

〈論 文〉

# 마찰 접촉력을 고려한 다발 보(Stacked Beam)의 진동 해석

이기수\* · 임철호\*\*

(1992년 4월 4일 접수)

## Vibration Analysis of a Stacked Beam Including Frictional Contact Force

Kisu Lee and Cheol-Ho Lim

**Key Words :** Stacked Beam(다발 보), Friction(마찰), Vibration(진동), Iterative Scheme(반복 계산법)

### Abstract

Numerical solution technique is suggested to analyze the vibration of a spring composed of stacked beams fastened together. Bernoulli-Euler beam theory for small deflection is used, and incremental Coulomb friction law is adopted for the interface friction. The validity of the present solution technique is checked for the perfectly bonded case and the perfect sliding case.

### 1. 서 론

기계 설비중에는 여러개의 보가 서로 묶여져 하나의 스프링과 같은 역할을 하는 경우가 많으며 자동차의 판 스프링(leaf spring)은 그 예의 하나이다. 이와 같은 스프링의 특성은 인접한 보 사이의 마찰력에 의하여 크게 좌우된다. 그런데 대부분의 경우 이러한 스프링은 모델링 현상을 단순화 시켜서 해석하였다. 예로써 판 스프링(leaf spring)은 적당한 마찰 요소를 선형 스프링과 결합하여 해석하거나<sup>(1-2)</sup> 단순화된 실험식을 사용하여<sup>(3)</sup> 해석하였다. 만약 실제의 보 방정식과 마찰력을 사용하여 해석을 수행한다면 좀 더 정확한 결과를 얻을 수 있으며 개스 터빈 블레이드 진동 문제 등에도 응용될 수 있을 것이다.

인접한 보 사이의 상대운동으로 인하여 발생하는 마찰 및 접촉 현상은 복잡한 비선형 문제를 일으키

며 이의 해석을 위하여는 효율적인 해법이 필요하다. 수치 해석적으로 마찰 접촉 문제를 풀기 위하여 수많은 종류의 해법(예로써, 참고문헌 4-7)이 소개되었으나 다발보(stacked beam)의 마찰 접촉 현상에 응용된 예는 찾기 힘들다. 본 논문에서는 참고문헌 8의 해법을 응용하여 다발 보의 마찰 접촉 문제를 푸는 방법에 대하여 설명한다. 각 보 요소의 변형은 미소변형 및 Bernoulli-Euler이론을 이용하여 계산하며, 마찰력 계산을 위하여는 Coulomb 마찰 법칙을 이용한다. 보의 종류와 형상 및 보를 묶는 클램프(clamp)의 종류에 따라서 수 많은 종류의 스프링이 얻어 질 수 있다. 여기에서는 편의상 보 다발이 클램프에 의하여 강하게 묶여 있으며, 그 묶인 점에서는 각 보의 법선 방향(normal direction) 상대 운동은 없는 것으로 간주한다.

### 2. 기본모델

본 논문에서는 편의상 Fig. 1과 같은 단순화된 모델을 이용하여 계산 방법을 설명하기로 한다.

\*정회원, 한국항공우주연구소 위성분체실

\*\*정회원, 한국과학기술연구원 시스템공학연구소

Fig. 1은 질량을 무시할 수 있는 여러개의 보가 강한 클램프에 의하여 묶여져 스프링과 같은 역할을 하며 여기에 질량을 가진 강체  $R$ 이 매달려 있는 모델을 나타낸다. 여기에서 각 보의 변형은 유한요소법을 이용하여 계산하며 클램프가 있는 점에서는 인접한 보가 법선 방향으로 상대 운동을 하지 않도록 한다. 폭이  $h$ 인 보의 단면  $i$ 에서 상면(또는 하면)의 변위와 단면 중앙의 변위는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned} (u_{is})_t &= (u_{ic})_t \pm \frac{h}{2} \theta_i \\ (u_{is})_n &= (u_{ic})_n \end{aligned} \quad (1)$$

