Delta T)\} \quad (29b)$$

식 (29b)를 식 (28)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \{\sigma(x,t)\}^T &= \{\varepsilon(x,t)\}^T [D(0)]^T - \sum_{n=1}^N \{\varepsilon(x,n\Delta T)\}^T \\ &\quad \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} \frac{d}{d\tau} [D(t-\tau)]^T d\tau \\ &= \{\varepsilon(x,t)\}^T [D(0)]^T - \sum_{n=1}^N \{\varepsilon(x,n\Delta T)\}^T \\ &\quad [D((N-n)\Delta T) - D((N-n+1)\Delta T)]^T \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)에서 \sum 기호는 $N=1$ 도 가능하며 N 항까지의 합을 취한다는 것이 식 (22), (23)과는 다른 점이다.

5. 등방성 선형 점탄성재료의 물성행렬

수치계산을 위하여 정수압변형시 탄성의 성질을 갖고, 전단변형시에는 3요소 Voigt 모델 (3-parameter solid, standard linear solid)^(12,13)의 거동 특성을 지니는 점탄성재료를 택한다. 즉,

$$\begin{aligned} G(t) &= G_0\{\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda t}\} \\ K(t) &= K_0 \end{aligned} \quad (31)$$

여기서, $G(t)$, $K(t)$ 는 전단과 팽창에 관한 이완 함수(relaxation function)이며 G_0 , K_0 , α , λ 는 상수이다.

(1) 평면응력 경우의 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 유도 등방성, 선형 탄성재료의 경우에 재료의 물성행렬 $[D]$ 는 다음과 같다.⁽¹⁴⁾

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서,

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)},$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{E\nu}{(1-\nu^2)},$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{이다.}$$

식 (25)와 (26b)의 비교로부터

$$[D(E,\nu)] \leftrightarrow \left[\frac{1}{s} D(s\hat{E}(s), s\hat{\nu}(s)) \right] \quad (33)$$

의 관계(상응원리)가 성립하므로 $\left[\frac{1}{s} D(s\hat{E}(s), s\hat{\nu}(s)) \right]$ 의 요소 $\hat{d}_{ij}(s)$ 를 구한다. 즉,

$$\hat{d}_{11}(s) = \hat{d}_{22}(s) = \frac{\hat{E}(s)}{(1-s^2\hat{\nu}(s)^2)}$$

$$\hat{d}_{12}(s) = \hat{d}_{21}(s) = \frac{s\hat{E}(s)\hat{\nu}(s)}{(1-s^2\hat{\nu}(s)^2)}$$

$$\hat{d}_{33}(s) = \frac{\hat{E}(s)}{2(1+s\hat{\nu}(s))} \quad (34)$$

식 (34)의 $\hat{E}(s)$, $\hat{\nu}(s)$ 는 식 (31)을 Laplace 변환시킨 $\hat{G}(s)$, $\hat{K}(s)$ 로써 탄성계수들 사이의 관계식을 이용하여 다음처럼 표시할 수가 있다.^(15,16)

$$\hat{E}(s) = \frac{9\hat{K}(s)\hat{G}(s)}{3\hat{K}(s) + \hat{G}(s)}$$

$$\hat{\nu}(s) = \frac{3\hat{K}(s) - 2\hat{G}(s)}{2s(3\hat{K}(s) + \hat{G}(s))} \quad (35)$$

여기서, $\hat{G}(s) = \frac{G_0(s+\alpha\lambda)}{(s+\lambda)}$, $\hat{K}(s) = \frac{K_0}{s}$ 이다.

식 (35)를 식 (34)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\hat{d}_{11}(s) = \hat{d}_{22}(s) = \frac{m_1s^2 + m_2s + m_3}{s(s+\gamma_1)(s+\gamma_2)}$$

$$\hat{d}_{12}(s) = \hat{d}_{21}(s) = \frac{n_1s^2 + n_2s + n_3}{s(s+\gamma_1)(s+\gamma_2)}$$

$$\hat{d}_{33}(s) = \frac{G_0(s+\alpha\lambda)}{s(s+\lambda)} \quad (36)$$

위 식에서 상수들 $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, \gamma_1$ 및 γ_2 는 부록을 참조한다. 식 (36)을 Laplace 역변환시키면 시간영역에서의 점탄성 물성함수 $[D(t)]$ 의 요소들을 다음처럼 얻는다. 즉,

$$\begin{aligned} d_{11}(t) &= d_{22}(t) = p_1 + p_2e^{-\gamma_1t} + p_3e^{-\gamma_2t} \\ d_{12}(t) &= d_{21}(t) = q_1 + q_2e^{-\gamma_1t} + q_3e^{-\gamma_2t} \\ d_{33}(t) &= w_1 + w_2e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 계수들 $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, w_1$ 및 w_2 는 부록을 참조한다.

