

〈論 文〉

그린 함수를 이용한 가선-판토히래프 계의 운동해석

임진수*
(1991년 12월 9일 접수)

Analysis of Catenary-Pantograph Motion by Green's Function

Jinsoo Lim

Key Words : Pantograph(판토히래프), Catenary(가선)

Abstract

A new and efficient method is presented to evaluate contact force and motion of an electric railway simple catenary-pantograph system. Overhead lines are regarded as simple strings, and hangers connected to the strings are replaced with concentrated forces acting on them. The displacement of strings due to concentrated forces caused by hangers and pantograph is expressed using Green's function. A system of linear algebraic equations in terms of unknown forces is derived based upon the compatibility requirement at the location of hangers and pantograph. This procedure is more analytic in formulation compared to the existing methods such as finite difference method or normal modes method, and it is expected to be more accurate. Present method has additional advantage that it requires neither numerical differentiation nor system eigenvalues.

기호설명

c	: 현의 파동 전파속도	x_0	: $t=0$ 일때 판토히래프의 위치
f	: 판토히래프-트롤리 선의 접촉력	x_k	: 현수선 스펠내 k 번째 행거의 위치
f_{jk}	: j 번째 현수선 스펠내 k 번째 행거의 인장력	y	: 현의 변위
G	: 그린의 함수	y_j	: 현수선 j 번째 스펠의 변위
l	: 현의 길이, 현수선 스펠	Y	: 트롤리 선의 변위
L	: 트롤리 선 스펠	z	: 판토히래프 상부 질량의 변위
M	: 트롤리 스펠당 현수선 스펠의 수	δ	: 델타 함수
N	: 현수선 스펠당 행거의 수	ρ	: 현의 선밀도 또는 현수선의 선밀도
P	: 현의 장력	ρ_u	: 트롤리 선의 선밀도
q	: 현에 작용하는 분포하중	ω_i	: 현의 고유진동수 또는 현수선의 고유진동수
$u(t)$: 단위 계단 함수	Ω_i	: 트롤리 선의 고유진동수
v	: 판토히래프 주행 속도		

1. 서론

*정회원, 아주대학교 기계공학과

는 거의 예외없이 가선-판토히라프(overhead line-pantograph)가 사용되고 있으며, 현재로서는 이 방법만이 현실성 있는 유일한 방법이다. 그러나 철차 주행시 가선과 판토히라프 분리에 의한 전력 공급 중단, 접촉력 부족으로 인한 전기적 아크 등은 철차 전력 계통의 작동 장애를 초래하며, 가선의 과도한 마모나 가선에 가해지는 충격에 따라 가선 보수 유지비용은 증대된다. 한편 가선에는 감쇠가 거의 없어 진동 전파가 심하고, 철차가 고속 주행하면 발생 되는 가선의 진동도 커진다. 이러한 이유에서 고속전철 가선-판토히라프계의 진동문제는 아주 심각하며 이는 그 상업 운행속도를 제한하는 주요 요인이 된다.

전철 주행 속도가 가선의 파동 전파속도에 근접하는 고속에서는 판토히라프의 동특성이 가선의 진동이나 가선-판토히라프 사이의 접촉력 변화에 큰 영향을 미치므로 이들은 하나의 계로서 동시에 고려되어야만 한다. 이러한 경우 계의 거동을 파악하기 위하여 실험실 내에서 모델에 의한 실험을 시도하더라도 주행하는 판토히라프 상태를 구현하기 힘들며 모델의 적합성도 문제된다. 반면 실제 주행시 실험을 하려면 많은 비용과 시간이 소요될 뿐 아니라 주요 변수들에의 접근 및 측정이 어렵다. 그러므로 가선-판토히라프 계 운동을 해석할 수 있는 적절한 이론 내지 수치해석 방법은 아주 유용하게 사용될 수 있다.

Scott와 Rothman,⁽¹⁾ Hobbs,⁽²⁾ Vinayagaligam,⁽³⁾ 정대현과 최연선⁽⁴⁾ 등은 가선을 여러개의 집중질량과 이들을 연결하는 스프링으로 치환하여 다자유도 진동 모델을 수립한 다음, 얻어진 가선 각 질량과 판토히라프 질량의 운동방정식에 유한차분법을 적용 직접 수치적분하였다. 또 Heyda와 Thackray,⁽⁵⁾ Levy⁽⁶⁾ 등은 가선의 운동을 계의 정규 모우드로 표시하고 판토히라프와의 접촉력을 가선 모우드 성분으로 분해하여 해석하는 모우드 해석법을 사용하였다. Heyda에 의하면 계의 방정식은 Volterra 형식의 적분방정식이 되고, 매 시간중분마다 이 식의 해를 구하였다.

