

〈論 文〉

## 강구의 충돌에 의한 양단자유 보의 진동 및 음향 방사에 관한 연구

박홍철\* · 이효근\*\* · 박윤식\*\*\*

(1992년 2월 22일 접수)

### A Study on the Vibration and Acoustic Radiation from an Elastic Free-Free Beam due to a Steel Ball Impact

Hong-Cheol Park, Hyo-Keun Lee and Youn-sik Park

**Key Words :** Impact(충돌), Acoustic Radiation(음향방사), Steel Ball(강구), Free-free Beam(양단 자유 보), Contact Duration(접촉시간), Hertz's Theory(허츠 이론), Impact Force(충격력), Modal Analysis(모우드 해석), Elliptic Coordinate System(타원좌표계)

#### Abstract

In this study, vibrations and resulting acoustic radiations from an elastic beam impacted by a steel ball were studied theoretically and experimentally. First the transverse vibrations of free-free elastic beams are analysed with modal analysis technique. The impact forces are modeled with the Hertz's theory and the contact duration is compared with the measured values. Also the calculated beam vibrations are verified with the experimental results. Then the acoustic radiations due to the beam vibration are studied numerically and experimentally. The acoustic pressure is calculated assuming the beam has an elliptical cross-section. The predicted acoustic pressure is compared with the measured value. It was found that both the predicted beam vibrations using the Hertz's theory and the estimated acoustic pressure under the assumption of an elliptical cross-section are in very good agreements with the measured values.

#### 기 호 설 명

<p><math>A</math> : 보의 단면적</p> <p><math>b, h_1</math> : 타원단면의 장축과 단축의 길이</p> <p><math>c_o, c_b</math> : 공기와 보의 전파 속도</p> <p><math>d</math> : 접촉시간</p> <p><math>\bar{F}_n(\omega)</math> : 음압의 주파수응답함수</p> <p><math>h</math> : 보의 두께</p> <p><math>h_b(t), h_s(t)</math> : 보와 구의 충격응답함수</p> <p><math>\Psi_n(x)</math> : 보의 모우드 함수</p>	<p><math>k_2</math> : 허츠(Hertz) 상수</p> <p><math>k_o</math> : 음향 파수(wave number <math>\omega/c_o</math>)</p> <p><math>k_b</math> : 보의 파수</p> <p><math>L</math> : 보의 길이</p> <p><math>m_b</math> : 보의 단위길이당 질량</p> <p><math>m_s</math> : 강구의 질량</p> <p><math>q_n(t)</math> : 일반좌표(generalized coordinate)</p> <p><math>S</math> : 보의 표면적</p> <p><math>V_o</math> : 충돌속도</p> <p><math>w(x, t), \dot{w}(x, t)</math> : 보의 변위와 가속도</p> <p><math>\bar{a}_n(\omega)</math> : 가속도의 푸리에변환</p> <p><math>\xi(t)</math> : 충돌후의 구의 전체 변위</p>
---	--

\*삼성전자(주) 가전부문 종합연구소

\*\*한국과학기술원 기계공학과

\*\*\*정희원, 한국과학기술원 기계공학과

- $\xi_s(t), \xi_b(t)$  : 충격력에 의한 구와 보의 탄성 변위
- $\eta(t)$  : 충돌에 의한 함입깊이 (penetrated depth)
- $\rho_s, \rho, \rho_o$  : 구, 보와 공기의 밀도
- $u, \phi$  : 타원좌표계
- $\omega_n$  :  $n$ 번째 고유진동수
- $\omega_{co}$  : 임계주파수 (coincidence frequency)

### 1. 서 론

충돌현상은 실생활과 제품생산의 여러가지 작업 과정이나 일상 용품에서 흔히 나타나며 그 예로는 단조, 편칭, 리벳팅, 스템핑등의 작업, 컴퓨터 주변 장치인 도트 프린터등의 사무용 기기등을 들 수 있다.

구조물에 충격이 가해지는 경우에는 예외없이 높은 음압을 갖는 충격소음이 발생하게 되는데 이는 작업능력에도 많은 영향을 미치고 특히 최근에는 소음과 관련된 공해 문제로 많은 관심을 일으키고 있다. 그래서 작업장에서는 이 충격소음에 대한 연구가 실험적 해석적인 방법으로 많이 진행되고 있다.

본 연구의 동기는 충격소음의 특성을 관찰하고 구조물의 진동으로부터 충격소음을 이론적으로 계산하여 구조물 설계시 충격소음을 예측해 보고자 하는데서 시작되었다.

충격음에 대하여 현재까지 진행된 연구를 살펴보면 주로 형상이 간단한 구와 구의 충돌, 구와 배플 (baffle)이 있는 원주 고정원형평판 (clamped circular plate)의 충돌시에 발생하는 음압에 대하여 연구되었다. <sup>(1),(2),(3)</sup>

보의 경우는 M.Endo와 M.Sakata<sup>(4)</sup>가 원형 실린더 (circular cylinder)에 구가 종방향 및 횡방향으로 충돌할 때의 음향방사에 대하여 연구하였으며, W.K.Blake<sup>(5)</sup>는 사각단면의 양단자유보의 조화운동에 의하여 형성되는 음장을 배플이 있는 경우와 없는 경우에 대하여 사각단면을 타원단면으로 근사화하여 이론 및 실험적으로 연구하였으며 M.Sakata와 M.Horii<sup>(6)</sup>는 점탄성 재료의 원형단면 및 사각단면의 양단자유보에 강구가 충돌할 때의 음압을 W.K.Blake에 의하여 구해진 정상상태 해와 보의 과도 진동의 Fourier 변환과 결합하여 구하였다.

본 연구에서는 배플이 없는 사각단면을 가진 양단자유의 탄성보에 강구가 횡방향으로 충돌할 때

발생되는 음압을 M.Sakata와 M.Horii의 방법을 적용하여 구하였으며, 보의 가속도는 모우드 해석 기법을 적용하여 구하였다. 그리고 충돌시 발생하는 충격력과 접촉시간은 허츠(Hertz)접촉이론을 이용하였다. 그리고 실험을 통하여 이론으로 구한 보의 가속도, 접촉시간, 방사음압의 결과와 비교하였다. 기존의 연구내용을 기반으로한 본 논문의 기여부분은 hertz 접촉이론을 본 연구의 시스템에 적용하여 접촉시간을 실험적으로 검증하였으며 모우드 해석기법을 이용하여 구한 보의 진동을 실험과 비교하였고, 시스템을 탄성보로하여 M.Sakata의 방법을 적용하여 발생하는 음압을 실험으로 검증한 것이다.

