1900 大韓機械學會論文集 第16卷 第10號, pp. 1900~1907, 1992.

〈論 文〉

시간평균 홀로그래픽 간섭계를 이용한 경계조건의 변화에 따른 원형평판의 진동에 관한 연구

이기백* · 양장식** · 나종문*

(1992년 3월 17일 접수)

The Research on the Vibration of the Circular Plate for Varying Free Arc Angles by Time-Average Holographic Interferometry

Ki Baik Lee, Jang Sik Yang and Jong Moon Na

Key Words: Time Average Holographic Interferometry(시간평균 홀로그래픽 간섭계), Laser Doppler Vibrometer(레이저 도플러 진동계), Natural Frequency(고유진동수), Nodal Line(절선)

Abstract

This paper presents the vibration mode, natural frequencies and amplitudes of the circular plate due to the changes of the boundary conditions by varying free arc angles. The vibration mode, amplitudes and natural frequencies of the circular plate are obtained by time-average holographic interferometry and laser doppler vibrometer. The vibration modes of the circular plate with the mixed boundary conditions are found from the 1st mode to the 4th mode. The curve shapes of the natural frequency ratios obtained from this study are in a good agreement with other results obtained by numerical analysis. The displacement curves obtained from time average holographic interferometry and laser doppler vibrometer agree well in case of large amplitude, but show a little difference in case of small amplitude.

1. 서 론

원호주위로 완전히 고정된 얇고 균일한 원형평판의 진동방정식의 해[1]는 이론적으로 구해져 있고, 실험적으로도 많은 연구가 수행되었다. 그러나 원형평판의 원호주위의 경계조건의 변화에 따른 원형평판의 진동에 관한 연구는 거의 수행되지 않았다. 단순지지로 구성된 원형평판의 최초의 진동 연구는 일종 Fredholm 적분방정식의 해로서 문제를 공식화한 Nowacki와 Olesick[2]였고, Keer와 Stahl[3]은 복합경계조건을 갖는 직사각형 평판을 2종 Fredholm 적분방정식으로 고유치문제를 공식화했다. 그 이후에 Hirano와 Okazak[4]은 Keer와 Stahl의 방법을 이용해서 복합경계조건을 갖는 원형평판의 진동을 연구했고 정확한 근사해를 얻었다. 또 Narita와 Leissa[5]는 원형평판을 해석적으로 표현했다. 이들의 원형평판의 진동해석방법은 원형평판의 원호주위를 Fourier성분으로 고정단 부위를 따라 변화하는 병진과 회전 스프링을 이용해서 경계조건의 변화에 따른 원형평판의 고유진동수에 대해서만 해석하였을 뿐 진동모드에 대한 해석은 하지 않았다.

따라서 본 연구는 원형평판의 경계조건을 일부분

*정회원, 부산대학교 기계공학과
**부산대학교 기계공학과

은 고정단으로 일부분은 자유단으로 구성하여 자유단각 α(Fig. 4 참조)를 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°로 변화시킴에 따른 진동모드를 시간평균 홀로그래픽 간섭계[6],[7](time-average holographic interferometry)를 이용해 분석하고, 자유단의 변화에 따른 고유진동수의 비와 Narita와 Leissa에 의해 수치해석된 고유진동수의 비를 비교하였고, 레이저 도플러 유속계(LDV)를 변형한 레이저 도플러 진동계[7](laser doppler vibrometer)로 원형평판의 진동변위와 시간평균 홀로그래픽 간섭계로 구한 진동변위를 비교하였다.

2. 실험장치 및 방법

2.1 시간평균 홀로그래픽 간섭계

Fig. 1의 (a)는 홀로그램을 형성하기 위한 시간평균 홀로그래픽 간섭계의 실험장치도이다. 5 mW He-Ne레이저에서 발진된 레이저광은 광나뉘개(beam splitter)에 의해 두 갈래로 분리되고 그중 한 갈래는 공간필터(spatial filter)를 통해 진동물체에 보내지고 진동물체에서 반사된 광은 물체광(object beam)으로 홀로그램에 전달된다. 또한 다른 한 갈래는 반사경(mirror)에 반사되어 공간필터를 통해 기준광(reference beam)으로 홀로그램에 도달해 물체광과 기준광이 간섭을 일으켜 홀로그램이 형성된다. 홀로그램은 5 mW He-Ne 레이저로 코닥사의 홀로그래픽 필름(high speed holographic plate)에 노출시간 1/30, 1/60초로 하여 촬영하였다.