집중질량 방법을 사용하면 다양한 형태의 장치들을 모델화 하는 것이 가능하다. 그러나 이 방법은 거의 전적으로 수치계산에만 의존하므로 그 계산량이 방대하고, 집중 질량 모델과정에서 발생하는 오차 외에도 반복된 계산으로 인한 누적 오차의 위험성이 크고 그 효율성도 떨어진다. 뿐만아니라 계산

된 범위에서 접촉력을 구하는 과정이 본질적으로 수치미분에 해당되므로 계산된 접촉력에는 수치미분에 의한 오차도 포함된다. 결과적으로 유한차분법은 비교적 간단한 계의 거동을 정성적으로 예측하는 데에는 사용될 수 있으나 신뢰성이 낮아 계산 결과의 정확성을 기대하기는 힘들다.

집중질량 모델에 의한 방법에 비하여 모우드 해석방법은 그 수식화 과정중 해석적인 부분이 많아 수치계산에 의존하는 부분이 상대적으로 적으니 더 정확한 수치 결과를 기대할 수 있다. 그러나 이 방법을 사용하려면 가선 계의 고유진동수들과 이에 대응하는 정규 진동형들을 미리 계산하여야 하며, 이들 계산의 정확도는 모우드 해석 결과에 큰 영향을 미친다. 실제 적용시 수백개의 고유진동수와 고유 진동형을 계산하고있다. 이 경우 그 계산량이 많을뿐만아니라, 계산된 고유진동수 및 고유진동형의 정확도에도 의문의 소지가 있다. 더우기 가선계는 본질적으로 길이방향으로 주기적인 구조물(periodic structure) 이므로 고차의 어떤 한 고유진동형을 길이방향으로 이동한 것은 또 다른 고유진동형과 유사하고, 따라서 이들에 대응되는 고유진동수는 거의 같다. 이러한 때 해당 수치계산은 더욱 어려워진다.

본 연구에서는 그린(green)의 함수를 사용한 가선-판토히라프 계 운동 해석 방법을 개발하였다. 이 방법은 집중질량 방법이나 모우드 해석법에 비하여 더욱 해석적이며, 모우드 해석법과는 달리 고유진동수나 진동형의 계산이 필요하지 않다.

2.1 수식화

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 단순 가선과 Fig. 2와 같은 2 자유도 판토히라프를 그 해석 대상으로 잡았다. Fig. 2에서 P는 판토히라프와 트롤리 선의 접촉을 유지하기 위하여 가해주는 일정한 크기의 힘이다. 가선의 현수선과 트롤리 선은 행거에 의하여 상호 연결되어있으나 두 선을 분리하여 각각을 단순 현으로 간주하고 행거는 그 연결점에 작용하

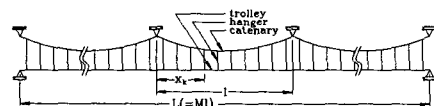


Fig. 1 Overhead-line model

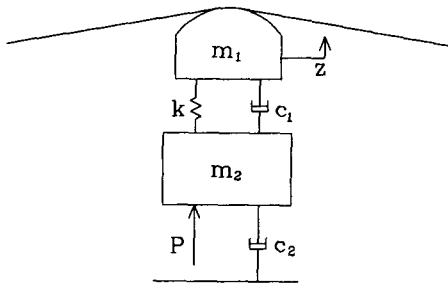


Fig. 2 2 DOF pantograph model

는 집중력으로 치환하여 해석하였다.

먼저 분포하중 $q(x, t)$ 를 받고있는 현의 운동 방정식은

$$\rho \frac{d^2 y}{dt^2} - P \frac{d^2 y}{dx^2} = q(x, t) \quad (1)$$

이다. 이 미분방정식에 대응하는 그린 함수 $G(x, t|x_0, t_0)$ 를

$$\rho \frac{d^2 G}{dt^2} - P \frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) \quad (2)$$