### 2. 본론

#### 2.1 시스템의 모형화 및 충격력 해석

먼저 본 논문에서 해석하고자 하는 시스템은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 양 끝단이 자유이고 단면적이 사각형인 탄성보에 강구가 충돌하는 경우이다. 강구의 충돌에 의한 보의 응답과 방사되는 음압을 구하려면 먼저 두 물체가 충돌할 때 두 물체 사이에 작용되는 충격력을 정확히 규명해야 한다. 이 충격력은 강구의 운동방정식과 보의 강제진동 및 Hertz접촉이론으로부터 구할 수 있다. Hertz접촉이론이 적용되기 위한 기본 가정은 충돌속도가 충돌하는 물체의 탄성파의 전파 속도에 비하여 충분히 작아야하고, 접촉 면적이 충돌 물체 표면의 대

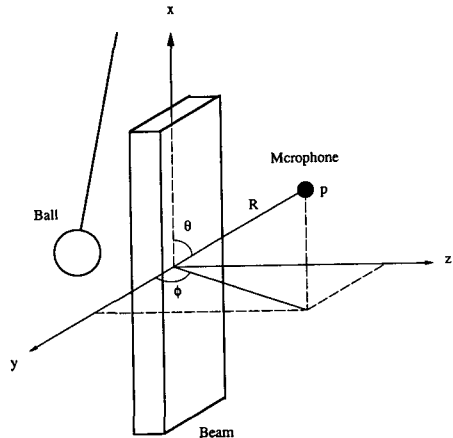


Fig. 1 Beam with rectangular cross-section impacted by a steel sphere

표면적보다 매우 작아야 한다.

충격력을 구하기 위하여 보의 충격응답함수 (impulse response function)와 경계조건을 만족하는 모우드 함수를 구한다. Bernoulli-Euler의 보이론으로부터 단면적이 균일한 보의 중앙에 대한 충격응답함수 (impulse response function)는 다음과 같다.

$$h(x,t) = \frac{1}{\rho A} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(0) \Psi_n(x) \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \quad (1)$$

여기서,  $\Psi_n(x)$ 은 모우드 함수,  $\omega_n$ 은 고유진동수이다.

한편 양단자유 의 경계조건을 만족하는 모우드 함수는 다음과 같다.

$$\Psi_n(x') = \frac{1}{\sqrt{L}} \left\{ \frac{\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L} (\sin \beta_n x' + \sinh \beta_n x') - (\cos \beta_n x' + \cosh \beta_n x') \right\} \quad (2)$$

여기서,  $x' = x + L/2$ ,  $L$ 은 보의 길이이고  $\beta_n^4 = \frac{\omega_n^2 m_b}{EI}$ 이다. 그리고  $E$ 는 Young계수,  $I$ 는 단면계수이며  $m_b$ 는 보의 단위길이당 질량이다.

초기에 정지해 있는 보의 중앙에 강구가  $V_0$ 의 속도로 충돌하면 충격력  $f(t)$ 가 발생한다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 강구가 충돌시에 발생한 충격력에 의한 변위를  $\xi_s(t)$ 라 하고, 충돌점에서 충격력에 의한 보의 변위를  $\xi_b(t)$ 라 하면 탄성 함입값이  $\eta(t)$ 는 다음과 같다.

$$\eta(t) = V_0 t - \xi_s(t) - \xi_b(t) \quad (3)$$

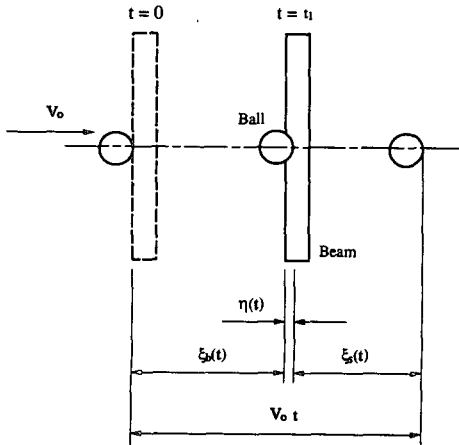


Fig. 2 Impact model of sphere and beam

여기서,  $\xi_s(t) = \int_0^t f(\tau) \frac{t-\tau}{m_s} d\tau$ 이고  $\xi_b(t) = \int_0^t f(\tau) \frac{1}{m_b} \sum_{n=0}^{\infty} [\Psi_n(0)]^2 \frac{\sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} d\tau$ 이며  $m_s$ 는 강구의 질량이다.

Hertz의 접촉이론으로부터 탄성체의 충돌시 두 물체의 함입깊이와 충격력과의 관계는 다음과 같다.<sup>(7)</sup>

$$f(t) = k_2 [\eta(t)]^{3/2} \quad (4)$$

여기서  $k_2$ 는 충돌하는 물체의 형상에 관계된 상수로서 구와 평면인 경우에는 다음과 같다.

$$k_2 = \frac{4\sqrt{R_s}}{3\pi} \left( \frac{1-v_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-v_2^2}{\pi E_2} \right)^{-1} \quad (5)$$

여기서,  $v_1, v_2$ 는 각각 구와 보의 포와송비이며  $E_1, E_2$ 는 각각 구와 보의 탄성계수이고  $R_s$ 는 구의 반경이다.

식(3)과 식(5)를 식(4)에 대입하면 아래와 같다.

$$\left[ \frac{f(t)}{k_2} \right]^{2/3} = V_0 t - \frac{1}{m_s} \int_0^t f(\tau) (t-\tau) d\tau - \frac{1}{m_b} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t [\Psi_n(0)]^2 \frac{\sin \omega_n(t-\tau)}{\omega_n} f(\tau) d\tau \quad (6)$$

비선형적분방정식인 식(6)은 해석해(analytic solution)가 존재하지 않으므로 수치적으로 해를 구한다. 그리고 접촉시간은 위 식에서 구한 충격력  $f(t)$ 가 초기치 영에서부터 시작하여 다시 영이 될 때까지의 경과 시간을 말한다.

### 2.2 구와 보의 응답해석

1.1절에서 구한 충격력은 수치적으로 구하였기 때문에 보의 응답과 방사음압을 구할 때 어려움이 많다. 그래서 다루기 편리한 해석함수로 근사화 하여 사용하는 것이 보통이다. 주로 사용하는 해석함수로는 정현함수나 정현함수의 제곱함수가 있는데 정현함수의 제곱이 좀더 정확하게 충격력을 묘사하는 함수로 알려져 있다. 그래서 본 연구에서는 다음과 같은 해석함수를 이용하여 충격력을 근사화 한다.

$$f(t) = \begin{cases} F_0 \sin^2 \omega_0 t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0 & t > \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases} \quad (7)$$

여기서,  $\omega_0 = \frac{\pi}{d}$ 이고  $d$ 는 접촉시간이다.

구와 보가 충돌할 때는 두 물체가 접촉하고 있는 동안은 충격력에 의한 강제진동을 하고, 접촉이 끝난 후에는 접촉이 끝날 때의 조건을 초기조건으로 하는 자유진동을 하게된다. 충격력이 작용할 경우 보의 변위는 충격력과 충격응답함수와와의 대합적분(convolution)에 의하여 구해진다. 즉,

$$w(x, t) = \int_0^t f(\tau) h_b(x, t - \tau) d\tau \quad (8)$$

여기서  $h_b(t)$ 는 보의 충격응답함수이다.

