

〈論 文〉

## 열간 압연하에서 작업롤의 Thermal Crown에 관한 연구

조 진\*  
(1992년 2월 24일 접수)

### Analysis of Thermal Crown of Working Roll in Hot Strip Rolling

Cho Jin

**Key Words:** Thermal Crown(열 크라운), Working Roll(작업롤), Hot Rolling(열간 압연), Modified Bessel Function(수정 베셀 함수)

#### Abstract

In hot strip rolling, the thickness of strip cannot be retained uniform by several irregular parameters. It has been shown that the load distribution can affect only a small fraction of the excess strip crown, whereas the thermal effects of working roll are the major reason on large changes in the strip center crown during hot rolling. In this study, the temperature distribution of working roll is represented by fourier series expansion. The analytical solution of the resulting thermo-elasticity problem is obtained by love's strain function. The results which are compared with those of the finite element method show good agreements.

#### 기 호 설 명

<p><math>L</math> : Roll의 길이(=2l)  <math>D</math> : Roll의 직경(=2a)  <math>W</math> : 판재의 폭(=2b)  <math>\rho</math> : Roll의 밀도  <math>C_p</math> : Roll의 비열  <math>\alpha</math> : Roll의 열확산 계수  <math>\alpha_E</math> : Roll의 선팽창 계수  <math>\nu</math> : Poisson 비  <math>E</math> : 탄성 계수  <math>G</math> : 전단 탄성계수  <math>G_i</math> : 판재 입구 두께  <math>G_o</math> : 판재 출구 두께  <math>\phi</math> : 판재와 Roll의 접촉각도</p>	<p><math>\varphi</math> : 냉각수의 냉각각도  <math>F</math> : 압연 하중  <math>T_s</math> : 판재 온도  <math>T_r</math> : 냉각수 온도  <math>h_c</math> : 강제 대류 계수  <math>h_r</math> : 열접촉 전도 계수  <math>T_1</math> : 판재와 접촉된 부분의 Roll의 온도  <math>T_2</math> : 판재와 접촉되지 않은 부분의 Roll의 온도  <math>T</math> : 기준온도와 Roll의 온도차이  <math>U</math> : 변위 벡터  <math>r, \theta, z</math> : 원통 좌표계  <math>u, w</math> : (r, z) 방향의 변위 성분  <math>\lambda</math> : Lamé 상수  <math>\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{rz}</math> : 변형률 성분  <math>\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}</math> : 응력 성분  <math>e</math> : 체적 팽창률(= <math>\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z</math>)</p>
---	--

\*정회원, 아주대학교 기계공학과

- V : Love의 변형도 함수 (love's strain function)
- ∇ : Del
- ∇<sup>2</sup> : Laplacian
- I<sub>p</sub>(t) : 제1종 p차 수정 Bessel 함수
- H<sub>p</sub>(t) : 제2종 p차 수정 Bessel 함수

### 1. 서론

원자재로서의 판재의 수요는 매년 증대되고 있으며 열간 압연 가공은 판재의 중요한 가공수단이다. 또한, 근년에 와서는 박판을 사용하는 산업이 발전함에 따라 정밀도가 높은 제품의 수요가 증가하고 있다.

이러한 상황에서 판재의 정밀도를 높이기 위한 많은 연구가 진행되었는데, 초기에는 주로 길이 방향의 균일성에 대한 연구가 이루어졌고 각종 검출기 및 제어기술 등이 개발되어 양호한 결과가 얻어지고 있다. 그러나 판재의 두께가 일정하게 유지되지 못하는 현상에 대하여는 최근에 와서 연구가 진행되고 있으며 영향을 미치는 인자가 많아서 아직도 많은 미해결점이 남아 있는 상태이다. 이러한 인자중 큰 영향을 주는 것으로서 압연하중에 의한 작업률과 지지롤의 변형, 고온 압연재에 의한 작업률의 열변형, 압연재와 작업률 사이의 마찰로 인한 작업률의 마멸 등이 있다.