의 해로 정의하면 (1)식의 해는 아래와 같이 된다.⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} y(x, t) = & \int_0^{t^+} dt_0 \int_0^1 dx_0 G(x, t|x_0, t_0) q(x_0, t_0) \\ & - \rho \int_0^1 dx_0 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial t_0} \right)_{t_0=0} y(x_0, 0) \right. \\ & \left. - G(x, t|x_0, 0) \frac{d}{dt} y(x_0, t) \Big|_{t=0} \right] \\ & + P \int_0^{t^+} dt_0 \left[G \frac{\partial y}{\partial x_0} - y \frac{\partial G}{\partial x_0} \right]_{x=0}^{x=1} \quad (3) \end{aligned}$$

양단이 고정된 현에서는 식(3) 우변의 3번째 적분은 영이된다. 그린 함수 G 는 이를 현의 고유 진동 형태로 전개한 다음, 이를 다시 주파수 영역에서 복소 선적분을 하여 전개 계수를 구하면 폐 형식으로 표시되며, 양단이 고정된 현의 그린 함수 G 는 아래와 같이 된다.

$$G(x, t|x_0, t_0) = \frac{2}{\rho l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l}{\omega_i} \sin \omega_i (t - t_0) \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi x_0}{l} u(t - t_0) \quad (4)$$

$$\omega_i = \frac{i\pi c}{l}$$

이 식에서 ω_i 는 현의 고유진동수이다. 한편 현수

선에는 행거 연결점들에서 집중하중이 작용하고 있으므로 현수선 j 번째 스패의 하중 q_j 는 아래와 같이 표시된다.

$$q_j(x, t) = \sum_{k=1}^N -f_{jk}(t) \delta(x - x_k) \quad (5)$$

위 식에서 f_{jk} 는 j 번째 현수선 스패 내의 k 번째 행거의 인장력을 나타낸다. 트롤리 선에는 행거가 작용하는 힘 외에도 판토히스트와 접촉점에 작용하는 이동 집중하중이 있으니, 트롤리 선에 작용하는 하중은 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} q(x, t) = & \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N f_{jk}(t) \delta(x - jl - x_k) \\ & + f(t) \delta(x - x_0 - vt) \quad (6) \end{aligned}$$

이 식에서 $f(t)$ 는 판토히스트-트롤리 사이의 접촉력이다. 한편 판토히스트 접촉점의 변위 z 는

$$z(t) = z_0(t) + z_p(t) + \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (7)$$

와 같이 표시할 수 있다. 여기에서 $h(t)$ 는 계의 임펄스 응답이며, $z_0(t)$ 는 판토히스트 초기조건에, $z_p(t)$ 는 m_2 에 작용하는 힘 P 에 기인하는 변위이다. 행거는 강체라고 가정하면 이 위치에서 트롤리와 현수선의 변위는 같아야하고, 트롤리-판토히스트 사이에서도 이와 유사한 조건이 성립된다. 따라서

$$y_j(x_k, t) = Y(x_k + jl, t) \quad (8)$$

$$j = 1, \dots, M, k = 1, \dots, N \quad (8)$$

$$Y(x_0 + vt, t) = z(t) \quad \text{접촉시} \quad (9)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{비접촉시} \quad (10)$$

계의 초기 변위 및 초기 속도가 주어지고 $f_{jk}(t)$ 와 $f(t)$ 가 알려져있으면 식(3)~(7)으로부터 변위 $y_j(x, t)$, $Y(x, t)$, $z(t)$ 들이 계산되며, 이들 변위는 기하학적 구속조건인 (8)~(10)을 모든 순간 만족하여야 한다.

2.2 수치 해석

위 문제를 해석 하기위하여 시간 영역에서의 選點法(collocation) 이라고도 할 수 있는 수치해석 방안을 고안하였다. 즉 주어진 시간 구간 내에서 힘 $f_{jk}(t)$ 와 $f(t)$ 를 선정한 함수들의 선형 조합으로 표시하고, 이 힘들을 식(3)~(7)에 대입하여 구한 변위들이 몇개의 지정된 순간에서 (8), (9) 식 및 이들의 시간에 대한 미분식들을 만족하도록 위

조합의 계수들을 결정한다.