근사화된 충격력과 보의 충격응답함수를 이용하고, 충돌이 끝날 때의 조건을 자유진동의 초기조건으로 이용하면 보의 변위는 다음과 같이 표현할 수 있으며 가속도는 변위를 시간에 대하여 두번 미분하여 구할 수 있다.

$$w(x, t) = F_o \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) \Psi_n(0) \int_0^t \sin^2(\omega_o \tau) \frac{\sin[\omega_n(t - \tau)]}{\omega_n} d\tau, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_o}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) \left\{ q_n \left( \frac{\pi}{\omega_o} \right) \cos \left[ \omega_n \left( t - \frac{\pi}{\omega_o} \right) \right] + \dot{q}_n \left( \frac{\pi}{\omega_o} \right) \frac{\sin \left[ \omega_n \left( t - \frac{\pi}{\omega_o} \right) \right]}{\omega_n} \right\}, \quad t \geq \frac{\pi}{\omega_o} \quad (9)$$

한편 H.Lamb<sup>(6)</sup>에 의하면 구의 진동에서 가장 낮은 주파수는 구의 한쪽 방향 지름이 늘어났다 줄었다 하는 모우드이며 이때의 진동수는 다음과 같이 알려져 있다.

$$f_o = 0.840 \frac{\sqrt{G/\rho_s}}{2R_s} \quad (10)$$

여기서,  $\rho_s$ 는 구의 밀도이고  $G$ 는 전단계수(shear modulus)이다. 예를 들어 반지름이 1 cm인 구의 기본진동수를 계산해 보면 그 재질이 강일 때 134.2 kHz, 알루미늄일 때 130.5 kHz, 구리일 때 93.3 kHz이다.

그러므로 구의 직경이 아주 크지않은 한 구의 고유진동수는 가청주파수 범위를 훨씬 넘어서며 진동의 진폭도 매우 작아서 강제로 볼 수 있으며 따라서 구의 진동으로부터 방사되는 음압은 고려할 필요가 없다.

### 2.3 보로부터 방사되는 음압의 해석

Fig. 1과 같은 사각단면을 갖는 유한한 보의 방사 문제를 직각좌표를 이용하여 풀면 보의 표면 바깥 영역의 입자속도( $V(x, t)$ )를 알 수 없기 때문에

혼합경계치문제(mixed boundary value problem)가 되어 파동방정식의 특수해를 구하기 위해서는 비제차 적분방정식(inhomogeneous integral equation)을 풀어야 한다. 이것을 피하고 간단히 풀기 위하여 Fig. 3과 같이 장축이  $b/2$ , 단축이  $h_1/2$ 인 타원 단면을 갖는 보로 근사화하여 방사 문제를 풀 수 있다. 이 시스템에 대한 타원좌표계는 다음과 같이 주어진다.

$$y = a \cosh u \cos \phi$$

$$z = a \sinh u \sin \phi \quad (11)$$

$$x = x \sinh$$

여기서  $a^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{2h}{\pi}\right)^2$ 이고 그 의미는 사각단면의 단면적과 근사화된 타원단면의 단면적을 같게 한 것이다.

정상상태의 해를  $p = P \exp(-j\omega t)$ 라고 하면 파동방정식을 만족하는  $P$ 는 다음의 식을 풀어서 구한다.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + \frac{a^2}{2} (\cosh 2u - \cos 2\phi) \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k_0^2 P \right) = 0 \quad (12)$$

그러므로 식(12)는  $\bar{P}(u, \phi, k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u, \phi, x) \exp(-jk_x x) dx$ 로 정의되는 파수푸리에 변환(wave number Fourier transform)을 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \phi^2} + \epsilon^2 (\cosh^2 u - \cos^2 \phi) \bar{P} = 0 \quad (13)$$

여기서  $\epsilon^2 = a^2(k_o^2 - k_x^2)$ 이며 일반적으로 작은 값이다.

변수 분리를 통하여 ( $\bar{P}(u, \phi, \epsilon) = \bar{U}(u, \epsilon) \bar{\Phi}(\phi, \epsilon)$ ) 해  $\bar{P}$ 는 다음 방정식을 풀어서 구한다.

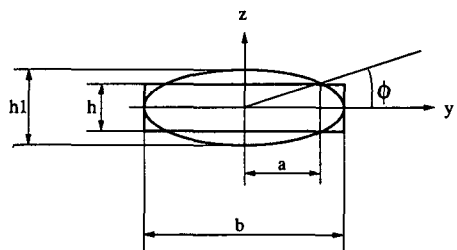


Fig. 3 Elliptic cross-section to approximate a beam of rectangular cross-section

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}(\phi, \epsilon)}{\partial \phi^2} + (m - \epsilon^2 \cos^2 \phi) \bar{\Phi}(\phi, \epsilon) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}(u, \epsilon)}{\partial u^2} + (m - \epsilon^2 \cosh^2 u) \bar{U}(u, \epsilon) = 0 \quad (14)$$

여기서  $m$ 은 분리상수이다.

식(14)는 각각 Mathieu 방정식과 수정된 Mathieu 방정식이다. 이 식의 해를 각각  $S^m(\phi, \epsilon)$ 과  $H^m(u, \epsilon)$ 라 하면 파동방정식의 파수푸리에변환의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{F}(u, \phi, k_x, t) &= \sum_m A_m(k_x) S^m(\phi, \epsilon) \\ H^m(u, \epsilon) \exp(-j\omega t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $A_m$ 은 경계조건에 의하여 결정되는 상수이다.

한편, 양단자유보의 모우드는 쌍곡(hyperbolic)항을 포함하고 있지만 구조파장(structural wave length)이 음향파장(acoustic wavelength)보다 훨씬 클 때는 고주파 영역이므로 이 쌍곡항은 서로 상쇄되어 거의 영향을 주지 못한다. 따라서 간단히 모우드 함수를  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ 로 가정한다.  $n$ 에 해당하는 모우드로 진동하는 타원단면보의 경계조건( $u = u_0$ )은 다음과 같다.

$$V_n = \begin{cases} 0 & x < -\frac{L}{2} \\ V_0 \frac{\sin \phi \cosh u_0}{\sqrt{\sinh^2 u_0 + \sin^2 \phi}} \cos \frac{n\pi x}{L} & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (16)$$

여기서  $V_0$ 는 충돌속도이다.

식(16)의 푸리에변환식에 식(15)를 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} A_m(k_x) &= 2j\omega\rho_0 V_0 \cosh u_0 \int_0^{2\pi} S^m(\phi, \epsilon) \sin \phi d\phi \\ &\left\{ \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{k_x L}{2} \right. \\ &\left. - k_x \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{k_x L}{2} \right\} / \left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 - k_x^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \int_0^{2\pi} [S^m(\phi, \epsilon)]^2 d\phi \frac{\partial H^m(u, \epsilon)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} \right\} \quad (17)$$

그러므로 원음장에서  $n$ 번째 모우드로 진동하는 보로부터 방사되는 음압의 주파수 응답함수(Frequency Response Function)는 몇가지의 근사를 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} \bar{F}_n(\omega) &= \frac{P(u, \phi, x)}{\bar{a}_n(\omega) \Big|_{x=u_0}} = \\ &\frac{2a\rho_0 |\sin \phi| \left\{ \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{KL}{2} - K \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{KN}{2} \right\}}{\left\{ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 - K^2 \right\} H_1^{(2)}(k_0 a \sin \theta)} \\ &\exp(jRk_0) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $K = k_0 \cos \theta$ 이다.