위에서  $\theta_i$ 는 단면  $i$ 의 회전을, 하첨자  $t$ 와  $n$ 은 점선 방향과 법선 방향을, 하첨자  $is$ 와  $ic$ 는 단면  $i$ 의 표면(상면과 하면)과 중앙을 나타낸다(예로써 Fig. 1에 두번째 보 단면  $i$ 의 점  $is$ 와 점  $ic$ 가 표시되어 있다). 단면  $i$ 의 상면 또는 하면에서 힘  $(p_{is})_t$ 와  $(p_{is})_n$ 가 작용한다면, 이 힘은 다음과 같이 단면  $i$ 의 중앙에 작용하는 힘과 모멘트로 변환시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} (p_{ic})_t &= (p_{is})_t \\ (p_{ic})_n &= (p_{is})_n \\ M_i &= \pm \frac{h}{2} (p_{is})_t \end{aligned} \quad (2)$$

다발 보(stacked beam) 전체의 모든 절점(nodal point)에 (1) 및 (2)식을 적용하면, 다음과 같은 변환식을 얻을 수 있다.

$$u_s = T u_c \quad (3)$$

$$p_c = T^T p_s \quad (4)$$

위에서  $T$ 는 변환 행렬이며,  $u_c$ 는 회전 항을 포함

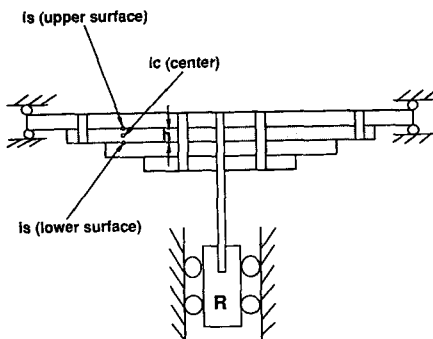


Fig. 1 Typical spring composed of stacked beams

하고  $p_c$ 는 굽힘 모멘트를 포함한다. 여기에서  $u_c$  및  $P_c$ 는 통상적인 구조해석 및 유한요소법의 보 이론에 나오는 항들이며,  $u_s$ 와  $p_s$ 는 보 표면에서의 변위와 힘을 나타낸다. Fig. 1에 통상적인 유한요소법 이론을 적용하여 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$u_c = C p_c + \text{displacement by } f \quad (5)$$

위에서  $C$ 는 유연성 행렬(flexibility matrix)을 나타내고  $f$ 는 강체  $R$ 로부터 보로 전달되는 힘을 나타낸다. 행렬  $C$ 는 대칭이고 positive definite이다. 식(3)~(5)로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$u_s = T C T^T p_s + A f \quad (6)$$

위에서  $A$ 는  $f$ 가 1인 경우에 보의 표면에서 발생하는 변위이다. 마찰 접촉력을 계산하는 경우에는 표면에서의 변위와 힘  $u_s$ 와  $p_s$ 만이 필요하다. 따라서 다음 장부터는 방정식에서 하첨자  $s$ 를  $u_s$ 와  $p_s$ 로부터 삭제하고 사용한다.

### 3. 보 사이 접촉면에서의 마찰 접촉 조건

인접한 보 사이의 접촉 가능점은 매 계산 시간마다 그 당시의 기하학적 형태에 의하여 지정한다. 서로 인접한 보 A와 B의 접촉 가능점(contact pairing points)을  $i^A$ 와  $i^B$ 라고 한다. 점  $i^A$ 와  $i^B$ 의 변위를  $u_i^A$ 와  $u_i^B$ 라고 하며, 이들 점의 초기(즉  $t=0$ 에서의) 거리를  $d_i$ 라고 한다. 그러면 현 계산 시간에서 점  $i^A$ 와  $i^B$ 의 상대위치  $s_i$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$s_i = u_i^A - u_i^B - d_i \quad (7)$$

한편 Coulomb 마찰 법칙은 매 계산 시간마다 상대 이동량의 증감을 고려하여 incremental sense로 적용한다. 그러면 점  $i^A$ 와  $i^B$ 에서의 마찰 접촉 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{in} &\leq 0 \\ s_{in} &\leq 0 \\ p_{in} &= 0 \text{ if } s_{in} < 0 \\ s_{it} &= 0 \text{ if } |p_{it}| < \mu |p_{in}| \\ s_{it} &= -\beta p_{it} \text{ with some value of } \beta (\beta > 0) \\ &\text{if } |p_{it}| = \mu |p_{in}| > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서  $\mu$ 는 마찰계수를 나타낸다. 위의 마찰 접촉 조건과 관련하여 참고문헌 8에 소개된 방법에