Fig. 1의 (b)는 홀로그램을 형성한 후 홀로그램을 재생하는 장치도이다. 기준광에 의해 홀로그램에서 산란된 광을 렌즈에 일정 노출시간 동안 집광하여 촬영하였고, 실재상을 재생하기 위해 ASA 400인 코닥사의 Verichrom Pan을 사용했다.

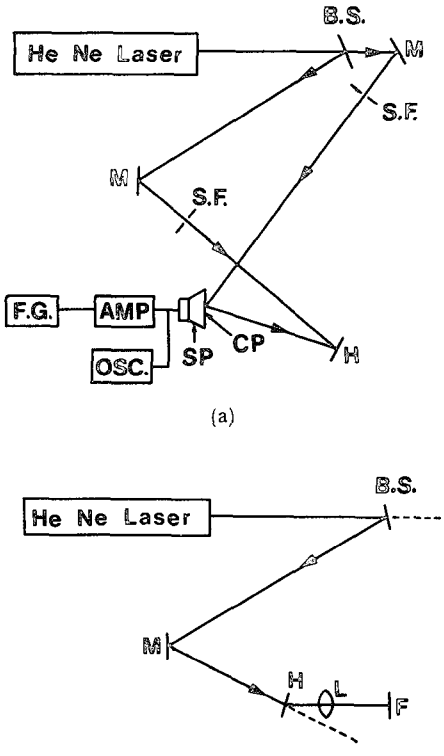

Fig. 1 Experimental arrangement for hologram construction and reconstruction
(B.S. : beam splitter S.F. : spatial filter M : mirror H : hologram CP : circular plate AMP : power amplifier OSC : oscilloscope L : lens F. G : function generator F : film)

2.2 레이저 도플러 진동계(Laser Doppler Vibrometer)

Fig. 2는 레이저도플러진동계의 실험장치도이다. 15 mW He-Ne 레이저에서 발진된 레이저광은 광나뉘개를 통해 세 갈래로 분리되고 그중 한 갈래는 L_1을 통해 원형평판에서 산란되고 산란된 레이저광은 물체광으로 L_1에 집광되어 광나뉘개를 통해 L_2에 다시 집광되어 광증폭기(P.M. tube)에 도달되고, 또 다른 한 갈래는 반사경에 반사되어 기준광으로 광나뉘개와 L_2를 통해 광증폭기에 모이게 된다. 나머지 한 갈래도 광나뉘개와 L_2를 통해 기준광으로 광증폭기에 도달된다.

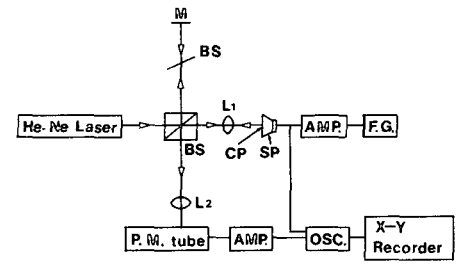

Fig. 2 Experimental arrangement of laser doppler vibrometer (M : mirror B.S : beam splitter AMP : power amplifier F.G. : function generator L_1, L_2 : lens CP : circular plate OSC : oscilloscope)

광증폭기에 도달한 물체광과 기준광은 서로 간섭을 일으켜 디지탈오실로스코프(Nicolet 2090-III : 분해능 500 ns)에 비트신호로 검출되고 검출된 비트신호를 X-Y 레코드에 기록해서 진동변위를 계산한다.

2.3 실험단면 및 실험모델

Fig. 3은 원형평판을 가진시키기 위한 실험장치도이다. (c)의 강제고리(steel ring)을 원하는 각으로 절단하여 (d)의 스피커중심에 맞도록 에폭시접착제로 접착하고 (b)의 원형평판을 (c)의 강제고리상에 에폭시로 접착한다. 또한 (a)의 강제고리를 (b)의 원형평판상에 동일한 방법으로 접착한다.