$\bar{F}_n(\omega)$ 의 역푸리에변환은 아래와 같이 하나의 충격응답함수로 생각할 수 있다.

$$h_n(t) = F^{-1}[\bar{F}_n(\omega)] \quad (19)$$

한편 보의 중앙점에서 임의의 가속도를 갖고  $n$ 번째 모우드로 진동하는 보로부터 방사되는 음압은 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$p_n(R, \theta, \phi, t) = \int_0^t a_n(\tau) h_n(t - \tau) d\tau \quad (20)$$

식(20)을 푸리에변환하면  $\bar{p}_n(R, \theta, \phi, \omega) = \bar{a}_n(\omega) \bar{F}_n(\omega)$ 이고  $\bar{a}_n(\omega) = F[a_n(t)]$ 이다. 그러므로  $n$ 번째 모우드의 방사음압은 다음과 같다.

$$p_n(R, \theta, \phi, t) = F^{-1}[\bar{a}_n(\omega) \bar{F}_n(\omega)] \quad (21)$$

식(21)을 통하여 진동량을 아는 경우 방사음압을 구할 수 있다.

### 2.4 실험 장치 및 방법

양단자유의 조건을 충족시키기 위하여 보의 맨 끝 부분에 직경 2 mm의 구멍 2개를 뚫어 실로 매달아 지지하고 강구에는 실을 달 수 있는 아주 작은 고리를 부착했다. 그리고 특정한 충돌속도를 주기 위하여 강구를 단진자 운동을 하도록 하여 떨어뜨리는 높이에 따라 충돌속도  $V_0$ 가 결정되도록 하였다. 그리고 강구를 일정한 높이에서 떨어뜨리는 방법으로 스텐드의 선단에 자석을 고정시키고 스위치를 사용하여 강구를 보에 충돌시켰다. 강구와 시편으로 준비된 보는 Table 1에서 보듯이 재질은 모두 강(steel)으로서 보는 4종류, 강구는 3종류를 준비하였다.

**Table 1** Dimension of the beams and spheres

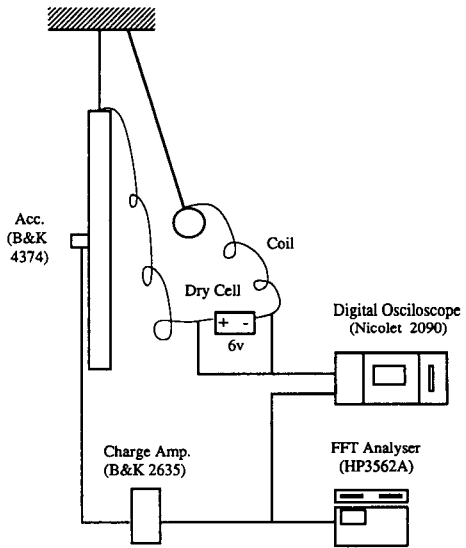
Beams	Length(mm)	Width(mm)	Thickness(mm)
Beam A	240	15.7	4.2
Beam B	240	15.7	2.2
Beam C	240	15.7	5.8
Beam D	160	15.7	4.2
Spheres	Diameter (mm)		
Sphere A	15.8		
Sphere B	9.7		
Sphere C	18.9		

먼저 시편의 고유진동수를 구하기 위하여 모우드 실험(modal testing)을 수행하였다. 그리고 강구가 보와 최초로 충돌할 때 두 물체가 접촉하는 시간을 알아내기 위하여 간단한 전기회로를 이용하였다. Fig. 4에서 보듯이 강구의 운동에 영향을 미치지 않을 정도의 가는 코일을 강구와 보에 심고 전압을 걸어주면 두 물체가 접촉하는 동안은 전류가 흐르며 전압차가 발생한다. 이것을 디지털 오실로스코프(digital oscilloscope nicolet 2090)를 이용하여 측정한다.

실험은 충돌속도의 변화에 대한 차이를 분석하기 위하여 시편 A와 강구 A로 충돌속도를 0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5 m/s로 변화시켜가면서 측정하였으며 강구의 크기에 대한 영향을 보기 위하여 시편 A와 충돌속도를  $V_0=1$  m/s의 상태로 유지하고 강구의 크기를 직경 9.7, 15.8, 18.9 mm(강구 A, 강구 B, 강구 C)로 변화시켜 측정하였다. 그리고 시

편의 두께에 대한 영향을 관찰하기 위하여 시편 A,B,C(두께 4.2, 2.2, 5.8 mm)와 강구 A를  $V_0=1$  m/s의 속도로 충돌시켜 측정하였으며 길이에 대한 영향은 시편 A와 D(길이 160 mm)에 강구 A를  $V_0=1$  m/s의 속도로 충돌시켜 관찰하였다.

한편 충돌시 발생하는 음압은 1/2" 콘덴서 마이크로폰(B&K Type 4165)을 이용하여 측정하였다. 마이크로폰의 신호는 전치증폭기(preamplifier B&K K2619)를 거쳐서 디지털 오실로스코프로 관찰하였으며 HP3562로 음압의 파워스펙트럼을 측정하였다. 마이크로폰의 위치는 Fig. 1에서의 좌표계를



**Fig. 4** Arrangement for experiment

**Table 2** Natural frequency of the beams

(unit : Hz)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Beam A	Theory	390	1074	2105	3480	5199	7262	9668	12419	15513	18951	22732
	Exp.	391	1088	2125	3500	5219	7281	9578				
Beam B	Theory	204	563	1102	1823	2723	3804	5064	6505	8125	9926	11907
	Exp.	203	562	1094	1812	2672	3766	4969	6437	7937	9687	11594
Beam C	Theory	533	1471	2883	4767	7121	9946	13241	17008	21245		
	Exp.	531	1500	2875	4750	7062	9750	12812				
Beam D	Theory	888	2447	4797	7930	11847	16546	22029	28295			
	Exp.	891	2422	4719	7766	11437						

$E=2.1 \times 10^{11} \text{Pa}$     $\rho=7770 \text{kg/m}^3$

이용하여 나타내면,  $\theta=90^\circ$ ,  $\phi=90^\circ$ 인 경우와,  $\theta=90^\circ$ ,  $\phi=45^\circ$ 인 경우는 2 m 떨어진 점에 위치했으며,  $\theta=45^\circ$ ,  $\phi=90^\circ$ 인 경우는 1.65 m 떨어진 곳이다. 그리고 실험은 모두 무향실에서 수행하였다.

