

〈論 文〉

타원형 및 원형 평판의 자유 진동

김 찬 수*

(1992년 3월 9일 접수)

Free Vibration of Elliptical and Circular Plates

Chan-Soo Kim

Key Words : Elliptical Plate (타원형 평판), Circular Plate(원형 평판), Orthotropic(직교 이방성), Rayleigh-Ritz method(레이레이-리쯔 방법), Simple Polynomials(단순 다항식), Natural Frequency(고유 진동수), Nodal Pattern(절선 모양), Free(자유), 단순지지 (Simply Supported), Clamped(고정)

Abstract

While the vibration of circular plates were considered by many researchers, rather less attention is given to elliptical plates. In the present paper, the Rayleigh-Ritz method is used to obtain an eigenvalue equation for the free flexural vibration of thin elliptical plates having the classical free, simply supported or clamped boundary condition. Circular plates are included as a special case of the elliptical plates. Products of simple polynomials are used as the admissible functions and a recurrence relationship facilitates the evaluation of the necessary integrals. The analysis is developed for rectilinear orthotropic plates but the numerical results are given for isotropic plates with various aspect ratios.

1. 서 론

원형 또는 타원형 평판의 진동에 대한 논문은 Leissa^(1,2)와 Yamada와 Irie⁽³⁾에 의하여 폭 넓게 조사, 고찰되었다. 따라서 여기서는 이들에 의해서 고찰된 논문들을 일일이 되풀이 하기보다는, 이전에 나온 대부분의 논문들이 등방성 및 극직교 이방성(polar orthotropic) 평판에 관한 것인 점을 감안하여 비교적 근래에 연구되고 있는 직교 이방성(rectilinear orthotropic 또는 orthotropic) 원형, 타원형 및 환형(annular) 평판을 중심으로 언급하고자 한다. Irie와 Yamada⁽⁴⁾는 spline 함수를 Rayleigh-Ritz method의 admissible 함수로 사용하여 변이 원형 및 타원형인 환형(annular) 평판의

해를 구했으며 Tomar와 Gupta⁽⁵⁾는 두 항만 사용하여 Galerkin method로 고정 타원형 평판 문제를 연구한 바 있고, Narita⁽⁶⁾는 급수 해법(series solution)으로 다각형 및 원형 평판의 진동을 연구했다. Narita⁽⁷⁾는 또한 단순 다항식을 이용하여 Rayleigh-Ritz method로 완전 자유 상태하의 타원형 평판의 진동 문제도 해석했다. Dong과 Lopez⁽⁸⁾는 collocation method를 사용하여 고정 원형 평판의 진동을 연구했으며 Bianchi 등⁽⁹⁾은 Rayleigh-Ritz method를 사용하여 변이 원형인 환형 평판의 고유 진동수를 구했다. 최근에는 Young과 Dickinson⁽¹⁰⁾이 본 논문에서와 기본적으로 같은 접근 방법으로 곡선 변이 포함된 평판의 진동 해석을 수행한 바 있다. 이상의 논문들을 살펴 보면, 원형 및 타원형 평판은 많은 연구자들에 의하여 취급되어 왔으나, 대부분의 연구는 주로 원형 또는 원환

*정회원, 아시아자동차공업(주) 기술연구소

형(circularly annular) 평판에 대한 것이고 타원형 평판(등방성 또는 직교 이방성)에 대한 결과는 경계조건에 따라서는 첫번째 한 두 mode에 대한 비교적 오차가 큰 결과로 한정되어 있으며 특히, 여러 세장비(aspect ratio)에 있어서의 전통적인 자유, 단순 지지, 고정인 경계 조건 모두에 대한 체계적인 연구는 수행되지 않고 있다.

본 논문에서는 Rayleigh-Ritz method를 사용하여 타원형(원형 포함) 평판의 자유 진동 문제를 해석한다. admissible함수로서는 단순 다항식의 곱(products of simple polynomials)을 사용한다. 이 함수는 다항식의 첫 항의 차수를 0, 1 또는 2로 함으로써 각각 자유, 단순 지지 또는 고정인 경계 조건을 간편히 처리할 수 있게 하며, 에너지식에 포함된 적분값을 계산함에 있어서 점화식을 유도하여 사용함으로써 계산을 매우 간편히 수행할 수 있게 한다. 본문의 이론 해석은 직교 이방성 타원형 평판에 대해서 제시된다. 그러나 수치 결과는, 이방성의 다양한 조합에 대한 많은 결과를 제시하는 것은 그다지 의미가 없는 관계로, 등방성 평판에 대해서 주어진다. 등방성 평판의 여러 가지 세장비에 대한 결과는 실제 데이터로써 활용될 수 있을 것이다. 덧붙여, 대표적으로 세장비가 0.5인 평판에 대해서 nodal pattern이 그림으로 제시된다.