스피커의 구동에 의한 강제고리상의 진동을 방지하기 위해 15 mm 두께의 아크릴로 고정하였다. 원형평판의 재질은 직경 58 mm, 두께 0.25 mm의 저탄소강으로 구성되어 있으며 원형평판의 가진은 함수발생기(function generator : Tektronix FG503)에 의해 발생된 단일정현파(sinusoidal wave)를 증폭기에서 증폭시켜 스피커를 구동해서 원형평판을 공기진동시켰다. 그리고 고유진동수를 실험적으로 구하기 위해 스피커에 의해 공기진동된 원형평판 앞쪽에 음량계(sound level meter : Jeic type 1015)를 설치하여 함수발생기의 주파수를 변화시킴에 따라 음량계에 최대 피크치가 나타날 때의 함수발생기의 주파수를 디지탈오실로스코프(Nicolet 2090-III : 분해능 500 ns)를 통해 고유진동수를 찾았다.

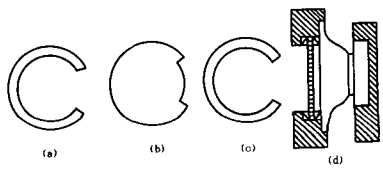

Fig. 3 Schematic arrangement of a circular plate

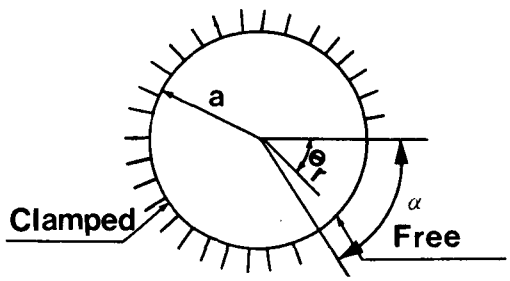

Fig. 4 Circular plate clamped along $0 \le \theta \le 2\pi - \alpha$ and free along $2\pi - \alpha \le \theta \le 2\pi$

Fig. 4는 반경 a=29 mm인 원형평판의 실험모델을 고정단($0 \le \theta \le 2\pi - \alpha$)과 자유단($2\pi - \alpha \le \theta \le 2\pi$)으로 나타낸 것이다. 이와 같이 자유단각 α를 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°의 7가지 모델로 구성하여 실험을 수행했다.

3. 실험결과 및 고찰

3.1 경계조건의 변화에 따른 원형평판의 진동모드 해석

Fig. 5의 (a)~(p)는 각각의 주파수에서 단일정현파에 의해 스피커로 공기진동시킨 자유단각 α=0°~90°인 원형평판의 대칭인 진동모드에 대한 홀로그램 재생상으로 고유진동수가 가장 낮은 1차모드에서 4차모드까지의 진동모드를 보여주고 있다.

(a)~(d)는 자유단각 α=0°일 때의 진동모드로 (a)는 692Hz에서 1차모드가 나타났으며, 상하병진운동을 하고 있다. (b)는 2차모드로 1428 Hz이며, nodal line을 중심으로 상, 하 180°위상차로 진동하고 있다. (c)는 2272 Hz에서 nodal line이 두 개인 3차모드가 나타났으며 각각의 nodal line을 축으로 원형평판이 비대칭으로 진동하고 있고, 두 개의 nodal line의 교점축을 중심으로 대칭위치의 간섭무늬(fringe)는 동일 위상으로 진동하고 있음을 알 수 있다. 또한 (d)는 2597 Hz에서 nodal circle이 한 개인 4차모드로, 원형평판의 직경방향축에 대해 대칭으로 진동하고 있다.

(e)~(h)는 자유단각 α=30°일 때의 진동모드로 자유단각 α=0°일 때와 진동모드 형상은 동일하나 자유단각 α=30°의 영향을 받아 자유단쪽으로 간섭무늬가 편향되고 있음을 알 수 있고, 1차모드에서 4차모드까지의 고유진동수는 각각 713, 1360, 2197, 2564 Hz였다.