준하여 접촉점  $i^A$ 와  $i^B$ 에서의 오차 벡터  $v$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} v_{in} &= s_{in} \text{ if } p_{in} < 0 \text{ or if } s_{in} > 0 \\ &= 0 \text{ if } p_{in} \geq 0 \text{ and } s_{in} \leq 0 \\ v_{it} &= s_{it} \text{ if } |p_{it}| < \mu |p_{in}| \\ &\text{or if } \text{sign}(p_{it}) = \text{sign}(s_{it}) \text{ and } |p_{in}| > 0 \\ &= 0 \text{ if } |p_{it}| \geq \mu |p_{in}| \text{ and } \text{sign}(p_{it}) \\ &= -\text{sign}(s_{it}) \\ &\text{or if } |p_{in}| \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

그러면 마찰 접촉 조건 (8)은 다음의 조건을 만족시키면 만족된다.

$$\begin{aligned} p_{in} &\leq 0 \\ |p_{it}| &\leq \mu |p_{in}| \\ v &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

본 논문에서는  $p$ 의 값을 반복계산법(iterative scheme)에 의하여 조절하여 모든 접촉 가능점에서의 오차 벡터  $v$ 가 0을 향하여 단조 감소하게 만드는 방법을 사용한다.

#### 4. 방정식 해법

Fig.1의 강체  $R$ 의 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m\dot{w} = -f \quad (11)$$

위에서  $m$ 과  $w$ 는 강체  $R$ 의 질량과 변위를 나타낸다. 방정식 (6)과 Betti의 상반 정리(reciprocal theorem)에 의해서 변위  $w$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = A^T p + a f \quad (12)$$

위에서  $a$ 는  $f$ 가 1일 경우에 발생하는 변위를 의미한다. 식(11)와 (12)로부터

$$m\dot{w} = \frac{1}{a}(-w + A^T p) \quad (13)$$

본 논문에서 계산은 이산화 시간 단위(discrete time step)로 수행하며, 각 계산 시간 사이의  $p$  값은 내삽법(interpolation)에 의하여 주어진다. 시간 간격 크기인  $\Delta t$ 가 충분히 작으면 내삽법에서 비선형의 고차항을 무시할 수 있으므로 다음과 같은 식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} p(t + \phi \Delta t) &= p^t + \phi(p^{t+\Delta t} - p^t) \\ \text{for } 0 \leq \phi \leq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

식(13)과 (14)에 의하여 시간  $t$ 와 시간  $t + \Delta t$  사이에서 다음과 같은 식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} m\dot{w} + \frac{w}{a} &= \frac{1}{a} A^T p^t + \frac{1}{a \Delta t} A^T \\ &\quad (p^{t+\Delta t} - p^t)(t' - t) \end{aligned} \quad (15)$$

$t \leq t' \leq t + \Delta t$ 인 구간에서 방정식 (15)의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} w(t') &= k_1 \sin \sqrt{\frac{1}{am}} t' + k_2 \cos \sqrt{\frac{1}{am}} t' \\ &\quad + A^T p^t + \frac{1}{\Delta t} A^T (p^{t+\Delta t} - p^t)(t' - t) \end{aligned} \quad (16)$$

위에서  $k_1$ 과  $k_2$ 는  $w^t$ 와  $\dot{w}^t$ 의 값에 의하여 결정된다. 각 계산 시간에서의  $p$  값을 적절히 주면 마찰 접촉 조건식 (8)을 매 계산 시간마다 만족시킬 수 있다. 이러한  $p$  값은 매 계산 시간마다 참고문헌 8에 소개된 반복 계산법(iterative scheme)을 이용하여 계산할 수 있다. 다음은 계산 시간  $t + \Delta t$ 에서의 반복계산법이다.

$$\begin{aligned} \bar{p}^{j,t+\Delta t} &= p^{j-1,t+\Delta t} - \alpha E s^{j-1,t+\Delta t} \\ \bar{p}_{it}^{j,t+\Delta t} &= \min(0, \bar{p}_{it}^{j,t+\Delta t}) \\ p_{it}^{j,t+\Delta t} &= \text{sign}(\bar{p}_{it}^{j,t+\Delta t}) \min(|\bar{p}_{it}^{j,t+\Delta t}|, \mu \tau_i) \\ &\quad \text{if } v_{it}^{j-1,t+\Delta t} = s_{it}^{j-1,t+\Delta t} \\ &= \text{sign}(\bar{p}_{it}^{j,t+\Delta t}) \mu \tau_i \\ &\quad \text{if } v_{it}^{j-1,t+\Delta t} = 0 \neq s_{it}^{j-1,t+\Delta t} \end{aligned} \quad (17)$$