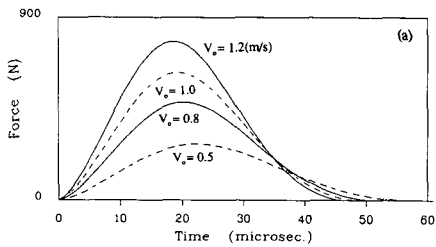
2.5 결과 및 고찰

(1) 보의 고유진동수

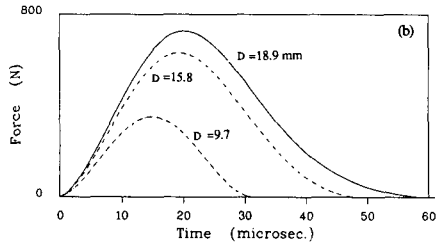
보의 진동을 측정하는데 사용한 가속도계는 주파수 특성이 20 kHz까지는 일정한 이득을 갖는 무게 0.65g의 소형이므로 가속도계 부착에 의한 영향은 무시하였다.

Bernoulli-Euler 보이론을 사용하여 이론적으로 구한 고유진동수와 실험으로 구한 것을 비교해 보면 저주파수 범위에 있는 고유진동수는 잘 맞지만 고주파수로 갈수록 오차가 증가한다. 이것은 Bernoulli-Euler 보이론이 실제로 보에 존재하는 회전 관성(rotary inertia)과 전단 변형(shear deformation)의 영향을 고려하지 않기 때문에 생기는 차이로서 이론으로 구한고 주파수 범위의 고유진동수는 회전 관성과 전단 변형의 영향이 존재하는 실제 시스템의 고유진동수보다 높다.

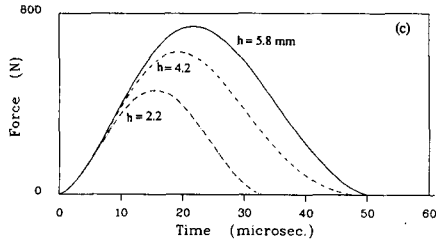
이론과 실험에 의한 각 시편의 고유진동수를



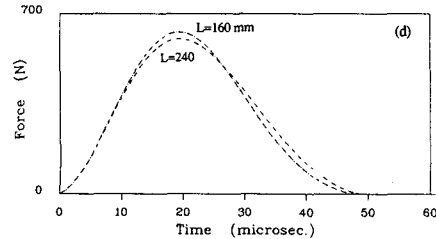
(a) vs. velocity (with beam A, sphere A)



(b) vs. diameter (with beam A,  $V_0=1$  m/s)

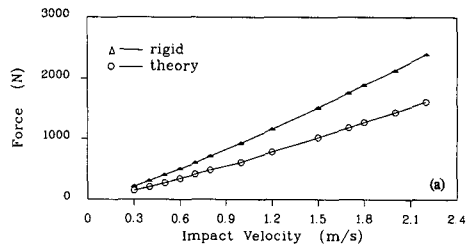


(c) vs. thickness (with sphere A,  $V_0=1$  m/s)

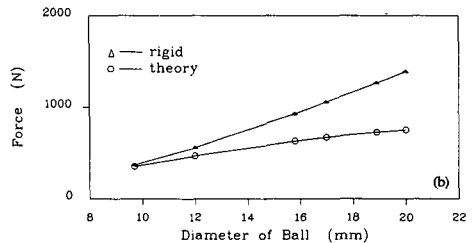


(d) vs. length (with sphere A,  $V_0=1$  m/s)

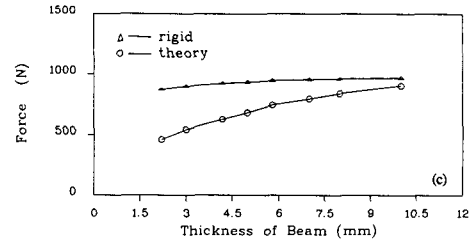
Fig. 5 Computed impact force



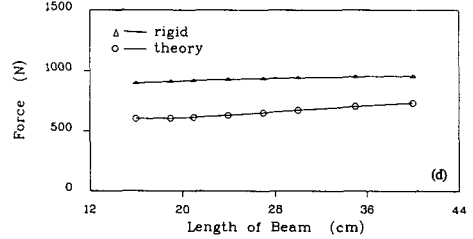
(a) vs. velocity (with beam A, sphere A)



(d) vs. diameter (with beam A,  $V_0=1$  m/s)



(c) vs. thickness (with sphere A,  $V_0=1$  m/s)



(d) vs. length (with sphere A,  $V_0=1$  m/s)

Fig. 6 Computed maximum impact force

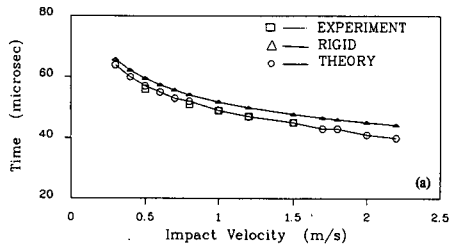
Table 2에 정리하였다.

(2) 충격력 및 접촉시간

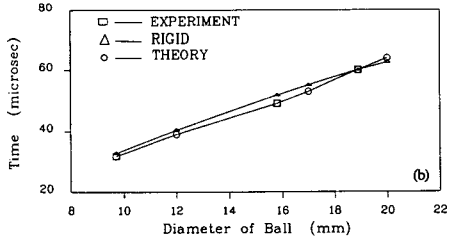
Fig. 5는 각각 충돌속도, 구의 크기, 보의 두께, 보의 길이를 변화시키며 충격력 및 접촉시간을 계산한 결과이다. 충돌속도가 클수록 충격력의 최대치는 커지고 접촉시간은 짧아짐을 알 수 있고 강구의 직경이 커질수록 충격력의 최대치는 커지고 접촉시간은 아주 큰 폭으로 증가하며 충격력의 모양도 정현제곱함수의 모양에서 멀어진다. 그리고 두께가 증가할수록 충격력은 증가하며 길이에 대하여는 큰 영향이 없다.

Fig. 6은 충격력은 Hertz 이론을 이용한 것과 두

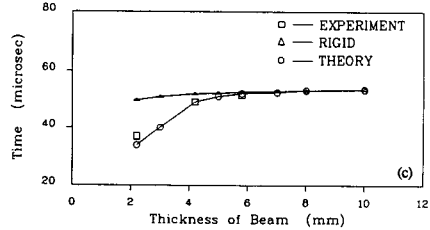
물체가 강체라고 보고 해석한 충격력의 최대치를 충돌속도, 구의 직경, 보의 두께, 보의 길이를 변화시키며 계산한 결과를 나타낸 것이다. 구의 직경이 증가할수록 상대적으로 보의 유연성이 증가하므로 강체해석의 경우보다 최대충격력이 줄어든다. 따라서 구의 직경이 20 mm인 경우 유연성 보로 해석할 수 있으며 강체해석의 경우보다 최대충격력이 반으로 줄어든다. 마찬가지로 일정한 구의 직경에 대해서 보의 두께가 얇아질수록 유연성이 증가하므로 강체해석의 경우보다 최대충격력이 반으로 줄어든다. 이유는 유연성 보는 강체에 비해 보에 전달되는 에너지의 비율이 커지므로 보의 진동은 커지며