구체적으로는 시간 t 가 0와 Δt 사이에서

$$f_{jk}(t) = f_{jk0} + f_{jk1t} \quad j=1, \dots, M, \quad k=1, \dots, N \quad (11)$$

$$f(t) = f_0 + f_1 t \quad (12)$$

와 같이 표시된다고 가정한다. 식(11)을 (3)~(5)에 대입하면 현수선의 변위는 아래와 같이 표시된다.

$$y_j(x, t) = \frac{2}{\rho l} \sum_i \frac{l}{\omega_i^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \sum_{k=1}^N \sin \frac{i\pi x_k}{l} (-a_{i0} f_{jk0} - a_{i1} f_{jk1}) + y_{j0}(t) \quad j=1, \dots, M \quad (13)$$

$$a_{i0} = 1 - \cos \omega_i t \quad (14)$$

$$a_{i1} = t - \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t$$

트롤리 선의 변위 역시 같은 방법으로 구할 수 있으며, 이 경우 행거의 압축력 f_{jk} 뿐만 아니라 트롤리-판토그래프 사이의 접촉력 $f(t)$ 도 영향을 미친다.

$$Y(x, t) = \frac{2}{\rho_u L} \sum_i \frac{1}{\Omega_i^2} \sin \frac{i\pi x}{L} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \sin \frac{i\pi(jl+x_k)}{L} (A_{i0} f_{jk0} + A_{i1} f_{jk1}) + \frac{2}{\rho_u L} \sum_i \frac{1}{\Omega_i} \sin \frac{i\pi x}{L} (B_{i0} f_0 + B_{i1} f_1) + Y_0(t) \quad (15)$$

$$A_{i0} = 1 - \cos \Omega_i t$$

$$A_{i1} = t - \frac{1}{\Omega_i} \sin \Omega_i t$$

$$B_{i0} = \frac{1}{2R_i} \left[\sin \frac{i\pi}{L} (vt+x_0) - \sin \frac{i\pi}{L} (ct+x_0) \right] + \frac{1}{2S_i} \left[\sin \frac{i\pi}{L} (vt+x_0) + \sin \frac{i\pi}{L} (ct-x_0) \right]$$

$$B_{i1} = \left[\frac{t}{2R_i} + \frac{t}{2S_i} \right] \sin \frac{i\pi}{L} (vt+x_0) - \frac{1}{2R_i^2} \left[\cos \frac{i\pi}{L} (vt+x_0) - \cos \frac{i\pi}{L} (ct+x_0) \right] + \frac{1}{2S_i^2} \left[\cos \frac{i\pi}{L} (vt+x_0) + \cos \frac{i\pi}{L} (ct-x_0) \right]$$

$$R_i = \frac{i\pi(c-v)}{L}$$

$$S_i = \frac{i\pi(c+v)}{L}$$

식(13)의 $y_{j0}(t)$ 와 식(15)의 $Y_0(t)$ 는 식(3) 우변의 두번째 적분에 의한 변위이며 이들은 각각 해당 현

수선 스패와 트롤리의 초기상태에 의하여 결정된다. 이들의 표현식을 구하기 위하여 먼저 현수선 각 스패의 변위를 고유진동형으로 전개한다.

$$y_j(x, t) = \sum_i e_{ji}(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (16)$$

이 식에서 $t=0$ 으로 두고 식(3) 우변의 두번째 적분에 대입하면

$$y_{j0}(t) = \sum_i \left[e_{ji}(0) \cos \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \frac{de_{ji}}{dt}(0) \sin \omega_i t \right] \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (17)$$

또 식(13)과 식(16)을 비교하면

$$e_{ij}(t) = e_{ji}(0) \cos \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \frac{de_{ji}}{dt}(0) \sin \omega_i t - \frac{2}{\rho l \omega_i^2} \sum_{k=1}^N \sin \frac{i\pi x_k}{l} (-a_{i0} f_{jk0} - a_{i1} f_{jk1}) \quad (18)$$

$Y_0(t)$ 에 대해서도 같은 방법으로

$$Y(x, t) = \sum_i E_i(t) \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (19)$$

로 표시하면

$$Y_0(t) = \sum_i \left[E_i(0) \cos \Omega_i t + \frac{1}{\Omega_i} \frac{dE_i}{dt}(0) \sin \Omega_i t \right] \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (20)$$

$$E_i(t) = E_i(0) \cos \Omega_i t + \frac{1}{\Omega_i} \frac{dE_i}{dt}(0) \sin \Omega_i t + \frac{2}{\rho_u L \Omega_i^2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \sin \frac{i\pi(jl+x_k)}{L} (A_{i0} f_{jk0} + A_{i1} f_{jk1}) + \frac{2}{\rho_u L \Omega_i} (B_{i0} f_0 + B_{i1} f_1) \quad (21)$$

이 된다. 한편 판토그래프 상부 질량의 변위 z 는 트롤리와와의 접촉력이 식(12) 처럼 표시될 라플라스 변환을 이용하여 구하면 아래와 같은 형태로 표시된다.