본 논문에서의 접근 방법은 Leissa⁽¹¹⁾가 단순 지지된 타원형 평판의 진동 해석을 위해서 사용한 방법과 비슷하며 또한 Kim 등⁽¹²⁾이 직사각형 평판의 진동 해석시 사용한 방법과 비슷하다. 특히 참고 문헌 (7)의 자유 타원형 평판의 진동 해석에 사용된 방법은 본 논문의 한 특별한 경우로서, 자유, 단순 지지, 고정인 경계 조건 중 자유인 경계 조건에 대한 경우와 같다. 단순 다항식의 곱을 Rayleigh-Ritz method의 admissible function으로 이용하는 이러한 방법은 매우 간편하면서도 이제까지 취급이 대단히 어려웠던 많은 문제를 쉽게 다룰 수 있게 한다. Kim과 Dickinson은 이 방법으로 직삼각형⁽¹³⁾ 및 일반 삼각형⁽¹⁴⁾ 평판의 진동 해석을 수행하였으며, Young과 Dickinson⁽¹⁰⁾은 앞에서 언급한 것처럼 곡선 변이 포함된 다각형 평판의 진동 문제를 다루었다.

2. 이론 해석

얇은 타원형 평판이 Fig. 1에서와 같이 x - y 평면

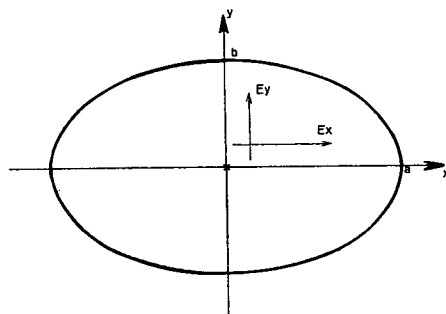


Fig. 1 An orthotropic elliptical plate

상에 놓여 있을 때, 평판의 변은 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ 로 표시될 수 있다. 평판은 두께 h 가 일정하고 균질인 직교 이방성 물질로 이루어져 있으며, 물질의 주축은 좌표축과 평행한 것으로 가정한다.

경계 조건이 평판의 변을 따라 일정할 때(본 고에서는 이 경우에 대해서만 취급된다), x 및 y 축에 대한 대칭성을 고려하면 평판의 에너지는 한 사분면상의 에너지의 네 배가 된다. 따라서 작은 진폭으로 단순조화 진동을 할 때의 평판의 최대 변형률 에너지(strain energy)와 운동에너지(kinetic energy)는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$V_{max} = \frac{4}{2} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \left[D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_{xy} D_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy dx, \quad (1)$$

$$T_{max} = \frac{4\rho h \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} W^2 dy dx, \quad (2)$$

여기서 ω 는 고유원 진동수(radian natural frequency), W 는 평판에 수직인 방향으로의 변형 진폭(deflection amplitude), ρ 는 밀도(material density), ν_{xy} 와 ν_{yx} 는 포와송비(Poisson's ratios)이며, x 와 y 방향의 탄성계수(Young's moduli)를 각각 E_x 와 E_y 라 하고 전단계수(shear modulus)를 G_{xy} 라 하면 굽힘강성(flexural rigidities)은 $D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})$, $D_y = D_x E_y / E_x$, $D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$ 로 주어진다.

무차원화된 매개변수(parameter) $\xi = x/a$ 와 $\eta = y/b$ 를 사용하면 변형 W 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$W = \sum_i \sum_j A_{ij} \xi^{i-1} \eta^{j-1} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^k \quad (3)$$

여기서 A_{ij} 는 미정 상수이며, k 는 경계 조건에 따라 정해지는 상수, 즉 경계조건이 자유(free)이면 $k=0$, 단순 지지(simply supported)이면 $k=1$, 고정(clamped)이면 $k=2$ 이다. i 와 j 는 일반적으로 1, 2, 3, ...이지만, 평판이 좌표축에 대해서 대칭이므로 대칭성을 고려하여 대칭 모드(symmetrical modes)와 반대칭 모드(antisymmetrical modes)를 분리하면 대칭 모드에 대해서는 홀수(1, 3, 5, ...), 반대칭 모드에 대해서는 짝수(2, 4, 6, ...)를 취하면 된다.