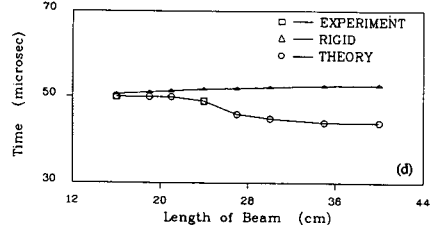
(a) vs. velocity (with beam A, sphere A)



(b) vs. diameter (with beam A,  $V_0=1$  m/s)

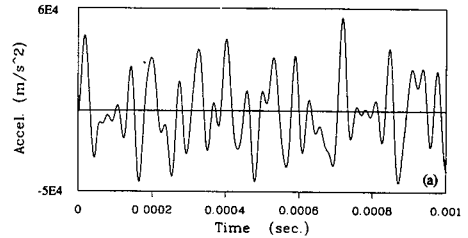


(c) vs. thickness (with sphere A,  $V_0=1$  m/s)

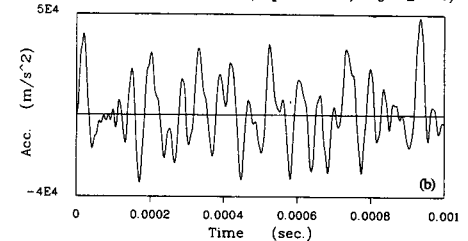


(d) vs. length (with sphere A,  $V_0=1$  m/s)

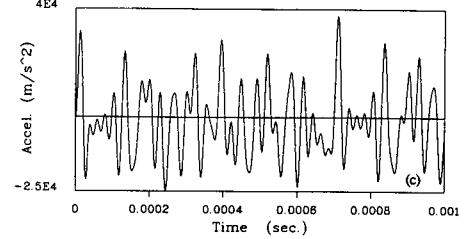
Fig. 7 Contact duration



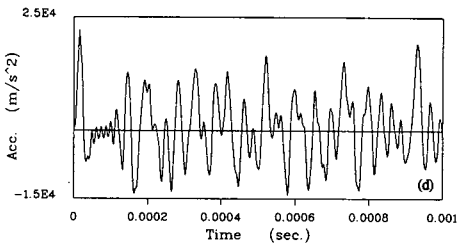
(a) theory (with beam A, sphere A,  $V_0=1$  ms)



(b) experiment



(c) theory (with beam A, sphere B,  $V_0=1$  m/s)



(d) experiment

Fig. 8 Accelerations at the mid point of the beams



따라서 충격력은 줄어들기 때문이다.

Fig. 7은 접촉시간을 Hertz 이론과 강제해석을 통하여 구한 것과 실험결과를 비교한 것이다. 그림에서 보듯이 구의 크기가 크고 보의 두께가 두꺼울수록 접촉시간은 증가한다. 그리고 실험결과와 이론이 아주 잘 일치함을 알 수 있다.

(3) 보의 중앙점에서의 가속도

Fig. 8은 2.2절에서 전개된 이론으로 각 시편과 충돌조건에 따라 계산된 보의 중앙점에서의 가속도 신호와 실제로 실험을 통하여 측정된 것을 나타낸 그림이며 충돌속도는 1 m/s이다. 강구의 직경이 작아서 접촉시간이 짧은 경우는 높은 주파수까지 가진되므로 상대적으로 높은 주파수 성분이 포함되어 있음을 확인할 수 있다. 충돌시 발생하는 가속도의 첫번째 피크값을 Table 3에 정리하였다. 각 경우 모두 이론값이 실험값보다 크며 그 오차는 몇 가지 경우를 제외하고는 대부분 10%내에 있다.

이론적으로 가속도를 구할 때 고려할 모드 수를 결정하기 위해서는 접촉시간이 중요하다. 접촉시간이 50  $\mu$ sec라면 일반적으로 가진최대 주파수를 20 kHz라고 생각할 수 있으나 실제 충격력 스펙트럼은 20 kHz 이상에서도 적은양이 존재한다. 따라서 20 kHz 이상에서 가속도 스펙트럼의 피크가 보의 공진주파수(약 30 KHz)에서 나타나며 그 크기는 20 KHz 이하의 모드보다 작음을 Fig. 9를 통하여 알 수 있다. Fig. 8(a)의 데이터와 Fig. 8(b)의 데이터를 푸리에변환을 한 결과로서 데이터 수의 부족때문에 해상도가 좋지 않아서 확대(zoom-

ing)하여 해상도를 약 122 Hz로 향상시킨 그림이다. 이 그림에서 이론치의 피크값들이 실험의 피크값들보다 크다. 이것은 이론에 사용된 충격력이 실제의 충격력보다 크기때문인 것으로 생각된다.

(4) 보로부터 방사되는 음압

Fig. 10은 2.3절에서 전개된 이론으로 계산된 음압과 실제로 실험으로 측정된 것을 그린 그림이다. Fig. 10(a)는 마이크로폰의 위치와 방향이 2 m,  $\theta=90^\circ$ ,  $\phi=90^\circ$ 인 곳이며, Fig. 10(b)는 2.0 m,  $\theta=90^\circ$ ,  $\phi=45^\circ$ 일 때의 음압이고, Fig. 10(c)은 1.65 m,  $\theta=45^\circ$ ,  $\phi=90^\circ$ 일 때의 음압을 이론과 비교한 그림이다.  $\theta=90^\circ$ 인 경우에 있어서 이론으로 구한 경우의 음압은 실험과 비교해 볼 때 첫 피크값은 어느 정도 일치하지만 그 이후에는 0에 가까워 실험과 차이를 보인다. 이것은 보의 홀수 모드(대칭 모드)만이 가진되며 임계주파수이상에서 음향의 상쇄효과(cancellation)에 의해  $\theta=90^\circ$ 인 곳에서 원거리 음장의 지향 패턴이 이론적으로 0이 되어야한다(null effect). 그러나 실험의 경우 강구

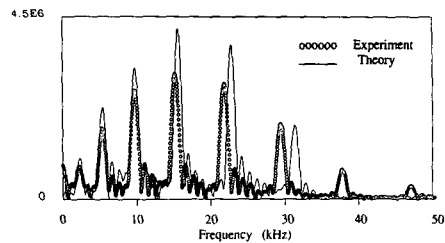
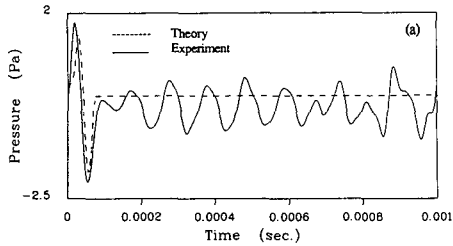


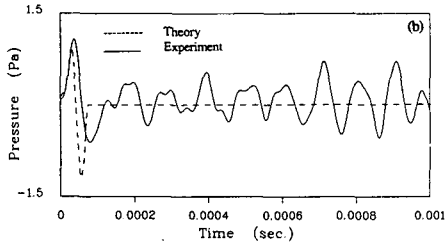
Fig. 9 Fourier transform of the acceleration signal