위에서  $j$ 는 반복계산의 카운터이며  $\alpha$  및  $E$ 는 수렴 및 계산 시간 절감을 위한 상수 및 가속행열이며 참고문헌 8에 자세히 설명되어 있다. 특히 본 작업에서는 편의상 계산가속기법(acceleration technique)을 적용하지 않으므로  $E$ 는 단위 행렬로 간주한다. 위에서  $\tau_i = |p_{it}^{j,t+\Delta t}|$ 이면 Coulomb 마찰 법칙이 정확히 만족되나 수렴(convergence)에 문제가 생기는 경우에는  $\tau_i = |p_{it}^{*t}|$ (여기에서,  $p_{it}^{*t}$ 은 시간  $t$ 에서 결정된  $p_{in}$ 의 값)으로 하여 계산한다. 반복계산법의 수렴에 대한 사항은 부록 및 참고문헌 8에서 자세히 설명되어 있다. 시간  $t + \Delta t$ 에서의 계산 과정을 다음에 간단히 설명한다.

- (1) 계산시간  $t$ 에서의  $w^t$ 와  $\dot{w}^t$ 의 값을 이용하여  $k_1$ 과  $k_2$ 를 결정한다.
- (2)  $j$ (반복계산법의 카운터)를 0으로 하고 전번 계산 시간  $t$ 에서의 값을 이용하여  $(p^{j,t+\Delta t})_s$ 를 결정한다. Step 4로 간다.
- (3) 반복 계산법(17)을 이용하여  $(p^{j,t+\Delta t})_s$ 를 계산한다

(4) 방정식 (15)와 (16)을 풀어서  $w^{j,t+\Delta t}$ 와  $\dot{w}^{j,t+\Delta t}$ 를 계산한다.

(5) 식(11)에 의하여  $f^{j,t+\Delta t}$ 를 계산한다.

(6)  $(p^{j,t+\Delta t})_s$ 과  $f^{j,t+\Delta t}$ 에 의해서  $(u^{j,t+\Delta t})_s$ 를 계산한다.

(7) 식(10)에 의해서  $v^{j,t+\Delta t}$ 를 계산한다.

(8) 만약  $\|v^{j,t+\Delta t}\|_2$ 가 사전 지정된 허용 오차 (tolerance)보다 작으면 다음 계산 시간으로 가고, 그렇지 않으면  $j=j+1$ 로 하여 위의 Step 3으로 가서 현 계산 시간  $t+\Delta t$ 에서의 계산을 계속한다.

### 5. 예제 계산

Fig. 2의 모델은 세계의 묶여진 보로 구성되어 있으며 폭이 매우 작은 4개의 클램프가 등간격으로 배치되어 있다. 각 보의 Young's modulus는  $2 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, 길이는 0.5 m, 폭은 0.05 m이고 높이는 0.005 m이다. 강체 R의 질량은 20 kg이고 강체 R이  $t=0$ 에서 수직 방향으로 2 m/sec라는 속도로 움직이고 있다. 유한요소법을 적용하기 위하여 각 보의 왼쪽 절반에 20개의 보 요소 (beam element)를 사용하였다. 불필요한 계산 오차를 줄이기 위하여, 접촉점  $i$ 가 시간  $t$ 에서 sticking condition이었다면, 식 (7)의  $d_i$  값은 시간  $t+\Delta t$ 에서 수정하지 않았다.