압연하중에 의하여 발생하는 크라운 현상에 대해서는 비교적 많은 연구가 진행되었으나 롤의 온도분포에 의하여 발생하는 열 크라운에 대하여는 별로 많은 연구가 진행되지 않았다. 롤의 열 크라운 해석은 먼저 롤의 온도분포를 구하고 이 온도분포에 따른 열-탄성 문제를 해석하여야 한다. Cary T.Pallone<sup>(1)</sup>은 롤의 길이 방향에 따른 비정상 온도분포를 구하여 평면 변형도 상태에서 롤 직경의 팽창량의 계산하였고 Parke와 Barker<sup>(2)</sup>는 비정상적인 온도분포에 대해 차분법 (finite difference method)을 이용하여 2차원적으로 모델화 하였으며 Poplawski와 Seccombe<sup>(3)</sup>는 이를 3차원적으로 확장하여 해석하였다. Wilmotte와 Mignon<sup>(4)</sup>은 축대칭 차분법에 의하여 롤의 축방향의 평균 온도 분포를 해석하였으며 반면 Zienkiewicz, Onate, Heinrich<sup>(5)</sup> 등은 유한요소법을 이용하여 온도분포를 구하였다. 그러나 이상의 해석들은 온도분포를 구한 후 열 크라운은 단순히 구해진 온도분포에 따른 자유 팽창에 의한 결과만을 주고 있다. 이러한 자유 팽창에

의한 결과는 온도분포가 일정하거나 선형인 경우에만 유효하며 이 경우 응력은 발생하지 않는다. 따라서 구해진 온도분포에 의한 정확한 열-탄성 해석이 필요하다.

본 연구에서는 작업률의 온도분포를 정상 상태에서 롤의 길이 방향만을 고려한 경우에 대하여 구한 다음 Fouries 급수로 전개하여 이 온도분포에 따른 작업률의 축대칭 3차원 열-탄성문제를 해석함으로써 롤의 크라운 양과 열응력을 구하여 이 결과를 유한요소법에 의한 결과와 비교 검토 하였다.

### 2. 해석 방법

#### 2.1 온도분포

Fig.1과 같이 뜨거운 판재와 접촉하고 있는 작업률의 길이방향에 따른 정상상태에서의 평균 온도분포는 Pallone<sup>(1)</sup>에 의하면 다음의 열-평형 방정식에서 얻어진다. 즉

$$\frac{d^2 T_1}{dz^2} + \frac{2hr\phi}{\alpha\rho C_p \pi D} (T_s - T_1) - \frac{2hc\phi}{\alpha\rho C_p \pi D} (T_1 - T_f) = 0, \quad 0 \leq z \leq b \quad (1a)$$

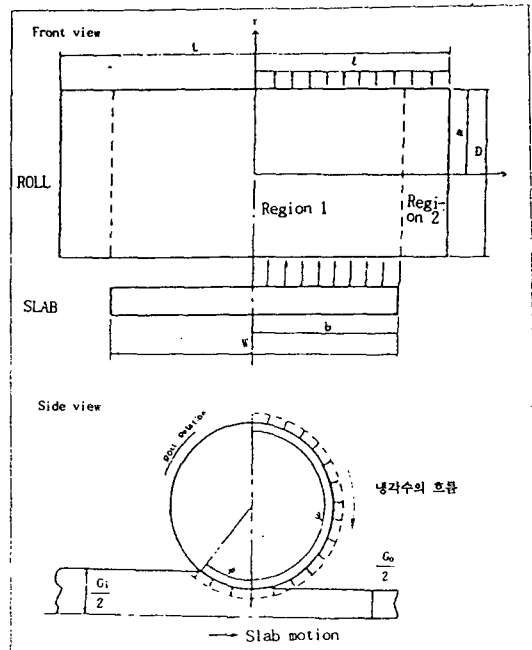


Fig. 1 Location of heat input and heat loss in work roll

$$\frac{d^2 T^2}{dz^2} - \frac{2h_c \phi}{\alpha \rho C_p \pi D} (T_2 - T_f) = 0 \quad b \leq z \leq l \quad (1b)$$

여기서

$$\phi = \left[ \frac{G_i - G_0}{a \left( 1 - \frac{8F(1-\nu^2)}{\pi b E (G_i - G_0)} \right)} \right]^{1/2} \quad (2)$$