(2) 평면변형 경우의 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 유도
 앞의 (1)절에서 행한 절차와 같은 방법으로 진행
 하면 평면변형에 대한 물성행렬 $[D(t)]$ 의 요소를
 다음처럼 얻는다.

$$\begin{aligned} d_{11}(t) &= d_{22}(t) = p_4 + p_5 e^{-\epsilon^1 t} + p_6 e^{-\epsilon^2 t} \\ d_{12}(t) &= d_{21}(t) = q_4 + q_5 e^{-\epsilon^1 t} + q_6 e^{-\epsilon^2 t} \\ d_{33}(t) &= w_1 + w_2 e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서 계수들 p_4, p_5, p_6, q_4, q_5 및 q_6 는 부록을 참
 조한다.

6. 수치계산 예

수치해를 구하기 위해 등매개변수 사각형 2차 유
 한요소를 사용하여 평면응력과 평면변형의 문제를
 해석하였다. 이때 사용된 데이터는 Table 1과 같
 으며 t_R 은 지연시간(retardation time)으로 $\alpha\lambda^{-1}$ 과
 같다.

(1) 일정 두께의 내압을 받는 원반:

Fig. 1에는 일정크기의 내압 p 를 받는 원반(b/a

Table 1 Constants of relaxation functions

G_0	K_0	α	λ	t_R
480	1280	0.25	0.4	10

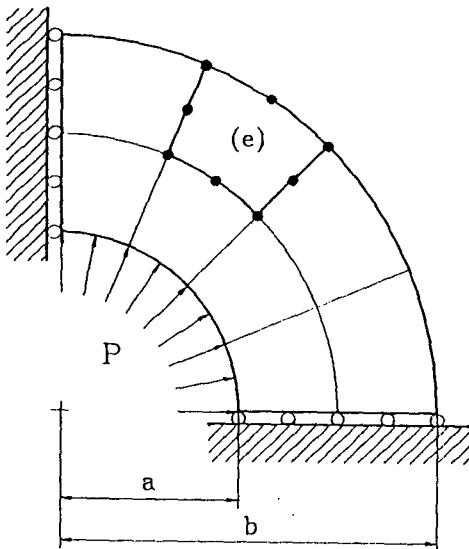


Fig. 1 Finite element mesh shape of a circular hollow disk

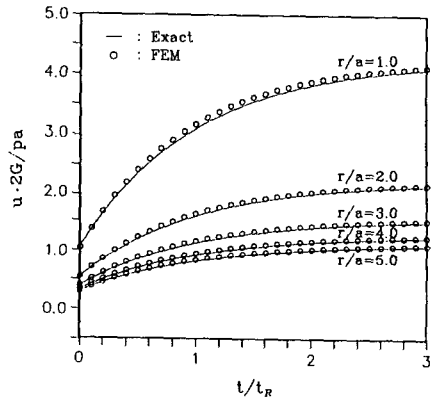


Fig. 2 Radial displacement of a viscoelastic hollow disk subject to constant internal pressure

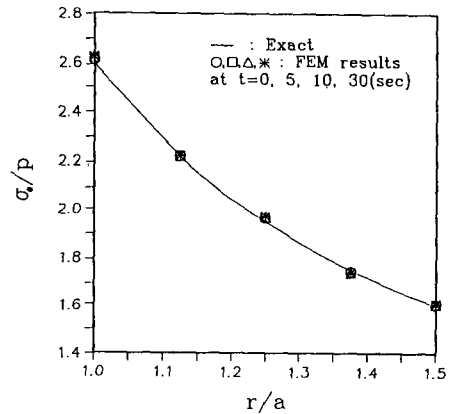


Fig. 3 Tangential stress of a viscoelastic hollow disk subject to constant internal pressure

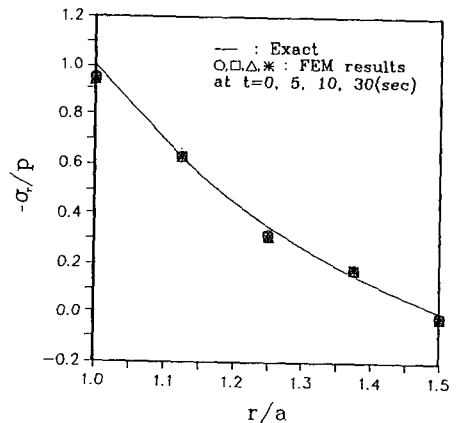


Fig. 4 Radial stress of a viscoelastic hollow disk subject to constant internal pressure