(i)~(l)은 자유단각 α=60°일 때의 진동모드를 나타내고 있다. (i), (j)는 1차모드, 2차모드 진동이며 고유진동수는 각각 505, 1191 Hz이다. 이 진동모드는 자유단각 α=0°, 30°의 1차, 2차모드에 비해 자유단 쪽에서도 진동을 하고 있음을 알 수 있다. 1818 Hz에서 nodal line이 두 개인 3차모드가 나타났고, 자유단을 이등분하는 직경방향에 대해 대칭으로 진동하고 있으며, 자유단의 영향을 많이 받고 있다. 또한 2439 Hz에서 nodal line 이 세

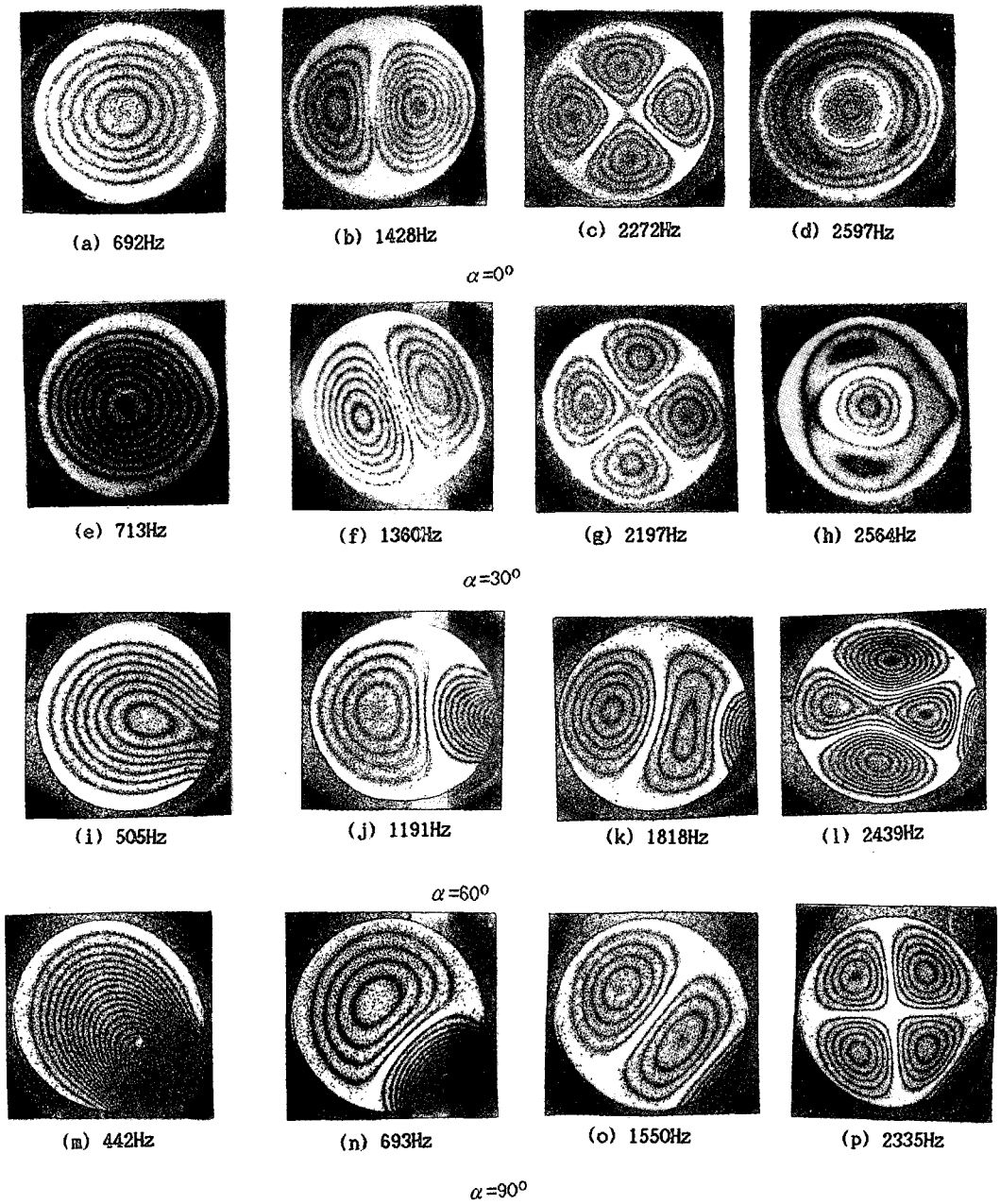

Fig. 5 Hologram reconstruction for the lowest four mode of a circular plate partly clamped and partly free at $\alpha=0°$, 30°, 60°, 90°