$$z(t) = z_0(t) + z_p(t) - C_0(t) f_0 - C_1(t) f_1 \quad (22)$$

이 식에서 z_0 와 z_p 는 각각 판토그래프 초기조건과 힘 P 에 기인하는 변위이며, 나머지는 접촉력에 의한 변위이다. 식(13), (15)와 (22)에서는 각 변위들이 힘 함수 전개 계수인 f_{jk0} , f_{jk1} , f_0 , f_1 에 대한 선형 대수 식으로 표시되어있다. 이 계수들을 결정하기 위하여 $t=0$ 와 Δt 사이 모든 순간 변위가 동일하다는 (8), (9)식 대신 $t=\Delta t$ 에서의 변위와 속도

가 동일하다는 아래 조건들을 사용한다.

$$y_j(x_k, \Delta t) = Y(x_k + j\Delta t) \quad (23)$$

$$j=1, \dots, M, k=1, \dots, N$$

$$\left. \frac{d}{dt} y_j(x_k, t) \right|_{\Delta t} = z(\Delta t) \quad \text{접촉시} \quad (25)$$

$$\left. \frac{d}{dt} Y(x_0 + vt, t) \right|_{\Delta t} = z(\Delta t) \quad \text{비접촉시} \quad (26)$$

또 식(10)은 아래와 같이 표시된다.

$$f_0 = f_1 = 0 \quad \text{비접촉시} \quad (27)$$

최종적으로 식(13), (15), (22)을 (23)~(26)에 대입하고 정리하면

$$A_u = b \quad (28)$$

의 형태인 연립 선형 대수방정식을 얻을 수 있다. 이 식에서 A 는 그 크기가 $(MN+2) \times (MN+2)$ 인 정방행렬이며

$$u = \{f_{110}, f_{111}, f_{120}, f_{121}, \dots, f_{1N0}, f_{1N1}, f_{210}, f_{211}, \dots, f_{MN0}, f_{MN1}, f_0, f_1\}^T \quad (29)$$

이다. 또 식(28) 우변 벡터 b 의 요소들은 (13)식의 $y_{j0}(\Delta t)$, 식(15)의 $Y_0(\Delta t)$ 와 식(22)의 $z_0(\Delta t) + z_p(\Delta t)$ 및 그 시간 도함수들로 구성되어있다. 한편 판토프래프와 트롤리 선이 분리되어있을 때에는 식(25), (26) 대신 식(27)이 적용되므로, 이 경우 해당 연립 대수방정식은

$$A_1 u_1 = b_1 \quad (30)$$

로 표시된다. 이 식에서 u_1 과 b_1 는 각각 u 와 b 벡터의 처음 MN 요소만을 취한 MN 벡터이고 A_1 은 A 행렬 주 대각선상의 $MN \times MN$ 부분행렬을 취한 것이다.

실제 계산과정은 Fig. 3의 흐름도와 같다. 먼저 적당한 Δt 를 선택한 다음 현수선과 트롤리의 초기 조건 $e_{ij}(0)$, $E_i(0)$ 및 그 미분치를 식(17), (20)에 대입하여 (28)식의 우변 b 를 산정한다. 다음으로 식(28)의 해 u 즉 f_{jk0} , f_{jk1} , f_0 , f_1 를 구한다. 계산된 f_{jk0} , f_{jk1} , f_0 , f_1 를 식(13), (15), (22)에 대입하면 0과 Δt 사이 임의 순간에서의 계의 변위를 계산할 수 있으며, 식(18)과 (21)에 대입하여 $e_{ij}(\Delta t)$, $E_i(\Delta t)$ 를 계산하면 이들은 다음 시간 구간에서의 초기조건으로 사용된다. 매 시간 구간에 대하여서 이러한 과정을 반복하되 그때마다 식(12)으로 주어지는 판토프래프-트롤리 사이의 접촉력이 양인가를 확인한다. 만일 이 접촉력이 음이면 Δt