먼저 각 보 사이에 완전한 결합조건 (bonding condition)을 적용하여 문제를 풀어 보았다(이 경우에는 식(17)대신  $p=\bar{p}$ 라는 조건을 사용하고, 식(9)대신  $v=s$ 라는 조건을 사용하였다). 그런데 각각의 보가 완전히 결합되어 있다면 이것은 높이가 0.015m인 하나의 보 (solid beam)처럼 움직일 것이다. 본 계산 방법에 의하여 얻어진 강체 R의 변위와 해석적 해법 (analytic solution)에 의하여 얻어진 강체 R의 변위가 Fig. 3에 그려져 있다. 해석적 해법의 경우 높이가 0.015 m인 하나의 보가 사용되었다. 각 계산 시간에서의 반복 계산은  $\|v\|_2$ 가  $2 \cdot 10^{-6}$ 보다 작게 될 때까지 계속하였다. 계산 가속 기법 (acceleration technique)은 사용하지 않았으며 매 계산시간 당 평균 20회 (즉  $j=20$ )의 반복 계산 (iteration)이 필요하였다. 원칙적으로 매 계산 시간마다  $\Delta t$ 값을 변화시킬 수 있지만, 여기에서는 편의상  $\Delta t$ 를 0.001 sec로 고정하였다. (식(15)의 해에는  $p$ 의 내삽으로 인한 오차가 포함되어 있는데 이러한  $p$ 의 내삽 오차는 참고문헌 9등에 소개

된 방법을 이용하여 계산할 수 있으며, 이로 인하여 식(15)의 해에 포함된 오차의 상한치 역시 계산이 가능하다. 따라서 식(15)의 해에 포함된 오차가 허용 오차 (tolerance) 이하가 되도록  $\Delta t$ 값을 조절하는 것 역시 가능하지만 이것은 본 작업의 주목적이 아니므로, 본 작업에서는 이에 대한 언급을 생략한다)

다음에 각 보 사이의 마찰 계수를 0.5로 하고 각 클램프가 보들을 조이는 힘을 1000 N으로 하여 마찰 접촉 조건을 적용 시켜서 문제를 풀기로 한다. 이 경우 강체 R의 변위의 변화가 Fig. 4에 나타나 있으며, 왼쪽 상부 접촉면 (Fig. 2에서 굵게 칠한 부분)에 생기는 마찰력의 변화가 Fig. 5에 나타나 있다. Fig. 4 및 Fig. 5에 의하면, 클램프가 조이는 위치에서 sticking condition이 된 이후에는 거의 주기적인 운동이 반복됨을 알 수 있다. 강체 R에 작용하는 힘과 강체 R의 변위가 Fig. 6에 나타나

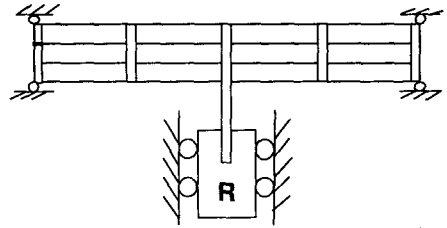


Fig. 2 Model of the example problem

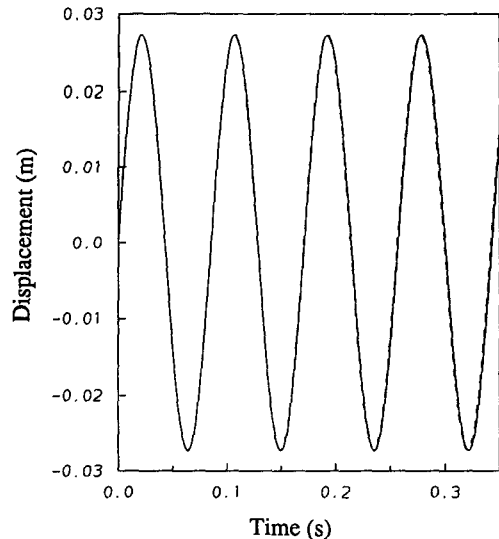


Fig. 3 Displacement of the rigid body vs. time for the perfectly bonded case (— present method, ... analytic solution)

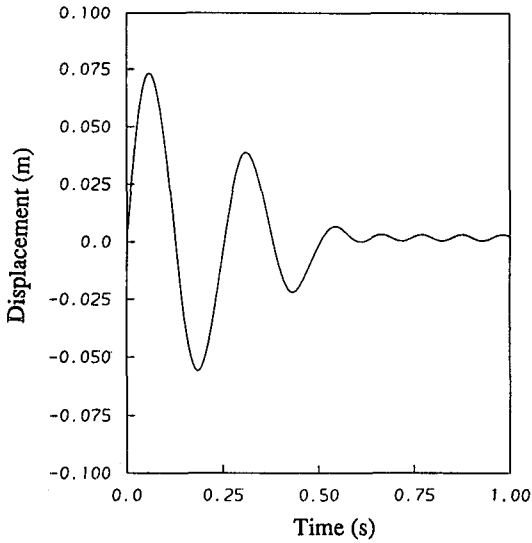


Fig. 4 Displacement of the rigid body vs. time for the frictional contact case(friction coefficient=0.5, clamp force=1000 N)