무차원화된 매개변수 ξ, η 와 식(3)을 에너지식(1), (2)에 대입하여, Rayleigh-Ritz method에 따라 진동수를 A_{ij} 에 대해서 최소화하여 정리하면 다음과 같은 eigenvalue식을 얻게 된다.

$$\sum_m \sum_n [C_{ijmn} - \Omega^2 E_{ijmn}^{(0000)}] A_{mn} = 0, \quad (4)$$

여기서 $\Omega^2 = \rho h \omega^2 a^4 / H$; $m, n, i, j = 1, 2, 3, \dots$,

$$E_{ijmn}^{(pqrst)} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\frac{\partial^{(p+q)}}{\partial \xi^p \partial \eta^q} (\xi^{i-1} \eta^{j-1} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^k) \right. \\ \left. \frac{\partial^{(r+s)}}{\partial \xi^r \partial \eta^s} (\xi^{m-1} \eta^{n-1} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^k) \right] d\eta d\xi,$$

$$C_{ijmn} = \frac{D_x}{H} E_{ijmn}^{(2020)} + \frac{D_y}{H} \left(\frac{a}{b}\right)^4 E_{ijmn}^{(0202)} \\ + \left(1 - 2\frac{D_{xy}}{H}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^2 (E_{ijmn}^{(2002)} + E_{ijmn}^{(0220)}) \\ + 4\frac{D_{xy}}{H} \left(\frac{a}{b}\right)^2 E_{ijmn}^{(1111)}$$

$H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$. 등방성 평판은 직교 이방성 평판의 특별한 경우로 간주될 수 있으므로, 식(4)는 $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$, $D_x = D_y = H = D$, $D_{xy} = (1 - \nu)D/2$ 로 두면 등방성 평판에도 그대로 적용된다. 식(4)의 해를 구하면, 평판의 고유 진동수와 그에 대응하는 계수 A_{ij} 를 얻게 되고, A_{ij} 를 식(3)에 대입하면 자유 진동시의 mode shapes를 얻을 수 있다.

식(4)에 포함된 적분식은 아래에서와 같은 방법으로 쉽게 계산될 수 있다. 우선,

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \xi^{\alpha-1} \eta^{\beta-1} \\ (\xi^2 + \eta^2 - 1)^{\gamma-1} d\eta d\xi; \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

이라고 두면

$$F(\alpha, \beta, 1) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \xi^{\alpha-1} \eta^{\beta-1} d\eta d\xi$$

$$= \int_0^1 \xi^{\alpha-1} \frac{1}{\beta} \eta^\beta \Big|_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \\ d\xi = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \xi^{\alpha-1} (1 - \xi^2)^{\beta/2} d\xi. \quad (6)$$

식(6)의 α, β 에 1 또는 2를 대입하면,

$$F(1, 1, 1) = \int_0^1 (1 - \xi^2)^{1/2} d\xi = \frac{\pi}{4} \\ F(1, 2, 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \xi^2) d\xi = \frac{1}{3} \\ F(2, 1, 1) = \int_0^1 \xi (1 - \xi^2)^{1/2} d\xi = \frac{1}{3} \quad (7) \\ F(2, 2, 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi^2 (1 - \xi^2) d\xi = \frac{1}{8}$$

그리고 부분 적분법을 이용하여 정리하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$F(\alpha+2, \beta, 1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+2} f(\alpha, \beta, 1) \quad (8)$$

$$F(\alpha, \beta+2, 1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta+2} F(\alpha, \beta, 1) \quad (9)$$

또한 식(5)로부터,

$$F(\alpha, \beta, \gamma+1) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \xi^{\alpha-1} \eta^{\beta-1} (\xi^2 + \eta^2 - 1) \\ (\xi^2 + \eta^2 - 1)^{\gamma-1} d\eta d\xi \\ = F(\alpha+2, \beta, \gamma) + F(\alpha, \beta+2, \gamma)$$

그런데, 부분 적분법을 이용하면

$$F(\alpha, \beta, \gamma+1) = -\frac{2\gamma}{\beta} F(\alpha, \beta+2, \gamma) \\ = -\frac{2\gamma}{\alpha} F(\alpha+2, \beta, \gamma).$$

따라서

$$F(\alpha, \beta, \gamma+1) = -\frac{2\gamma}{\alpha+\beta+2\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) \quad (10)$$

그러므로 식(4)에 포함된 적분값은 식(7)에서 시작하여 점화식(8), (9), (10)을 사용하여 쉽게 체계적으로 계산될 수 있다.