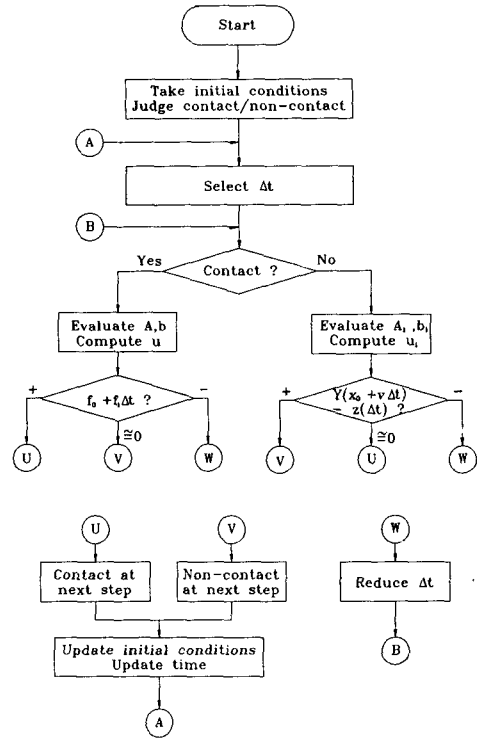


Fig. 3 Flowchart of computational procedure

를 줄여서 접촉력이 양인 시간까지만 이 계산을 수행한다. 이 시간 이후 판토프래프와 트롤리는 서로 분리되어있으니 식(28) 대신 식(30)에서 f_{jk0} , f_{jk1} 을 계산하고 f_0 과 f_1 는 영으로 둔다. 비접촉 시에도 접촉시의 유사한 과정을 매 시간 구간 반복하되 비접촉 조건

$$Y(x_0 + v\Delta t, \Delta t) > z(\Delta t) \quad (31)$$

이 만족되는가를 확인한다. 만일 이 조건이 만족되지 않으면 Δt 를 줄여서 위 식이 만족되는 시간까지만 비접촉 조건을 적용 계산하며, 이 이후에는 다시 접촉시의 식(28)을 적용한다.

식(28)의 계수행렬 A_1 은 식(23), (24)으로부터 도출되므로 A_1 각 요소들은 Δt 만의 함수이고 판토프래프의 위치 x_0 와는 상관없다. 따라서 사전에 선정된 Δt 에 대하여 A_1 행렬의 LU 성분 분해를 미리 계산하여 둔 다음, 비접촉이 지속되는 동안에는 위 선정된 Δt 를 택하면 식(30)은 역행렬 계산없이 약간의 수치계산만으로도 그 해 u_1 을 구할 수 있다. 또 A_1 은 식(28) A 의 부분 행렬이기

도하므로 접촉이 지속되는 동안에도 같은 크기의 Δt 를 택하여 A_1 의 LU 분해된 결과를 이용하면 약간의 추가적인 계산만으로도 식(28)의 해를 계산할 수 있다.

서론에서 기존 수치해석 방법들의 문제점이 지적된 바 있다. 본래의 문제는 가선-판토타그래프 복합계에 식(5)의 형태로 표시되는 이동 집중하중이 작용하는 경우이나, 행거를 양쪽 현에 작용하는 힘으로 치환하였기 때문에 계는 여러개의 단순 현으로 분해되었으며 각 현에는 식(5) 또는 (6)과 같은 힘이 작용한다. 한편 사용된 그린 함수 식(4)은 단순현의 고유진동형으로 표시되어있으니 이는 단순현에 집중 충격하중 $\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)$ 가 작용할 때의 모우드 해석 결과라고도 할 수 있다. 따라서 본 연구의 방법을 모우드 해석법의 관점에서 본다면 해석 과정에서 필요한 고유진동수와 진동형은 단순현의 것들로서 잘 알려져있으며, 식(3) 우변의 첫번째 적분이 모우드 해석에서의 가진력을 모우드 성분별로 분해하고 각 성분에 의한 변위를 취합하는 과정에 해당한다. 따라서 그린 함수를 구함으로서 해석의 많은 부분이 이론적으로 수행된 셈이다. 더우기 식(3) 우변 첫번째 항의 적분 역시 식(13), (15)에서와 같이 해석적으로 수행되었으니, 단지 행거에 의하여 연결된 조건을 나타내는 식(28) 또는 (30)만을 수치계산하면된다. 이와같이 별다른 간단화 가정들의 도입없이 해석의 많은 부분들이 이론적으로 수행되었기때문에 해석 방법의 신뢰성이 높다.