경계조건은

$$\begin{aligned} \frac{dT_1(b)}{dz} &= \frac{dT_2(b)}{dz} \\ \frac{dT_1(0)}{dz} &= 0 \\ T_1(b) &= T_2(b) \\ T_2(l) &= T_f \end{aligned}$$

이므로 이것을 대입하여 해를 구하면

$$T = T_1 - T_f = T_{max} A \left( 1 - \frac{\beta_2}{C^* \beta_1} \frac{\cosh(\beta_1 Z)}{\cosh(\beta_1 \gamma)} \right) \quad 0 \leq \gamma \quad (3a)$$

$$T_2 - T_f = T_{max} A \frac{\tanh(\beta_1 \gamma)}{C^*} \frac{\sinh\{\beta_2(1-Z)\}}{\cosh\{\beta_2(1-\gamma)\}} \quad \gamma \leq Z \leq 1 \quad (3b)$$

이고, 여기서

$$Z = z/l$$

$$\gamma = b/l$$

$$\beta_1^2 = \frac{2(h_r \phi + h_c \phi) l^2}{\alpha \rho C_p \pi D}$$

$$\beta_2^2 = \frac{2h_c \phi l^2}{\alpha \rho C_p \pi D}$$

$$C^* = \frac{\beta_2}{\beta_1} + \tanh(\beta_1 \gamma) \tanh\{\beta_2(1-\gamma)\}$$

$$A = 1 - \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^2$$

$$T_{max} = T_s - T_f$$

이다.

### 2.2 롤의 열 크라운 해석

롤의 온도분포가 길이 방향 즉 z 만의 함수이고 롤은 축대칭이므로 이 문제는 축 대칭 열-탄성 문제로 해석할 수 있으며 기본 방정식은 다음과 같다.

● 변형-변위 관계식

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (4)$$

◎ 응력-변형도 관계식

$$\sigma_r = \lambda e + 2G\epsilon_r - KT$$

$$\sigma_\theta = \lambda e + 2G\epsilon_\theta - KT$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\epsilon_z - KT$$

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz} \quad (5)$$

여기서  $K = \alpha_E (3\lambda + 2G)$  이다.

○ 평형 방정식

변위에 의한 평형 방정식 즉 Navier's Equation 은 다음과 같다.

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot U) + G\nabla^2 U = K\nabla T \quad (6)$$

위의 평형 방정식은 Love's strain function  $V^{(6)}$ 에 의하여 온도분포가 z 방향만의 함수인 축 대칭 문제에 대하여 다음과 같이 된다.

$$\nabla^4 V = \beta \frac{dT}{dz} \quad (7)$$

여기서 변위는

$$2Gu = -\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial z}$$

$$2Gw = 2(1-\nu)\nabla^2 V - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (8)$$

로 정의되고

$$\beta = \frac{E\alpha_E}{(1-\nu)(1-2\nu)}$$
 이다.

이제 온도분포가 롤의 r 축에 대칭이므로 식(3a), (3b)를 Fourier Cosine Series로 변환하고, 식(7)의 해를

$$V = V_n(r) \sin k_n z; \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

로 가정한다. <sup>(7)</sup>

$t = K_n r = \frac{n\pi}{l} r$ 로 치환해서 식(7)을 정리하면

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} - 1 \right) \left( \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 1 \right) V_n(t) \\ = -\beta \frac{T_n}{K_n^3} \end{aligned} \quad (10)$$

로 된다. 여기서

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l T dz \\
 &= T_{max} A \left[ \gamma + \frac{\tan h(\beta_1 \gamma)}{C^* \beta_2} \left\{ A \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\cos h\{\beta_2(1-\gamma)\}} \right\} \right] \\
 T_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l T \cos K_n dz ; (n=1, 2, 3 \dots) \\
 &= 2 T_{max} A \left[ \frac{\sin(n\pi\gamma)}{n\pi} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{C^* \beta_1} \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \frac{1}{1 + \left( \frac{n\pi}{\beta_1} \right)^2} \left\{ \frac{n\pi}{\beta_1} \sin(n\pi\gamma) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \tan h(\beta_1 \gamma) \cos(n\pi\gamma) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tan h(\beta_1 \gamma)}{C^* \beta_2} \frac{1}{1 + \left( \frac{n\pi}{\beta_2} \right)^2} \left\{ \cos(n\pi\gamma) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{n\pi}{\beta_2} \sin(n\pi\gamma) \tan h(\beta_2(1-\gamma)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(-1)^n}{\cos h\{\beta_2(1-\gamma)\}} \right\} \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