Table 3 First peak value of the acceleration

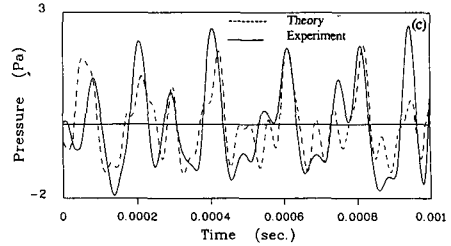
Beam	Sphere (mm)	Impact Velocity (m/s)	First peak value (m/s/s)		
			Theory	Experiment	Error (%)
Beam A	Sphere A	0.5	17710	16202	8.5
Beam A	Sphere A	0.8	32797	30120	8.2
Beam A	Sphere A	1.0	44363	40094	9.6
Beam A	Sphere A	1.2	46510	48634	13.9
Beam A	Sphere A	1.5	75817	64200	15.3
Beam A	Shpere B	1.0	32009	22164	30.7
Beam A	Sphere C	1.0	48049	45126	6.1
Beam B	Sphere A	1.0	106720	63200	40.8
Beam C	Sphere A	1.0	32151	28500	11.4
Beam D	Sphere A	1.0	42445	33050	22.1



(a) at  $R=2.0\text{ m}$ ,  $\theta=90^\circ$ ,  $\phi=90^\circ$



(b) at  $R=2.0\text{ m}$ ,  $\theta=90^\circ$ ,  $\phi=45^\circ$



(c) at  $R=1.65\text{ m}$ ,  $\theta=45^\circ$ ,  $\phi=90^\circ$

**Fig. 10** Acoustic pressure radiated from beam A with  $V_0=1\text{ m/s}$

의 충돌로 인하여 측정점을  $\theta=90^\circ$ 로 유지하기가 어려우므로 음향강도가 큰 영역인 3~10 kHz에서 5와 7번째 모드에 의한 성분이 존재하게 된다.

$\theta=45^\circ$ ,  $\phi=90^\circ$ 인 경우 파형의 경향은 실험과 거의 일치한다. 그러나  $\theta=90^\circ$ 일 때와 비교하면 파형

**Table 4** Maximum acoustic pressure (dB re.  $20\mu\text{Pa}$ )

Beam	Sphere (mm)	Impact Velocity (m/s)	Maximum pressure (dB)		
			Theory	Experiment	Error (dB)
$\theta=90^\circ$ , $\phi=90^\circ$ , $R=2.0\text{ m}$					
Beam A	Sphere A	0.5	92.2	93.4	1.2
Beam A	Sphere A	0.8	97.4	98.9	1.5
Beam A	Sphere A	1.0	99.9	101.6	1.7
Beam A	Sphere A	1.2	101.9	103.5	1.6
Beam A	Sphere A	1.5	104.5	105.3	0.8
Beam A	Sphere B	1.0	96.5	94.8	-1.7
Beam A	Sphere C	1.0	100.3	101.5	1.2
Beam B	Sphere A	1.0	104.8	103.1	-1.7
Beam C	Sphere A	1.0	97.5	98.6	1.1
Beam D	Sphere A	1.0	99.5	100.1	0.6
$\theta=90^\circ$ , $\phi=45^\circ$ , $R=2.0\text{ m}$					
Beam A	Sphere A	0.8	93.5	94.6	1.1
Beam A	Sphere A	1.0	96.0	95.0	-1.0
Beam A	Sphere A	1.2	98.1	96.0	-1.9
Beam A	Sphere A	1.5	100.5	99.3	-1.2
$\theta=45^\circ$ , $\phi=90^\circ$ , $R=1.65\text{ m}$					
Beam A	Sphere A	0.8	98.2	99.8	1.6
Beam A	Sphere A	1.0	100.2	99.7	-0.5
Beam A	Sphere A	1.2	101.9	101.1	-0.8
Beam A	Sphere A	1.5	104.0	101.8	-2.2

의 형태가 큰 차이가 난다.  $\theta=90^\circ$ 일 경우 첫 피크의 값이 이후의 값들에 비하여 아주 크지만  $\theta=45^\circ$ 인 경우 첫 피크에 비하여 후에 나타나는 피크값들이 상대적으로 더 크다. 즉,  $\theta=90^\circ$ 인 경우는 가속도 잡음(acceleration noise)이 지배적이고  $\theta$ 가 작을수록 울림 잡음(ringing noise) 부분이 증가한다고 말할 수 있다. 이것은 첫 피크가 거의 강체운동에 의한 방사가 지배적이므로 아주 큰 방향성을 가지고 있다. 그러므로  $\theta$ 가  $90^\circ$ 인 경우는 첫 피크가 두드러지지만,  $\theta=45^\circ$ 일 때는 마이크로폰이 충격선상에 있지 않으므로 방향성 때문에 첫 피크가 거의 나타나지 않고 보의 자유진동에 의한 정상파의 전파가 더 크기 때문으로 생각된다.

충돌조건과 마이크로폰의 위치에 대하여 측정된 피크값과 계산된 이론치를 Table 4에 정리하였다.

(5) 가속도 및 음압의 주파수 영역 분석

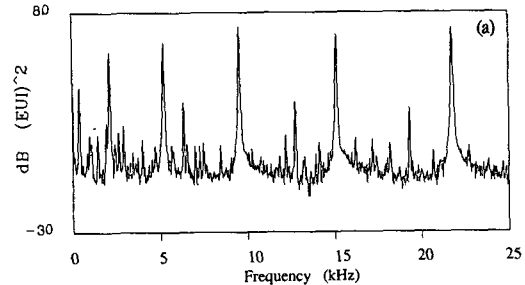
Fig. 11은 강구 A가 1m/s의 속도로 충돌할 때 측정된 가속도와 음압의 파워 스펙트럼이다. 가속도에 대한 EU(engineering unit)는  $m/s^2$ 이고 음압의 EU는 Pa이다. Fig. 11(a)에서 큰 피크들의 주파수는 모우드 실험의 결과와 일치함을 보여준다. 가속도계를 양단자유인 보의 가운데 점에 부착하였으므로 짝수 모우드(비대칭 모우드)는 가운데 점이 노드점(nodal point)이 되어 이론적으로는 가진되지 않고 홀수 모우드(대칭 모우드)만이 가진된다. 그러나 실험 결과를 보면 상대적으로 홀수 모우드 보다는 아주 작은 양이지만 조금은 짝수 모우드 성분이 나타남을 볼 수 있다. 그림에서 0~25kHz 범위에서는 파워의 양이 거의 변화가 없고 일정하므로 25 kHz보다 훨씬 높은 주파수 범위까지 가진되고 있음을 알 수 있다. Fig. 11(b)는 두께가 4.2 mm인 보로부터 방사되는 음압의 스펙트럼으로서 Fig. 11(a)와 비교해 보면 피크주파수들은 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

진동에 의한 음향방사 현상을 음향방사효율  $\sigma_n$ 라는 인자로 표현할 수 있다.