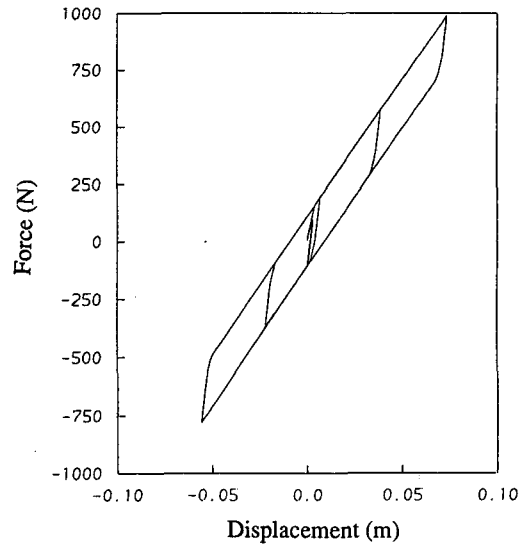


Fig. 6 Applied force vs. displacement of the rigid body (friction coefficient=0.5, clamp force=1000 N)

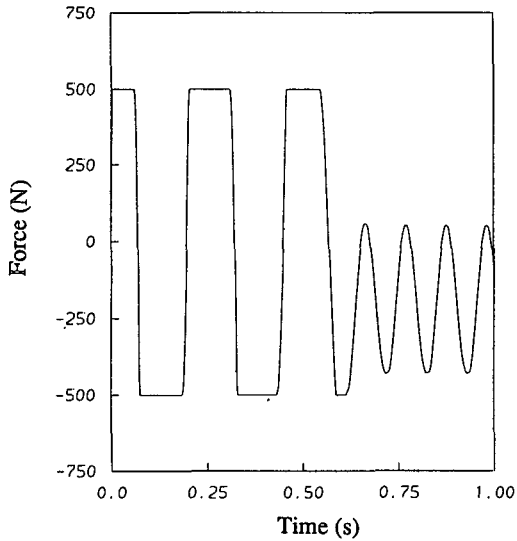


Fig. 5 Friction force vs. time on the interface of the specified position (friction coefficient=0.5, clamp force=1000 N)

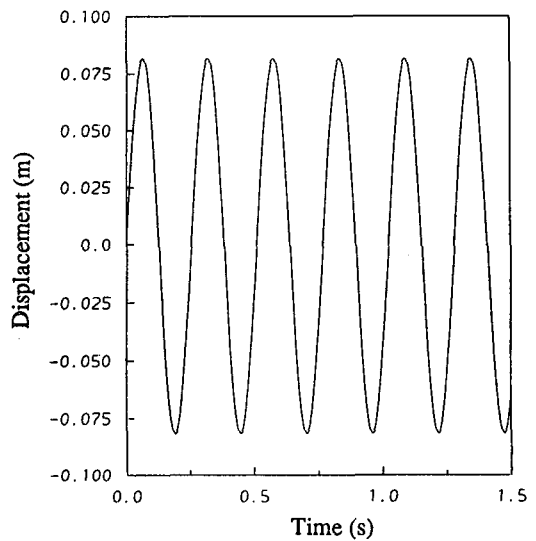


Fig. 7 Displacement of the rigid body vs. time for the frictionless contact(—present method,·····analytic solution)

있는데 이것은 참고문헌 3의 결과와 원칙적으로 동일한 모양을 보이고 있다. 본 문제의 경우에는 반복 계산법의 수렴 속도가 완전히 결합된 경우에 비하여 훨씬 빨랐다.

마지막으로 각 보 사이의 마찰 계수를 0으로 하여 문제를 풀었으며 강체 R의 변위의 변화가 Fig.

7에 나타나 있다. 이 경우의 해석적 해법(폭 0.15 m, 높이 0.005 m인 하나의 보 사용)역시 Fig. 7에 나타나 있는데 2개의 해는 완전히 일치하고 있다.