4. 수치 예 및 검토

위 방법을 적용 수치계산을 수행하였으며, 계산에 사용된 가선과 판토타그래프의 계원은 Table 1과 2에 표시되어있다. 판토타그래프의 주행속도 v 는 250km/h로 취하였으며, 이는 트롤리 선 파동 전파속도의 70%에 해당한다. 또 식(3)의 \sum 는 $i=1$ 에서 200까지 계산하였으며 Δt 값은 $\Delta t < \pi/\omega_{200}$ 이 되도록 하였다. 계산시 가선계와 판토타그래프의 모든 초기변위와 초기속도는 영으로 두었으며, 이는 판토타그래프가 정지상태에서 순간적으로 출발할 때에 해당된다. 계산 결과로서 Fig. 4에는 트롤리 선 접촉점의 변위가, Fig 5와 6에는 트롤리 선과 판토타그래프 사이의 간극 및 접촉력이 각각 도시되어 있다. 이들 그림의 수평축은 기준점으로부터의 판토타그래프 이동 거리 vt 이다. 트롤리 접촉점과 판토타

Table 1 Overhead-line parameters

Catenary wire span (l)	50 m
Number of catenary spans per trolley span (M)	6
Number of hangers per catenary span (N)	10
Location of each hanger (x_k)	2.5, 7.5, 12.5, ..., 42.5, 47.5 m
Tension of catenary	9.81×10^3 N
Tension of trolley	9.81×10^3 N
Desity of catenary (ρ_u)	0.697 kg/m
Density of trolley (ρ)	0.988 kg/m

Table 2 Pantograph parameters

Upper mass (m_1)	6.5 kg
Lower mass (m_2)	8.5 kg
Upper damping (c_1)	120 Ns/m
Lower damping (c_2)	30 Ns/m
Spring stiffness (k)	3.9×10^4 N/m
Push force (P)	54 N

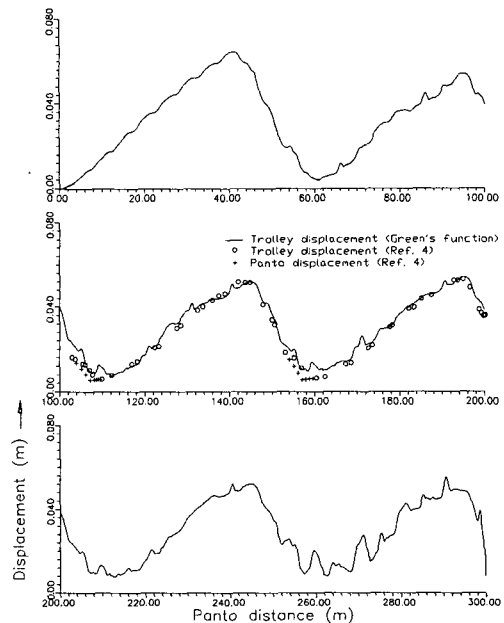


Fig. 4 Displacement at trolley contact point

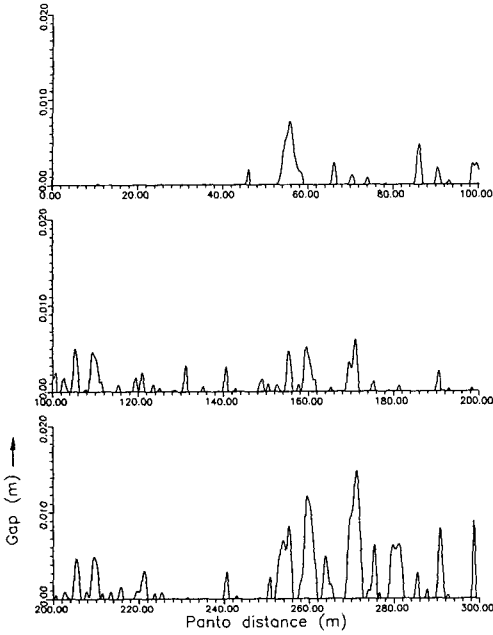


Fig. 5 Gap between trolley and upper pantograph mass

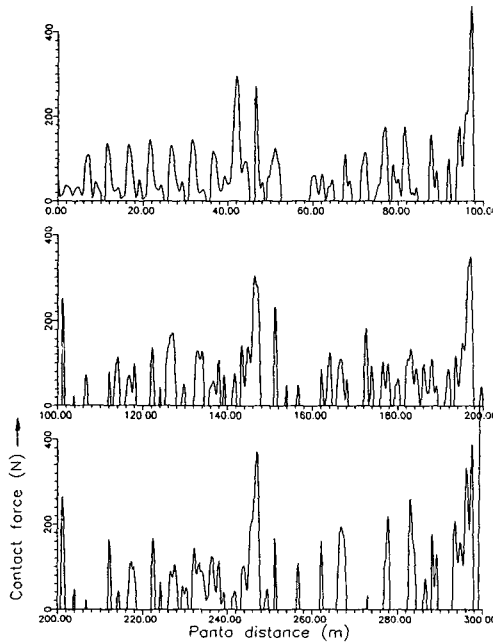


Fig. 6 Contact force

래프의 변위는 현수선 한 스패를 주기적으로 대체적으로 주기적인 변화를 하고있으며 이는 정 대현과 최 연선⁽⁴⁾의 결과와도 잘 일치한다. 또 판토프