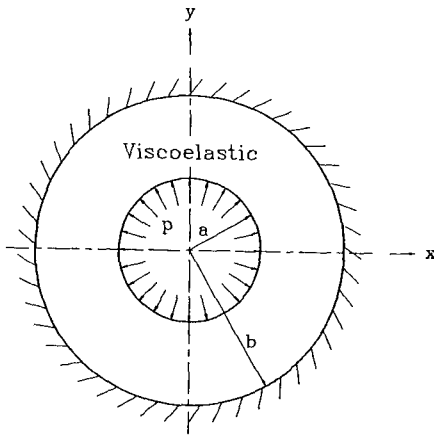


Fig. 5 Viscoelastic hollow cylinder with a fixed outer radius under constant internal pressure

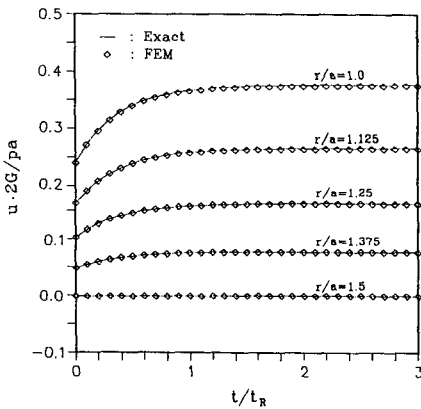


Fig. 6 Radial displacement of a fixed viscoelastic hollow cylinder under constant internal pressure

=5)의 수치해석을 위한 mesh 형상이 그려져 있으며, Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4에는 반경방향의 변위, 접선 및 법선방향의 응력들이 무차원화 되어 이론해⁽¹⁵⁾와 비교 되어져 있다. 계산결과들이 주어진 mesh 형상에 대하여 $\Delta T=0.5, 1.0(\text{sec})$ 및 $2 \times 2, 3 \times 3$ Gauss 수치적분 경우에 대하여 검토되어졌다. 결과로써 시간중분은 수치정확도에 많은 영향을 끼친다는 것이 밝혀졌으며, 변위계산에 있어서 3×3 수치적분이 2×2 Gauss 수치적분에 비하여 큰 장점이 없음이 조사 되어졌다(이는 내압을 받는 긴 원통의 경우에도 해당된다). Fig 2, Fig. 3, Fig. 4 는 2×2 Gauss 수치적분과 $\Delta T=0.5\text{sec}$ 경우에 대한 결과이다.

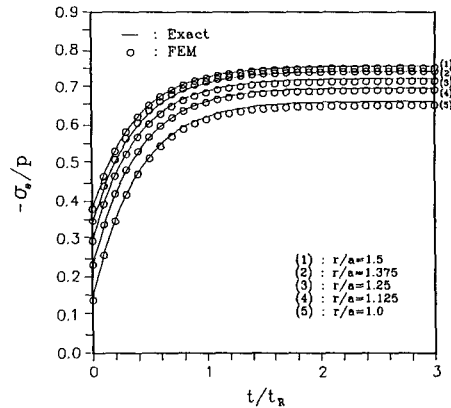


Fig. 7 Tangential stress of a fixed viscoelastic hollow cylinder under constant internal pressure

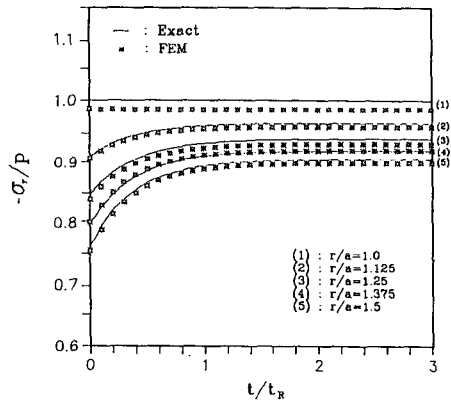


Fig. 8 Radial stress of a fixed viscoelastic hollow cylinder under constant internal pressure

(2) 외측면이 고정된 긴 원통 :

Fig. 5 에서 처럼 외측표면($r=b$)이 고정된 긴 원통이 일정크기의 내압 p 를 받고 있다. Fig. 1 과 같은 mesh 형상을 이용한 변위 및 응력해석의 수치결과를 이론해⁽¹⁷⁾와 비교하여 Fig 6, Fig 7, Fig 8 에 무차원화 시켜서 그렸다. 응력계산의 정확도를 높이기 위해서 3×3 Gauss 수치적분과 $\Delta T=0.5 \text{ sec}$ 로 하였다. Fig. 8에서 반경방향의 응력은 오차가 커보이나 1.5% 이하의 수치결과이다.