개인 4차모드가 나타났으며, 4차모드 역시 자유단의 영향을 받고 있으며, 자유단각 $\alpha=60°$는 자유단각 $\alpha=0°$, 30°와는 달리 3차모드와 4차모드는 완전히 다른 진동형상을 보여주고 있다.

(m)~(p)는 자유단각 $\alpha=90°$일 때의 진동모드를 보여주고 있으며 진동모드의 형태는 자유단각 $\alpha=60°$와 비교할 때 1, 2, 3차 모드는 동일한 진동모드이나 4차모드만 다른 형상을 하고 있다. (p)는 4차모드로서 nodal line이 세개이고 자유단을 이등분하는 축에 대해 대칭으로 진동하고 있음을 알 수

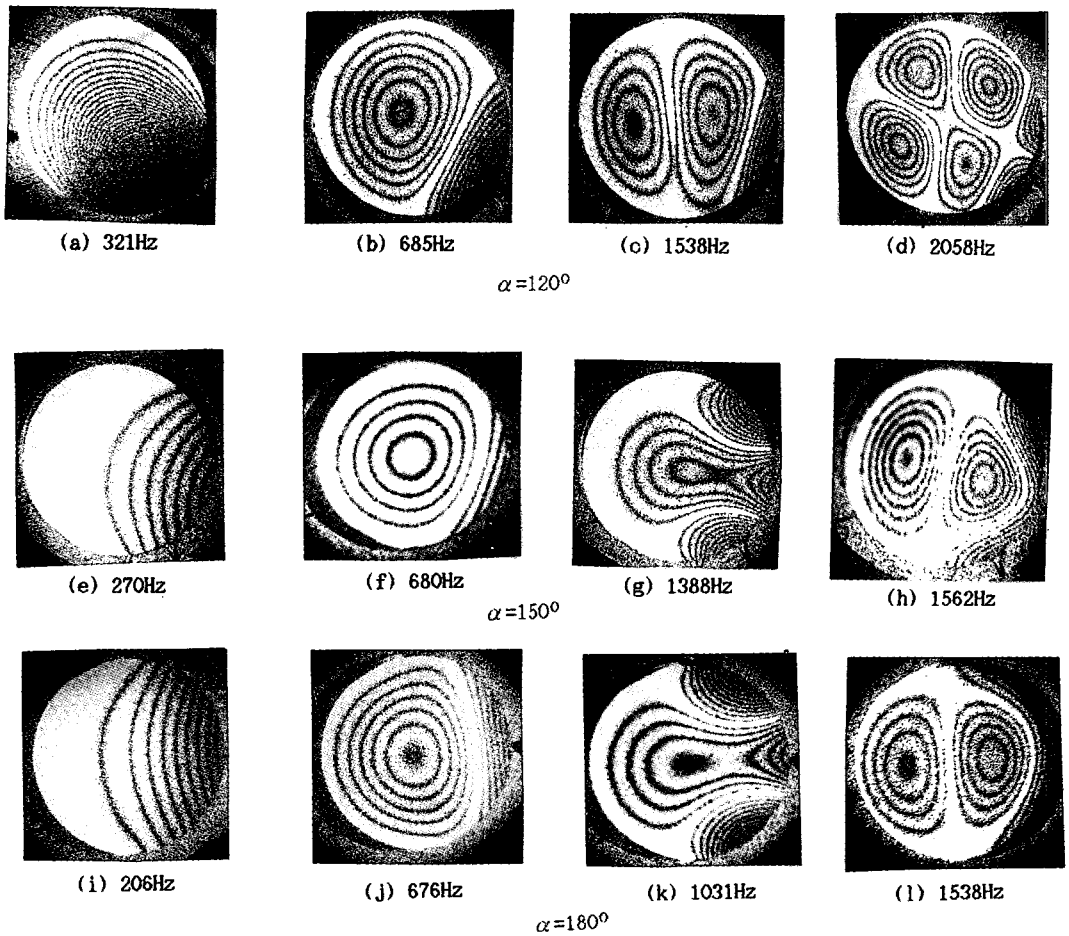

Fig. 6 Hologram reconstruction for the lowest four mode of a circular plate partly clamped and partly free at $\alpha=120°$, 150°, 180°

있다.