래프가 진행함에 따라 이에 의한 진동이 현을 따라 전파되니 후반부에 갈수록 변화가 심하여짐을 알 수 있다. 접촉력 역시 전체적으로는 현수선 스패를 주기적으로 어느 정도의 반복적인 변화 양상을 나타내고있다. 즉 접촉력은 각 현수선 스패 끝으로 갈수록 증가하다가 스패 고정점을 통과한 직후 판토프와 트롤리 선은 분리되고 이후 다시 접촉하게 되며, 이러한 변화의 폭은 후반부로 갈수록 커진다. 유한 차분법을 사용한 참고문헌 1과 4의 결과에서도 동일한 현상이 발생되나 유한 차분법에 의하여 계산된 접촉력은 매순간 불연속적으로 변함에 반하여, 수치 미분을 하지않는 본 방법에 의해 계산된 접촉력은 비교적 연속적이다. 또 $\sum(\text{이선시간})/\text{총주행시간}$ 으로 정의되는 이선율(離線率)은 45.0%, 접촉력의 시간에 대한 평균치인 평균 압상력은 58.2N, 접촉력의 표준편차는 273N으로 나타났다.

5. 결론

그린 함수를 이용하여 단순 가선-판토프래프 계의 운동을 해석 할 수 있는 방법을 개발하였으며, 이에는 집중질량 모델에 의한 방법이나 모우드 해석법에 비하여 해석적인 과정이 더 많이 개입되어 있다. 본 방법은 집중질량 방법과는 달리 수치 미분 과정이 없으며, 모우드 해석과는 달리 고유진동수 또는 고유 진동형 계산이 필요하지않다. 단지 매 시간 증분마다 행거와 판토프래프 갯수 합이 2배 차수인 연립 대수방정식의 수치계산 만이 필요하다. 더우기 문제의 여타 모든 계수들은 폐형식으로 표시되어 있어 소요되는 수치계산 양이 비교적 적고 계산 결과의 신뢰성도 높다.

본 연구에서는 단순 가선, 2자유도 단일 판토프래프 계를 대상으로 하였으나 단순한 확장만으로 복합가선, 3 또는 그 이상 자유도의 판토프래프, 두개 이상의 판토프래프 계의 운동해석에도 본 방법 적용이 가능하다. 더우기 그린 함수가 알려져있는 단순 구조물들이 여러점에서 강체로 상호 연결되어있는 복합 구조물의 정적 및 동적 해석에도 본 연구의 방법을 응용하는 것이 가능하다.

참고문헌

(1) Scott, P.R. and Rothman, M., 1974, "Computer

- Evaluation of Overhead Equipment for Electrical Railroad Traction," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. AI-10, No. 5, pp. 573~580.
- (2) Hobbs, A.E.W., 1977, "Accurate Prediction of Overhead Line Behaviour," Railway Gazette International.
- (3) Vinayagalingam, T., 1983, "Computer Evaluation of Controlled Pantographs for Current Collection From Simple Catenary Overhead Equipment at High Speed," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 105, pp. 287~294.
- (4) 정대현, 최연선, 1991, "고속 전철 Catenary/Pantograph 계의 동적 응답에 대한 수치해석," 대한기계학회 '91년도 춘계학술대회논문집 (I), pp. 127~130.
- (5) Heyda, P.O. and Thackray, G.J., 1981, "Computer Evaluation of Electrical Railway Catenary Equipment by the Method of Normal Modes," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. AI-17, No. 3, pp. 321~329.
- (6) Levy, S., Bain, J. A. and Leclerc, E. J., 1968, "Railway Overhead Contact Systems, Catenary-Pantograph Dynamics for Power Collection at High Speeds," Journal of Engineering for Industry, Vol. 20, pp. 692~700.
- (7) Morse, P.H. and Feshbach, H., 1953, "Method of Theoretical Physics," Part I, McGraw-Hill, New York, pp. 834~857.