덧붙여, 평판의 두께가 일정하지 않을 때는 운동 에너지 식(2)에서 h 가 적분내로 들어가게 된다. 따라서, 본 논문에서의 접근 방법은 두께가 변화는 경우에도, 두께의 변화가 다항식으로 표시될 수 있을 때에는 별다른 어려움 없이 그대로 적용될 수 있다.

3. 결과 및 고찰

식(4)를 사용하여 등방성 타원형 평판의 자유, 단순 지지 및 고정인 경계 조건에 대해서 여러 세 장비에 있어서의 고유 진동수를 계산한다. 직교 이방성 평판에 대해서는, 본 논문에서와 같은 결과를 얻게 되는 참고 문헌(7)과 (10)에서 두어가지 이방성 값에 대한 예제가 취급되어 있다. 그러나, 타원형 평판에 있어서 이방성(D_x/H , D_y/H , D_{xy}/H)의 다양한 조합에 대한 많은 결과를 제시하는 것은 그다지 의미가 없는 관계로 여기서는 등방성 평판

에 대해서만 고찰하기로 한다. (이방성의 효과에 대한 전반적 현상에 대한 고찰은 추후의 과제가 될 수 있을 것이다.)

본 논문에서 취급되는 타원형 평판에 있어서는, 네 종류의 mode가 존재한다. 이들은, 대칭(symmetric)인 mode를 S로, 반대칭(antisymmetric)인 mode를 A로 표시하고 x 및 y 축에 대한 대칭성을 차례대로 나타내기로 하면, SS, SA, AS 및 AA mode이다. 대칭 mode와 반대칭 mode는 앞에서 언급한 바와 같이 식(3)의 i 와 j (식(4)의 진동수 방정식에 있어서는 i, m 과 j, n)를 홀수 또는 짝수를 사용하면 따로 분리하여 계산할 수 있

Table 1 Convergence of frequency parameters $\omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$ for isotropic, clamped, elliptical plates

No. of Contributing terms	Mode Type								
	SS-1	SS-2	SS-3	SA-1	SA-2	AS-1	AS-2	AA-1	AA-2
<i>b/a=1/3</i>									
2×2	56.979	105.349	305.09	151.01	242.97	72.290	140.05	177.83	301.79
3×3	56.807	92.035	184.49	150.17	210.20	71.625	116.81	174.82	248.76
4×4	46.801	90.350	147.34	150.09	203.36	71.591	113.28	174.45	236.19
5×5	56.800	90.235	140.74	150.09	202.28	71.590	112.96	174.43	233.81
6×6	56.800	90.232	140.00	150.09	202.19	71.590	112.95	174.42	233.55
7×7	56.800	90.232	139.96	150.09	202.19	71.590	112.95	174.42	233.53
Shibaoka ⁽¹⁷⁾	57.9								
McNitt ⁽¹⁸⁾	58.693								
Tomar ⁽⁵⁾	58.692								
<i>b/a=0.5</i>									
2×2	27.394	61.319	139.40	69.996	123.46	39.590	88.517	88.601	160.44
3×3	27.378	56.320	124.40	69.862	111.45	39.499	78.013	88.071	139.10
4×4	27.377	55.985	105.16	69.858	110.03	39.497	77.037	88.048	135.99
5×5	27.377	55.976	102.80	69.858	109.94	39.497	76.996	88.047	135.72
6×6	27.377	55.976	102.65	69.858	109.94	39.497	76.995	88.047	135.71
shibaoka ⁽¹⁷⁾	27.5								
McNitt ⁽¹⁸⁾	27.746								
Tomar ⁽⁵⁾	27.746								
<i>b/a=1.0</i>									
2×2	10.217	33.661	42.097	21.272	54.088	The same as SA		34.922	75.895
3×3	10.216	34.938	39.874	21.260	51.172			34.877	70.032
4×4	10.216	34.888	39.773	21.260	51.032			34.877	69.674
5×5	10.216	34.877	39.771	21.260	51.030			34.877	69.666
NcNitt ⁽¹⁸⁾	10.217								
Tomar ⁽⁵⁾	10.217								
Exact ⁽¹⁵⁾	10.216	34.88	39.771	21.26	51.04			34.88	69.666