이다. 식(10)의 해는

$$\begin{aligned}
 V_n(t) &= C_1 I_0(t) + C_2 t I_1(t) + C_3 H_0(t) \\
 &\quad + C_4 t H_1(t) \frac{\beta T_n}{K_n^3} \quad (12)
 \end{aligned}$$

로 구해진다. 식(9), (12)을 식(8)에 대입하면 변위  $u, w$ 가 얻어지고 적분 상수  $C_3, C_4$ 는 대칭성에 의한 변위의 경계조건, 즉  $r=0$ 에서  $u=0, \partial w/\partial r=0, z=0$ 에서  $\partial u/\partial z=0, w=0$ 에 의하여 0이 된다. 다시  $u, w$ 를 식(4), (5)에 대입하고 응력의 경계조건, 즉  $r=a$ 에서  $\sigma_r = \tau_{rz} = 0$ 을 대입하면  $C_1, C_2$ 가 얻어진다. 그러나 이 결과는  $z = \pm l$ 에서 정확한 경계조건, 즉  $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$  중  $\tau_{rz} = 0$ 의 경계조건은 만족시키나  $\sigma_z$ 는 0이 되지 않는다. 그러나  $\sigma_z$ 의 합력은 0이 되므로 Saint-Venant 원리를 만족시킨다. 최종적 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{a} &= \frac{1}{2} R \alpha_E \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{T_n}{B_n} [I_0\{(1-\nu)I_{0a} + \nu I_{2a}\} \\
 &\quad - I_2\{(2-\nu)I_{0a} - (1-\nu)I_{2a}\}] \cos(n\pi Z) \\
 \frac{w}{l} &= \frac{1}{4} Z \alpha_E \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{T_n}{B_n} [4B_n + I_0\{(t^2-4\nu)I_{0a} \\
 &\quad - (t^2-4\nu+4)I_{2a}\} - t^2 I_2(I_{0a} - I_{2a})] \frac{\sin(n\pi Z)}{n\pi Z} \quad (13) \\
 \sigma_r &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_E E}{1-\nu} \frac{T_n}{B_n} [I_0\{(2+2\nu-t^2)I_{0a} - (2\nu-t^2)I_{2a}\} \\
 &\quad + I_2\{(4-2\nu+t^2)I_{0a} - (2-2\nu+t^2)I_{2a}\} \\
 &\quad - 4B_n] \cos(n\pi Z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_E E}{1-\nu} \frac{T_n}{B_n} [I_0\{(1+\nu)I_{0a} - \nu I_{2a}\} \\
 &\quad - I_2\{(2-\nu)I_{0a} \\
 &\quad - (1-\nu)I_{2a}\} - 2B_n] \cos(n\pi Z) \\
 \sigma_z &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_E E}{1-\nu} \frac{T_n}{B_n} [I_0\{t^2 I_{0a} - (t^2+4)I_{2a}\} \\
 &\quad - t^2 I_2(I_{0a} - I_{2a})] \cos(n\pi Z) \\
 \tau_{rz} &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha_E E}{1-\nu} \frac{T_n}{B_n} t^2 (I_0 I_{2a} - I_2 I_{0a}) \sin(n\pi Z) \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 B_n &= I_{0a}^2 - (I_{0a} - I_{2a})^2 \{a^{*2} + 2(1-\nu)\} / 4 \\
 I_{0a} &= I_0(a^*) \\
 I_{2a} &= I_2(a^*) \\
 a^* &= \frac{a}{l} n\pi \\
 R &= \frac{r}{a}
 \end{aligned}$$