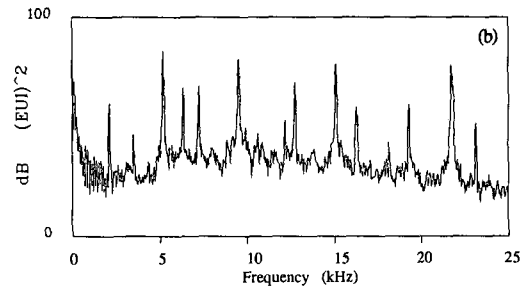
$$\sigma_n = \frac{\bar{W}}{\rho_0 c_0 S \langle \bar{v}_n^2 \rangle} = \frac{\omega_n^2 \bar{W}}{\rho_0 c_0 S \langle \bar{a}_n^2 \rangle} \quad (22)$$

여기서  $\bar{W}$ 는 음향강도(acoustic power),  $S$ 는 보의 표면적(bL)이며  $\langle \bar{v}_n^2 \rangle$ 는  $n$ 번째 모우드의 평균자속속도,  $\langle \bar{a}_n^2 \rangle$ 는  $n$ 번째 모우드의 평균자속가속도이다. 그리고 상첨자 -는 시간평균,  $\langle \rangle$ 는 공간평균을 의미한다. Fig. 11의 가속도 스펙트럼

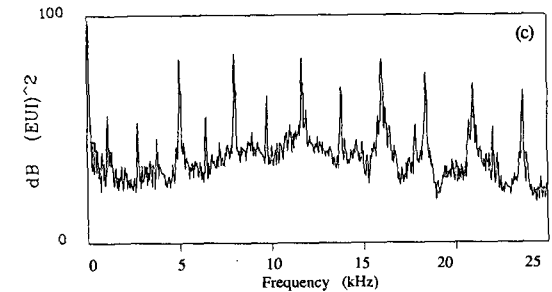
은 보의 중앙에서의 값이므로 정확한 방사효율을 구할 수 없다. 그러나 보의 중앙점에서의 가속도를 평균자속가속도와 같다고 가정하면, 가속도 스펙트



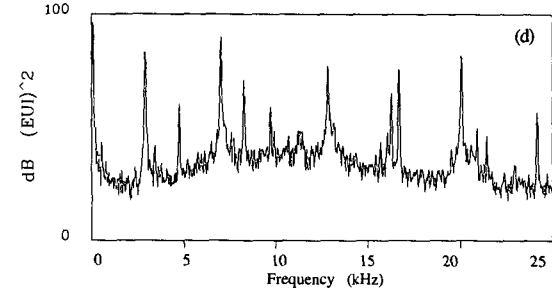
(a) acceleration (with beam A,  $V_0=1$  m/s)



(b) acoustic pressure (with beam A,  $V_0=1$  m/s)



(c) acoustic pressure (with beam B,  $V_0=1$  m/s)



(d) acoustic pressure (with beam C,  $V_0=1$  m/s)

Fig. 11 Power spectrum of the acceleration and acoustic pressure

림의 피크는 주파수에 따라 증가하나 속도 스펙트럼의 피크는 거의 일정하다. 또한 음향강도는 주파수에 따라 조금 감소하므로 음향방사효율은 3~10 kHz에서 크게 나타나며 음향강도도 크다.

보의 임계주파수는

$$\omega_{co} = c_o^2 \left( \frac{m_b}{EI} \right)^{1/2} \quad (23)$$

$\omega < \omega_{co}$ 인 주파수 범위에서는 소리가 방사되지 못한다. 그러나 보의 길이가 유한한 경우 파수푸리에변환을 하면 부엽(side lobe)이 생기므로 어느 정도의 양은 방사된다. 이것은 실험 결과를 통하여 확인할 수 있다. 시편 A의 경우 임계주파수를 구해보면  $\omega_{co}=3$  kHz가 된다. Fig. 11(b)로 부터 이 현상을 볼 수 있다. 두께가 다른 시편 B와 시편 C의 경우에 대해서 구해보면 두께의 영향을 확인할 수 있다. 시편 B의 경우는  $\omega_{co}=6$  kHz부근이고, 시편 C의 경우는  $\omega_{co}=2$  kHz 부근에 임계주파수가 존재한다. 이것은 Fig. 11(c), (d)를 관찰하면 확인할 수 있다.

### 3. 결론

지금까지 본 연구에서는 강구가 사각단면을 가진 양단자유의 탄성보에 충돌할 때 발생하는 충격력, 보의 진동 그리고 보로부터 방사되는 음압을 이론 및 실험을 통하여 연구하였다. 이에 대한 결론은 다음과 같다.

(1) 충격력은 강구의 크기가 작을 때는 sin 제곱의 형태를 갖지만 강구가 커지면 충돌시 접촉시간이 증가하며 sin 제곱의 형태와 크게 달라진다. 그리고 보의 두께가 두껍고 강구의 크기가 작을 경우에는 진동에너지의 양이 상대적으로 작아서 강제해석으로 구한 충격력에 접근한다.

(2) 강구의 충돌에 의한 보의 과도응답을 모두드 해석을 통하여 구하였을 때 보의 감쇠 영향이 작은 초기 약 400  $\mu$ sec이내에는 이론과 실험이 거의 일치하였다. 그리고 첫번째 피크는 실험치와 약 10% 정도의 오차를 보였다.

(3) 단면이 사각형인 보에서 방사되는 음압은 단면을 타원으로 하는 좌표변환에 의하여 모형화하고 원음장(far-field)의 조건등을 이용하여 근사시켜서 특정점에서의 음압을 계산할 수 있으며 실험치와 잘 일치한다.

### 참고문헌

- (1) Koss, L.L. and Afredson, R.J., 1973, "Transient Sound Radiated by Spheres Undergoing an Elastic Collision," Journal of Sound and Vibration, Vol. 27, No. 1, pp. 59~75.
- (2) Adan Akay, 1983, "Sound Radiation from an Impact-excited Clamped Circular Plate in an Infinite Baffle," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 74, No. 2, pp.640~648.
- (3) Jae-Jin Jeon and Byung-Ho Lee, 1987, "Transient Sound Radiation from a Clamped Circ Ular Plate with Viscoelastic Layers," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 82, No. 3, pp. 937~945.
- (4) Endo, M., Nishi, S., Nakagawa, M. and Sakata, M., 1981, "Sound Radiation form a Circular Cylinder Subjected to Elastic Collision by a Sphere," Journal of Sound and Vibration, Vol.75, No.2, pp.285~302.
- (5) Blake, W.K., 1974, "The Radation from Free-Free Beams in Air and in Water," Journal of Sound and Vibration, Vol.33, No.4, pp.427~450.
- (6) Sakata, M., Honi., M. and Kimura, T., 1984, "Acoustic Radiation from a Viscoelastic Beam Impacted by a Steel Sphere," Journal of Sound and Vibration, Vol.92, No.1, pp.67~81.
- (7) Goldsmith, W., 1960, "Impact," Edward Arnold, London, pp. 83~137.
- (8) Adan Akay, 1978, "A Review of Impact Noise," J. Acoust. Soc. Am., Vol.64, No.4, pp.977~987.