Table 2 Frequency parameters $\omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$ for isotropic, free, elliptical plates($\nu=0.3$)

<i>b/a</i>	Mode Type								
	SS-1	SS-2	SS-3	SA-1	SA-2	AS-1	AS-2	AA-1	AA-2
0.2	6.7778*	32.817*	78.123*	48.582*	101.72*	17.389*	53.068*	25.747*	73.638*
0.3	6.7654	32.675*	71.773	33.710*	75.839*	17.343	52.718	17.301	53.015*
0.4	6.7321	32.257*	41.937	26.393*	63.137*	17.195	51.824*	13.084	42.928*
0.5	6.6705	27.768	31.513*	22.015	55.272*	16.921	42.991	10.548	36.828*
0.6	6.5712	19.922	30.337	19.061	49.565*	16.484	33.239	8.8447	32.590
0.7	6.4185	15.160	28.626	16.888	37.800	15.822	27.357	7.6161	29.320
0.8	6.1861	12.128	26.449	15.174	29.743	14.880	23.790	6.6841	26.570
0.9	5.8381	10.191	24.101	13.731	24.274	13.699	21.694	5.9509	24.107
1.0	5.3583	9.0031	21.835	12.439	20.475	12.439	20.475	5.3583	21.835

Table 3 Frequency parameters $\omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$ for isotropic, simply supported, elliptical plates

<i>b/a</i>	Mode Type								
	SS-1	SS-2	SS-3	SA-1	SA-2	AS-1	AS-2	AA-1	AA-2
0.2	69.680*	111.28*	167.48*	262.63*	335.41*	88.761*	137.46*	297.40*	376.79*
0.3	32.813*	64.503*	112.00*	120.38*	172.77*	46.828*	86.145*	144.89*	204.20*
0.4	19.514*	46.757*	91.077*	69.854	112.37*	31.146*	66.672*	89.357	139.09*
0.5	13.213	38.326	81.190*	46.150	83.013*	23.641	57.482*	62.764	107.10*
0.6	9.7629	33.760	70.209	33.122	66.441	19.566	52.430	47.917	88.843
0.7	7.7007	31.005	52.893	25.192	56.120	17.157	49.196	38.781	77.255
0.8	6.3935	29.139	41.677	20.012	49.177	15.634	46.633	32.769	69.119
0.9	5.5282	27.600	34.208	16.448	44.115	14.615	43.750	28.608	62.669
1.0	4.9352	25.613	29.720	13.898	39.957	13.898	39.957	25.613	56.842

Table 4 Frequency parameters $\omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$ for isotropic, clamped, elliptical plates

<i>b/a</i>	Mode Type								
	SS-1	SS-2	SS-3	SA-1	SA-2	AS-1	AS-2	AA-1	AA-2
0.2	149.64*	195.88*	256.71*	403.40*	481.61*	170.99*	224.41*	440.88*	525.66*
0.3	69.147*	104.56*	155.81*	183.73*	240.07*	84.976*	128.10*	210.21*	273.45*
0.4	40.646	71.378*	119.29*	106.09	151.99*	53.982	93.083*	127.27*	180.42
0.5	27.377	55.976*	102.65*	69.858	109.94*	39.497	76.995*	88.047	135.71*
0.6	20.195	47.816*	93.717*	50.060	86.632*	31.736	68.485*	66.430	110.80*
0.7	15.928	43.048	70.771	38.087	72.403	27.204	63.354	53.306	95.394
0.8	13.229	39.971	55.781	30.322	63.038	24.383	59.641	44.792	84.902
0.9	11.442	37.627	45.797	25.021	56.378	22.532	55.870	38.990	76.830
1.0	10.216	34.877	39.771	21.260	51.030	21.260	51.030	34.877	69.666

The values given are the lower of the results with 6×6 and 9×4 terms ;

6×6 contributing terms : (blank)

9×4 contributing terms : (*)

Most of the values were converged to the figures shown.

다. 함께 사용하더라도 결과는 물론 마찬가지로이며, 이때 홀수는 반대칭 mode에 대해서, 짝수는 대칭 mode에 대해서 전연 기여하지 않는다. 이하 본문 및 모든 Table에서 항수(number of terms)는 기여하는(contributing)항수를 의미한다. 그리고 포와송 비는 0.3으로 하여 계산하였다.