식(13), (14)의 타당성을 살펴보면  $n \rightarrow 0$  일 때의 극한값이

$$\frac{u}{a} = \alpha_E T_0 R, \quad \frac{w}{l} = \alpha_E T_0 Z, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$$

이 되는데 이것은 일정 온도분포  $T_0$ 에서의 자유팽창의 경우임을 알 수 있다. 또한  $Z=0$ 과  $R=0$ 에서의  $\tau_{rz}$ 는 대칭조건에 의해 0이며 식(14)의  $\tau_{rz}$  역시  $Z=0$ 과  $R=0$ 에서 0임을 알 수 있다. 톨의 열 크라운을 나타내는 변위  $u$ 는  $r=a$ 에서

$$\frac{u}{a} = \frac{1}{2} (1+\nu) \alpha_E \frac{T_n}{B_n} (I_{0a} - I_{2a})^2 \cos(n\pi Z) \quad (15)$$

이고 이곳에서의 길이 방향의 변위  $w$ 는

$$\frac{w}{l} = \frac{1}{2} (1+\nu) Z \alpha_E \frac{T_n}{B_n} (I_{0a}^2 - I_{2a}^2) \frac{\sin(n\pi Z)}{n\pi Z} \quad (16)$$

이다.

### 3. 결과 검토 및 유한요소법에 의한 비교

본 논문에서 사용된 톨의 제원 및 자료는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 L &= 2134 \text{ mm} \\
 D &= 711.2 \text{ mm} \\
 W &= 1524 \text{ mm} \\
 \rho &= 7861 \text{ kg/m}^3 \\
 C_p &= 439.9 \text{ J/kg}^\circ\text{C} \\
 \alpha &= 7.507 \text{ mm}^2/\text{sec}
 \end{aligned}$$

- $\alpha_E = 1.279 \times 10^{-5} \text{ m/m}^\circ\text{C}$
- $\nu = 0.25$
- $E = 1.3 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$
- $G_i = 7.62 \text{ mm}$
- $G_o = 5.89 \text{ mm}$
- $\varphi = 3.054 \text{ rad}$
- $F = 10^6 \text{ kgf}$
- $T_s = 827^\circ\text{C}$
- $T_f = 27.75^\circ\text{C}$
- $h_c = 1898 \text{ J/m}^2\text{sec}^\circ\text{C}$
- $h_r = 4547 \text{ J/m}^2\text{sec}^\circ\text{C}$

해석적 해의 값은 series의 n항째까지의 합이 n-1항째까지의 합과의 상대오차가  $10^{-4}$ 이하일때까지로 취하였으며, 유한요소법 해석에서는 60개의 8절점 4각형 iso-parametric 요소를 사용하였다. 그림에서 실선은 해석적인 해를 표시하며 유한요소법 결과는 점으로 표시하였다. Fig. 2는 롤의 원주 경계면(R=1)에서의 반경방향의 변위 u, 즉 제품의 품질저하를 일으키는 주된 열-크라운 양을 나타

내는데 해석적 방법 식(13)과 유한요소법 결과는 거의 일치함을 알수 있고 점선으로 표시된 자유팽창으로 가정한 해<sup>(1)</sup>와는 상당한 차이를 나타낸다.