7. 결 론

등방성, 선형 점탄성문제의 시간영역에서 직접적

이고 일반적인 해석을 목적으로 상응원리와 반-분리 변분 근사해석(semi-discrete variational approximation) 그리고 적분형 물성방정식을 기본 바탕으로 하는 유한요소해법을 공식화 하였다. 물성방정식은 이완형으로 과거의 지연형 적분식을 바탕으로 하는 해석과는 달리 물성에 대한 특정한 가정이 필요없고 수치 알고리즘에 제한이 없다.

시간축 등분을 일정하게 하고 각 시간 구간에서 함수 값을 일정하다고 가정하였다. 그 결과 최종 시스템방정식의 등가강성계수가 일정하게 되어 시간의 진행에 따른 해를 구하는 과정에 있어서도 매 시간 작업이 과거에 계산된 결과를 새로이 등식 우측의 외력항에 포함시키는 단순한 과정이 된다. 응력계산의 알고리즘을 행렬식으로 표현 제시하였으며 점탄성 물성행렬[$D(t)$]를 유도 하였다. 시간증분 및 Gauss 수치적분이 수치 정확도에 끼치는 영향을 분석하여, 적당한 시간증분의 크기로서 $\Delta T = 0.5, 1.0 \text{ sec}$ 부근이 적합하였으며, 변위계산 경우에는 2×2 Gauss 수치적분 사용으로 충분하였으나 정확도가 높은 응력계산을 구하기 위해서 3×3 Gauss 수치적분도 필요하였다. 수치결과를 이론해와 비교함으로써 제시된 새로운 FEM 해법 이론의 타당함과 정당성을 밝혔다. 또한, 일반적으로 널리 통용되는 탄성 문제해를 구하기 위한 FEM 프로그램을 약간 수정함으로써 본 프로그램을 만들 수 있었다.

점탄성 재료의 물성함수가 지수함수로서 표기되고 그 계수들이 시간에 따라 불변할 경우에는 시스템 방정식의 유전적분을 계산하기 위하여 과거의 모든 시간절점 결과를 모두 다 저장하지 않고서도 전단계의 계산만으로 현시간 절점변수 값을 구할 수가 있게 연구가 진행 중에 있다. 이렇게 계산방법이 효율적으로 개선되면 점소성(viscoplasticity) 문제, 동점탄성(dynamic viscoelasticity) 문제 등으로의 확대 응용을 기대할 수가 있겠다.

참고문헌

- (1) Lee, E.H., 1955, "Stress Analysis in Viscoelastic Bodies," Q. Appl. Math., Vol. 13, pp. 183~190.
- (2) Lee, E.H., Radok, J.R.M. and Woodward, W. B., 1959, "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials," Trans. Soc. Rheol. III, pp. 41~59.
- (3) Daniel, I.M., 1961, "Stresses Around a Circular Hole in a Viscoelastic Plate Subjected to Point Impact on One Edge," Proc. 7th. Midw. Mech. Conf., pp. 491~507.
- (4) Zienkiewicz, O.C. and Watson, M., 1966, "Some Creep Effects in Stress Analysis with Particular Reference to Concrete Pressure Vessels," Nucl. Eng. Design, Vol. 4, pp. 406~412.
- (5) Zienkiewicz, O.C., Watson, M. and King, I.P., 1968, "A Numerical Method of Viscoelastic Stress Analysis," Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 807~827.
- (6) Zienkiewicz, O.C. and Corneau, I.C., 1974, "Viscoplasticity, Plasticity and Creep in Elastic Solids-A Unified Numerical Solution Approach," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 821~845.
- (7) Lee, S.H., 1988, "Generalized Viscoelastic Model for Creep Analysis Coupled with Plastic Deformation," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26, pp. 153~165.
- (8) Adey, R.A. and Brebbia, C.A., 1973, "Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problems," J. Eng. Mech. ASCE, pp. 1119~1127.
- (9) Kusama, T. and Mitsui, Y., 1982, "Boundary Element Method Applied to Linear Viscoelastic Analysis," Appl. Math. Modeling, Vol. 6, pp. 285~290.
- (10) Sim, W.J. and Kwak, B.M., 1990, "Time-Domain Boundary Element Formulation for Linear Viscoelasticity with Body Forces Using Particular Integrals," Boundary Elements XII Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, pp. 367~381.
- (11) Reddy, J.N., 1984, An Introduction to the FEM, McGraw-Hill, New York, p. 299.
- (12) Flügge, W., 1975, Viscoelasticity, 2nd edn., Springer-Verlag, Berlin.
- (13) Christensen, R.M., 1971, Theory of Viscoelasticity, Academic Press, New York.
- (14) Zienkiewicz, O.C., 1977, The Finite Element Method, 3rd edn., McGraw-Hill, London.
- (15) 심우진, 1986, "탄성-점탄성 상응원리를 이용한 선형 점탄성문제의 해석," 금오공과대학 논문집 제7집, pp. 17~28.
- (16) Findley, W.N. Lai, J.S. and Onaran, K., 1976, Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic

Materials, North-Holland, Amsterdam.

(17) 이호섭, 1991, 유한요소법을 이용한 시간영역에서의 선형 점탄성 문제의 해석, 석사학위논문, 금오공과대학 대학원.

부 록

● 물성행렬 요소함수들의 상수 계수들

$$m_1 = 12K_0G_0 + 4G_0^2$$

$$m_2 = 12K_0G_0\lambda + 12K_0G_0a\lambda + 8G_0^2a\lambda$$

$$m_3 = 12K_0G_0a\lambda^2 + 4G_0^2a^2\lambda^2$$

$$m_4 = 3K_0G_0 + 4G_0^2$$

$$m_5 = 3K_0G_0\lambda + 3K_0G_0a\lambda + 8G_0^2a\lambda$$

$$m_6 = 3K_0G_0a\lambda^2 + 4G_0^2a^2\lambda^2$$

$$n_1 = 6K_0G_0 - 4G_0^2$$

$$n_2 = 6K_0G_0\lambda + 6K_0G_0a\lambda - 8G_0^2a\lambda$$

$$n_3 = 6K_0G_0a\lambda^2 - 4G_0^2a^2\lambda^2$$

$$n_4 = 3K_0G_0 - 2G_0^2$$

$$n_5 = 3K_0G_0\lambda + 3K_0G_0a\lambda - 4G_0^2a\lambda$$

$$n_6 = 3K_0G_0a\lambda^2 - 2G_0^2a^2\lambda^2$$

$$a_1 = 3K_0 + 4G_0$$

$$a_2 = 3G_0$$

$$b_1 = 6K_0\lambda + 4G_0a\lambda + 4G_0\lambda$$

$$b_2 = 3G_0\lambda + 3G_0a\lambda$$

$$c_1 = 3K_0\lambda^2 + 4G_0a\lambda^2$$

$$c_2 = 3G_0a\lambda^2$$

$$\gamma_1, \gamma_2 = -\frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$$

$$\xi_1, \xi_2 = -\frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$$

$$p_1 = \frac{m_3}{a_1\gamma_1\gamma_2}$$

$$p_2 = \frac{m_1(-\gamma_1)^2 + m_2(-\gamma_1) + m_3}{\gamma_1 a_1 (\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$p_3 = \frac{m_1(-\gamma_2)^2 + m_2(-\gamma_2) + m_3}{\gamma_2 a_1 (\gamma_2 - \gamma_1)}$$

$$p_4 = \frac{m_6}{a_2\xi_1\xi_2}$$

$$p_5 = \frac{m_4(-\xi_1)^2 + m_5(-\xi_1) + m_6}{\xi_1 a_2 (\xi_1 - \xi_2)}$$

$$p_6 = \frac{m_4(-\xi_2)^2 + m_5(-\xi_2) + m_6}{\xi_2 a_2 (\xi_2 - \xi_1)}$$

$$q_1 = \frac{n_3}{a_1\gamma_1\gamma_2}$$

$$q_2 = \frac{n_1(-\gamma_1)^2 + n_2(-\gamma_1) + n_3}{\gamma_1 a_1 (\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$q_3 = \frac{n_1(-\gamma_2)^2 + n_2(-\gamma_2) + n_3}{\gamma_2 a_1 (\gamma_2 - \gamma_1)}$$

$$q_4 = \frac{n_6}{a_2\xi_1\xi_2}$$

$$q_5 = \frac{n_4(-\xi_1)^2 + n_5(-\xi_1) + n_6}{\xi_1 a_2 (\xi_1 - \xi_2)}$$

$$q_6 = \frac{n_4(-\xi_2)^2 + n_5(-\xi_2) + n_6}{\xi_2 a_2 (\xi_2 - \xi_1)}$$

$$w_1 = G_0 a$$

$$w_2 = \frac{G_0\lambda - G_0a\lambda}{\lambda}$$