이론 해석에서 설명된 방법의 정확성과 수렴성을 보이기 위해서, Table 1에 등방성 고정 평판에 대한 결과를 문헌 상에 나와 있는 결과와 비교한다. 제시된 결과 중 제일 많은 항을 사용하여 구한 값은 나타낸 자릿수까지 충분히 수렴한 값, 즉 더 많은 항을 사용하더라도 달라지지 않는 값이다. 이 Table의 결과는 대단히 양호한 수렴성을 보이고 있다. 한 가지 주목할 것은 형상비 b/a 가 1에서 멀어질수록 수렴 속도가 느려진다는 점이다. 이는 x 및 y 방향의 항수를 같게 했기 때문인 바 b/a 가 작을 때는 x 방향의 길이가 y 방향의 길이에 비해서 긴 관계로 x 방향의 파동의 기여도가 높고 y 방향의 파동의 기여도가 낮기 때문에 x 방향의 항수를 많이 하고 y 방향의 항수를 적게(예를 들면 6×6 항 대신에 9×4 항)하면 수렴 속도가 증가된다. 원형 평판($b/a=1$)에 대해서는 일찌기 1925년도에 Carrington⁽¹⁵⁾에 의하여 Bessel function으로 주어지는 완전해가 얻어졌다. 여기서 제시된 결과는 SA-2 mode를 제외하고는 완전해와 일치함을 알 수 있다. Rayleigh-Ritz method의 결과는 상한치가 되므로 제시된 SA-2 mode의 결과는 비정상적인 것처럼 보인다. 이러한 결과는 Kim과 Dickinson⁽¹⁶⁾의 상한치 결과와 일치하는데 필자는 Carrington에 의해 계산된 값의 정확성을 검증하기 위해 CYBER 컴퓨터에서 double precision으로 완전해를 계산해 본 결과 나타낸 자릿수까지 여기서 제시된 값과 일치함을 알 수 있었다. 참고 문헌(15)의 값은 Bessel function의 값을 계산함에 있어서(1925년도에는 컴퓨터가 없었다)수치 상의 오차가 있었던 것으로 믿어진다. Table 1에서 $b/a=1.0$ 일 때 SS-2 mode와 AA-1 mode는 서로 일치하고 있는데 이는 사실상 같은 mode라고 말할 수 있다. 즉 둘 다 서로 직교하는 두 지름을 nodal diameter로 하는 mode로서, 이들은 SS-2 mode에서는 $y=\pm x$, AA-1 mode에서는 좌표축이 nodal diameter이다. 이는 비단 이러한 두 가지 mode 만이 아니라 임의의 직교하는 두 지름을 nodal diameter로 하는 mode가 동시에 존재할 수

있음을 뜻하며, 이들의 상대적 진폭은 초기 조건에 따라 정해진다. 이러한 현상은 비단 고정 평판의 SS-2와 AA-1 mode뿐만 아니라, 중심을 관통하는 축에 대칭인(axisymmetric)평판 즉, 경계 조건이 변을 따라 달라지지 않는 모든 등방성 원형 평판에서, 하나 이상의 nodal diameter를 갖는 모든 mode에 대해서 일어난다. $b/a=1/3$ 및 $b/a=0.5$ 인 평판에 대한 Shibaoka⁽¹⁷⁾, McNitt⁽¹⁸⁾ 및 Tomar와 Gupta⁽⁶⁾의 첫째 Mode에 대한 값은 여기서 제시된 값에 비해서 정확성이 떨어지는 것으로 믿어진다. 수렴성에 대한 검증은 경계 조건이 자유인 경우에도 행해졌다. 그러나 그 결과는 고정 타원형 평판에 대해서와 비슷하며, 참고문헌(7)에서 설명이 되어 있으므로 여기에서는 포함시키지 않는다.