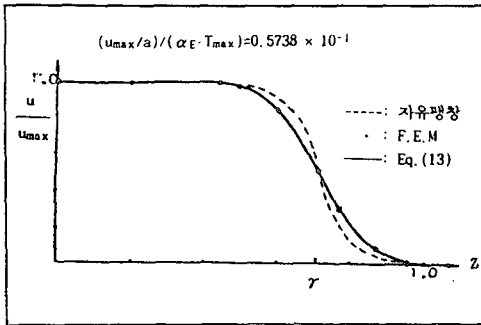


Fig. 2 Distribution of the displacement u at the boundary R=1

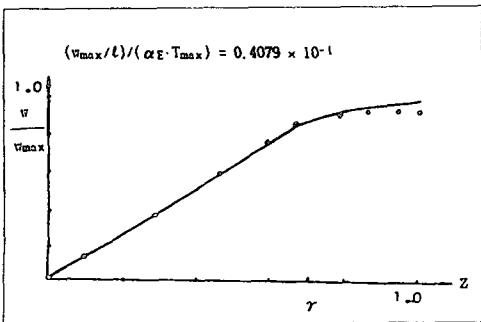


Fig. 3 Distribution of the displacement w at the boundary R=0

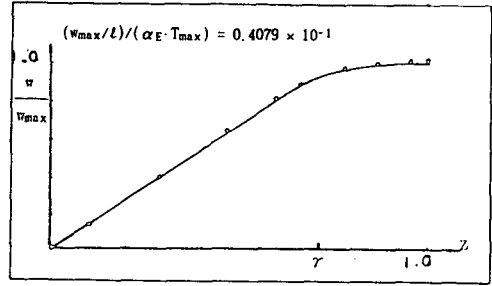


Fig. 4 Distribution of the displacement w at the boundary R=1

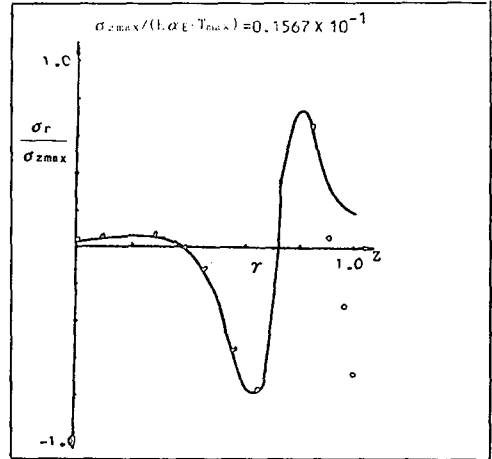


Fig. 5 Distribution of stress  $\sigma_r$  at the boundary R=0

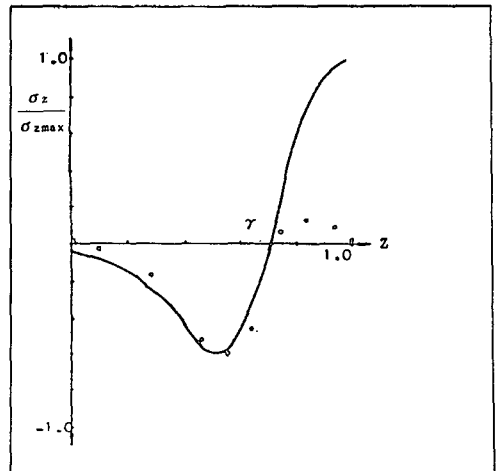


Fig. 6 Distribution of stress  $\sigma_z$  at the boundary R=0

Fig. 3, 4는 각각  $R=0$ ,  $R=1$  경계면에서의 물의 길이 방향으로의 변위를 나타내며 두 방법의 결과는 역시 거의 일치함을 알 수 있다. Fig. 5, 6은 물의 중심축( $R=0$ )에서의 반경방향 응력  $\sigma_r$ 과 길이 방향응력  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$ 의 분포를  $\sigma_z$ 의 최대값에 대한 비로 표시하였다. 그림에서 보는 바와 같이  $Z=\gamma=0.714$  부근에서 응력이 급격하게 변화함을 알 수 있다. 물의 끝( $Z=1$ ) 부근에서는 해석적 방법 식 (14)와 유한요소법에 의한 해는 상당한 차이를 보여주는데 이는 식(14)가  $Z=1$ 에서는 정확한 경계 조건 대신 St.-Venant 원리만 만족시키기 때문이다. St.-Venant 원리에 의하면 응력분포가 물의 끝

단의 조건에 거의 상관없는 구간은 대체로  $0 \leq Z \leq 1-a/l$ 이다. 따라서 해석적 해에 의한 응력분포는  $Z$ 의 값이 0.0 에서 0.7 정도까지만 유효하다고 볼 수 있으며, 이것은 Fig. 6, 7, 8에서 보여지는 현상과 잘 일치한다.