### 6. 결론

다발 보(stacked beam)로 구성된 스프링의 진동

문제를 수치해석적인 방법을 사용하여 계산하였다. 각 보의 변형은 Bernoulli-Euler 이론 및 유한요소법을 이용하여 계산하였다. 각 보 사이의 접촉면에는 Coulomb 마찰력을 이용한 접촉 조건을 적용하였으며, 매 계산 시간마다 반복 계산법을 이용하였다. 본 계산 방법의 정확도는 완전히 결합된 경우와 완전히 마찰이 없는 경우의 해석적 해와 비교하여 입증하였다. 참고문헌 8에 소개된 계산 가속 기법(acceleration technique)이 적용되지 않았지만 빠른 수렴 속도를 보여 주었다.

본 논문에서 사용한 반복계산법 및 유한요소법 이론은 일반적으로 대단히 복잡한 구조물이나 기계 장치에도 사용이 가능하다. 예로써 본 논문에서 설명한 방법은 판 스프링(leaf spring)이 부착된 복잡한 자동차의 현수장치 진동 문제에 응용될 수 있을 것이다. 보의 대변형 이론을 이용하거나 좀 더 복잡한 형태의 마찰 식을 사용하는 경우에는 본 논문의 해법을 확장할 필요가 있을 것이며 이 경우에도 본 작업의 해법에 잘 알려진 유한요소법 및 수치 해석 방법을 첨가하면 정확한 해석이 가능하다고 판단되며 이에대한 연구가 장래에 필요하다고 판단된다.

### 참고문헌

- (1) Van Deusen, B.D., 1971, "Truck Suspension System Optimization," SAE Transactions 710222, pp. 886~896.
- (2) Savel'ev, V.A., 1986, "Modeling of Elastic and Damping Properties of Leaf Spring," Soviet Machine Science, Vol. 3, pp. 56~61.
- (3) Cebon, D., 1986, "Simulation of the Response of Leaf Springs to Broad Band Random Excitation," Vehicle System Dynamics, Vol. 15, pp. 375~392.
- (4) Bathe, K.J. and Chaudhary, A.B., 1985, "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, p. 65~88.
- (5) Gallego, F.J. and Anza, J.J., 1989, "A Mixed Finite Element Model for the Elastic Contact Problems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 1249~1264.

- (6) Lee, G.B. and Kwak, B.M., 1989, "Formulation and Implementation of Beam Contact Problems under Large Displacement by a Mathematical Programming," Computers and Structures, Vol. 31, pp. 365~376.
- (7) Kooi, B.W., 1985, "A Unilateral Contact Problem with the Heavy Elastica Solved by Use of Finite Elements," Computers and Structures, Vol. 21, pp. 95~103.
- (8) Lee, K., 1989, "An Efficient Solution Method for Frictional Contact Problems," Computers and Structures, Vol. 32, pp. 1~11.
- (9) Atkinson, K.E., 1989, "An Introduction to Numerical Analysis," John Wiley & Sons, New York.

### 부 록

먼저  $p$ 의 미소 변화  $\delta p$ 가 각 식들에 주는 영향에 대하여 생각한다. 상첨자  $t + \Delta t$ 는 편의상 생략한다. 식(6)과 (11)로부터

$$\delta u = TCT^T \delta p - Am \delta \ddot{w} \quad (A1)$$

$\Delta t$ 가 충분히 작다면  $\delta w$ 는  $\delta \ddot{w}$ 에 비하여 무시할 수 있으므로, 식(13)으로부터

$$\delta \ddot{w} = \frac{1}{am} A^T \delta p \quad (A2)$$

행렬  $C'$ 를 다음과 같이 정의한다면

$$C' = TCT^T - \frac{1}{a} AA^T \quad (A3)$$

$C'$ 는  $w=0$ 라는 제한조건을 가하여 얻어진 유연성 행렬(flexibility matrix)이므로 대칭이고 positive definite인 행렬이 된다. 식(A1)~(A3)로부터 다음 식이 얻어진다.

$$\delta u = C' \delta p \quad (A4)$$

식(A4)에서  $\delta p$ 가  $p^j - p^{j-1}$ 를 의미하고  $\delta v$ 가  $v^j - v^{j-1}$ 를 의미한다면, 식(A4)는 참고문헌 8에 있는 기본식과 동일하게 되며 따라서 참고문헌 8의 수렴 이론이 그대로 적용된다. 즉 반복계산법(17)에 의하여 모든 접촉 가능점의 오차 벡터  $v$ 는 0을 향하여 단조 감소하며 마찰 접촉 조건(10)을 만족시키게 된다.