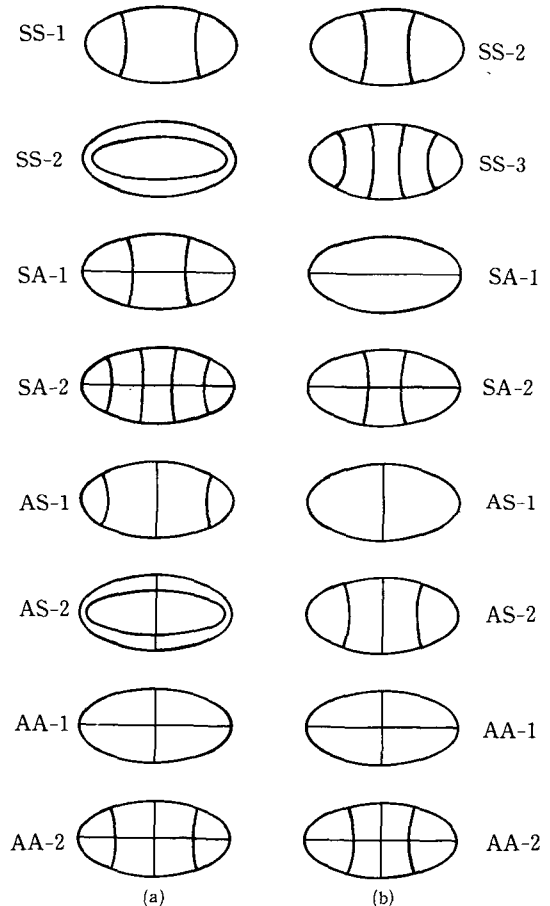


Fig. 2 Nodal patterns for free and simply supported elliptical plates with aspect ratio (b/a) 0.5 : (a) free, (b) simply supported

Table 2~4에는 각각 자유, 단순 지지 및 고정 타원형 평판의 여러 가지 세장비에 있어서의 고유 진동수가, SS mode에 대해서는 첫 세 mode에 대해서, 나머지 다른 종류의 mode에 대해서는 각각 첫 두 mode에 대해서 제시된다. 이들은 식(3)의 급수(series)에서 6×6 항 및 9×4 항을 사용하여 구해진 값 중 작은 값으로서 9×4 항에 의한 결과는 *로 나타내었다. b/a 가 작을 때는 Table 1에 대한 설명에서와 같이 x 방향의 항수를 y 방향에 대한 항수보다 많이 했을 때 수렴 속도가 전반적으로 빨라짐을 알 수 있다. 원형($b/a=1$)평판에 대해서는 완전해가 존재하는 바, 고정 평판에 대해서는 앞에서 언급한 바와 같고, 단순지지인 경우는 Leissa와 Narita⁽¹⁹⁾의 계산 결과와 제시된 자릿수까지 일치한다. 자유 원형 평판에 대해서는 포와송 비가 0.33에 대해서는 계산되어 있으나⁽²⁰⁾ 0.3에 대해서는 문헌 상에 나와 있지 않다. 그러나 앞의 두 경계 조건의 결과로 봐서 제시된 값은 완전해와 거의 같을 것으로 추정된다.

끝으로 Fig. 2에 $b/a=0.5$ 에 대한 nodal pattern을 보인다. (a)는 변이 자유인 경우이며, (b)는 변이 단순 지지된 경우에 대한 것이다. 변이 고정된 경우에는 절선의 위치만 약간 이동할 뿐 단순 지지일 때와 거의 같으므로 포함시키지 않았다. 그림에서 flapping mode(단순 지지 및 고정 평판의 SS-1 mode)는 평판 내부의 nodal line이 존재하지 않으므로 제외시켰다.

4. 결 론

본 논문의 방법은 타원형 평판의 진동 해석 문제를 아주 간편히 취급할 수 있게 한다. 식(4)의 진동수 방정식을 이용하면 등방성 평판에 있어서 포와송비의 변화에 따르는 고유 진동수와 그 mode를, 직교 이방성 평판에 있어서 이방성의 값에 대한 고유 진동수와 그 mode를 쉽게 구할 수 있다. 식(4)는 두께가 일정한 직교 이방성 평판에 대해서 주어졌으나, 두께가 일정하지 않은 직교 이방성 평판에 대해서도 두께의 변화를 다항식으로 표시할 수 있을 때는 본 논문의 접근 방법으로 쉽게 해석할 수 있다.

등방성 원형 평판에 대해서는 완전해가 존재하나 타원형 평판에 대한 완전해는 존재하지 않고 근사치 결과는 매우 제한적으로 제시되어 있었다. 본

논문에서는 전통적인, 자유, 단순 지지 및 고정의 모든 경계 조건에 대해서 여러가지 세장비에 대한 고유 진동수 값이 제시되었다. 제시된 값은 실제 데이터로써 이용될 수 있을 것이다.