### 4. 결론

판재의 열간 압연가공시 폭 방향의 두께 불균일 현상을 해소하기 위하여 물에 초기 크라운을 주게 되는데 이때 큰 영향을 미치는 물의 온도분포에 따른 열 크라운을 해석하였다. 물의 온도분포는 정상 상태에서 길이방향만의 온도변화를 구하였다.

물의 열 크라운 즉 반경방향 변위와 응력들은 Fourier급수로 전개된 온도분포와 Love의 변형도 함수를 이용한 축 대칭 3차원 열 탄성문제의 해석적인 해로 구하였으며 이를 유한요소법에 의한 해와 비교하여 본 결과 열 크라운에 대하여는 두 해의 오차가 1% 내로 거의 일치함을 알 수 있었다. 예상되는 바와 같이 온도차이가 크면서 변화가 적은, 물과 슬랩접촉의 중심부분에서는 마찬가지로 열 크라운도 크면서 변화가 적었다. 온도차이의 변화가 큰, 물과 슬랩접촉의 끝부분에서는 열 크라운의 변화도 급격하였다. 물의 각 응력들은 슬랩과의 접촉부위에서는 두 해가 거의 일치하였으나 물의 끝경계면의 영향으로 접촉부위 이후부터는 잘 맞지 않았다.

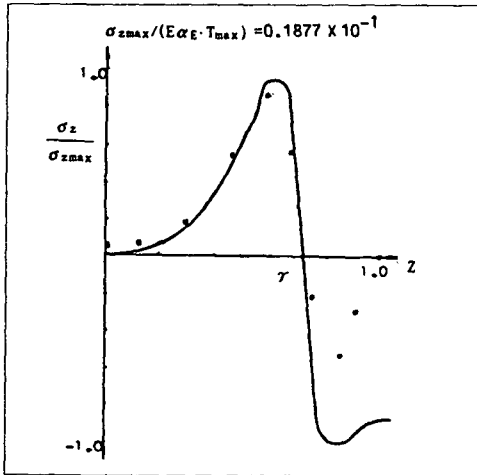


Fig. 7 Distribution of stress  $\sigma_z$  at the boundary  $R=1$

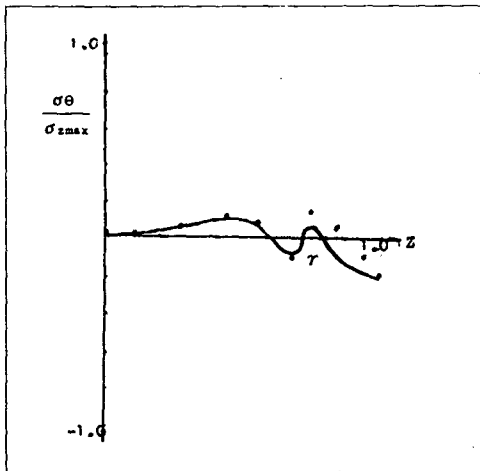


Fig. 8 Distribution of stress  $\sigma_\theta$  at the boundary  $R=1$

### 참고문헌

- (1) Pallone, G.T., 1983, "Transient Temperature Distribution in Work Rolls During Hot Rolling of Sheet and Strip," Iron & Steel Engineer, Dec. p. 21.
- (2) Parke, D.M. and Baker, J.L., 1972, "Temperature Effects of Cooling Work Rolls," Iron & Steel Engineer, Vol. 49, pp. 83~88.
- (3) Poplawski, J.V. and Seccombe, D.A., 1980, "Bethlehem's Contribution to the Mathematical Modeling of Cold Rolling Tandem Mills," Iron & Steel Engineer, Vol. 57, pp. 47~58
- (4) Wilmotte, S. and Mignon, J., 1973, "Thermal Variations of the Camber of the Working Rolls During Hot Rolling," Metallurgical Reports

CRM, No. 34, pp. 17~34.

- (5) Zienkiewicz, O.C., Onate, E and Heinrich, J.C., 1981, "A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Elements," Int. Jr. for Numerical Methods in Eng., Vol 11, pp. 1497~1514.
- (6) Adel, S.Saada, 1974, "Elasticity, Theory and Applications," Pergamon Press Inc.
- (7) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1970, "Theory of Elasticity" 3rd Ed., Int. St.Ed.