후 기

본 논문에서의 값은 연세 대학교 기계 공학과 동역학실에서 CYBER컴퓨터의 double precision으로 계산되었다. 터미널과 계정의 사용을 허가해 준 박영필 교수께 깊은 감사를 드린다.

참 고 문 헌

- (1) Leissa, A.W., 1969, "Vibration of Plates," NASA SP-160, Office of Technology Utilization, NASA, Washington.
- (2) Leissa, A.W., "Recent Research in Plate Vibrations," The shock and Vibration Digest; 1977, Vol. 9, No. 10, pp. 13~24; 1977, Vol. 9, No. 11, pp. 21~35; 1981, Vol. 13, No. 9, pp. 11~22; 1981, Vol. 13, No. 10, pp. 19~36; 1987, Vol. 19, No. 2, pp. 11~18; 1987, Vol. 19, No. 3, pp. 10~24.
- (3) Yamada, G. and Irie, T., 1987, "Plate Vibration Research in Japan," Applied Mechanics Review, Vol. 40, pp. 879~892.
- (4) Irie, T. and Yamada, G., 1979, "Free Vibration of an Orthotropic Elliptical plate with a Similar Hole," Bulletin of JSME, Vol. 22, pp. 1456~1462.
- (5) Tomar, J.S. and Gupta, A.G., 1984, "Vibrations of an Orthotropic Elliptic Plate of Non-Uniform Thickness and Temperature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 96, pp. 29~35.
- (6) Narita, Y., 1983, "Flexural Vibrations of Clamped Polygonal and Circular Plates Having Rectangular Orthotropy," Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 691~692.
- (7) Narita, Y., 1985, "Natural Frequencies of Free, Orthotropic Elliptical Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 100, pp. 83~89.
- (8) Dong, S.B. and Lopez, A.E., 1985, "Natural Vibrations of a Clamped Circular Plate with Rectilinear Orthotropy by Least-Squares Collocation," International Journal of Solids and

- Structures, Vol. 21, pp. 515~526.
- (9) Bianchi, A., Avalos, D. R. and Laura, P.A.A., 1985, "A Note on Transverse Vibrations of Annular, Circular Plates of Rectangular Orthotropy," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 99, pp. 140~143.
- (10) Young, P.G. and Dickinson, S.M., 1991, "Free Vibration of Thin Plates Involving Curved Boundaries," *Proceedings of the Fourth International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, U.K. pp. 31~39.
- (11) Leissa, A.W., 1967, "Vibration of a Simply-Supported Elliptical Plate," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 6, pp. 145~148.
- (12) Kim, C.S., Young, P.G. and Dickinson, S.M., 1990, "On the Flexural Vibration of Rectangular Plates Approached by Using Simple Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," *Journal of sound and Vibration*, Vol. 143, pp. 379~394.
- (13) Kim, C.S. and Dickinson, S.M. 1990, "The Free Flexural Vibration of Right Triangular Isotropic and Orthotropic Plates," *Journal of Sound and vibration*, Vol. 141, pp. 291~311.
- (14) Kim, C.S. and Dickinson, S.M., 1992, "The Free Flexural Vibration of Isotropic and Orthotropic General Triangular Shaped Plates," *Journal of sound and Vibration*, Vol. 152, pp. 383~403.
- (15) Carrington, H., 1925, "The Frequencies of Vibration of Flat Circular Plates Fixed at the Circumference," *Philosophical Magazine*, Vol. 50, pp. 1261~1264.
- (16) Kim, C.S. and Dickinson, S.M., 1989, "On the Lateral Vibration of Thin Annular and Circular Composite Plates subject to Certain Complicating Effects," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 130, pp. 363~377.
- (17) Shibaoka, Y., 1956, "On the Transverse Vibration of an Elliptic Plate with Clamped Edge," *Journal of Physical Society of Japan*, Vol. 11, pp. 797~803.
- (18) McNitt, R.P., 1962, "Free Vibration of a Clamped Elliptical Plate," *Journal of Aerospace Science*, Vol. 29, pp. 1124~1125.
- (19) Leissa, A.W. and Narita, Y., 1980, "On the Use of a Coordinate Transformation for Analysis of Axisymmetric Vibration of Polar Orthotropic Annular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 24, pp. 165~175.
- (20) Itao, K. and Crandall, S.H., 1979, "Natural Modes and Natural Frequencies of Uniform, Circular, Free-Edge Plates," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 448~453.