Fig. 6의 (a)~(l)은 자유단각 $\alpha=120°$, 150°, 180°일 때의 원형평판의 진동모드를 나타낸 것이다.

(a)~(d)는 자유단각 $\alpha=120°$일 때 원형평판의 1, 2, 3, 4차모드를 보여주고 있다. (a)는 1차모드로 고유진동수가 321 Hz이며, 사진에서 알 수 있듯이 간섭무늬의 개수를 구분하기 힘들기 때문에 이사진으로는 정확한 변위계산을 하는 데는 어려움이 있다. Fig. 6의 자유단각 $\alpha=120°$의 4차모드를 제외하고는 모두 Fig. 5의 자유단각 $\alpha=90°$의 진동모드와 같은 형태를 보이고 있으며 자유단각 $\alpha=90°$에 비해 자유단각 $\alpha=120°$에서 자유단각의 증가로 인한 영향을 더 많이 받고 있음을 알 수 있다. Fig. 6의 (e)~(h)는 자유단각 $\alpha=150°$일 때의 원형평판의 진동모드로, (e)는 1차모드로서 (a)에 비해 간섭무늬개수가 상대적으로 작게 나타나고 있는데, 이것은 자유단의 증가로 인한 원형평판의 가진시 자유단쪽으로 가진공기가 많이 빠져나가기 때문으로 여겨지며, 1,2차모드는 자유단각 $\alpha=120°$와 유사하나 3,4차모드는 다른 형태의 진동모드가 나타났다. (g), (h)는 자유단각 $\alpha=150°$일 때의 3,4차모드로서 nodal line이 두개인 형태이고 자유단을 이등분하는 축에 대해 3,4차모드가 대칭으로 진동하고 있다.

Fig. 6의 (i)~(l)은 자유단각 $\alpha=180°$일 때의 원형평판의 진동모드로 자유단각 $\alpha=150°$와 동일한 형태로 진동하고 있고, 1차모드에서 4차모드까지의 고유진동수는 206, 676, 1031, 1538 Hz였다.

Fig. 7의 ■(1차모드), □(2차모드), ●(3차모

드), ◆(4차모드)는 자유단의 변화에 따른 고유진동수의 비를 나타내는데, 이것은 자유단 $\alpha=0°$일 때 1차모드의 고유진동수 692 Hz를 1로 두었을 때 자유단 $\alpha=0°$, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°의 변화에 따른 고유진동수를 무차원화한 그림이고, 실선은 Narita와 Leissa[5]에 의해 수치해석된 고유진동수의 비를 나타낸 그림이다. 자유단의 변화에 따른 Narita와 Leissa에 의해 수치해석된 실선의 곡선과 실험적으로 구한 1차모드의 곡선의 형상은 대체적으로 잘 일치하고 있으며, $\alpha=0°$, 30°의 1차모드는 동일한 진동모드이므로 거의 완만한 직선으로 나타나지만 자유단 $\alpha=60°$, 90°, 120°, 150°, 180°에서는 자유단의 영향이 점차 증가함으로 자유단 $\alpha=0°$, 30°에 비해 고유진동수비의 값들이 떨어지는 경향을 보이고 있다. 실험으로 구한 2차모드와 수치해석된 실선의 2차모드를 보면 1차모드에 비해 진동모드의 변화로 인해 자유단 $\alpha=60°$에서 자유단 $\alpha=90°$까지는 급격히 변화하는 것을 알 수 있고, 자유단 $\alpha=120°$에서 자유단 $\alpha=180°$까지는 동일한 진동모드의 형상을 보이고 있기 때문에 완만한 직선으로 나타나고 있다. 또한 Narita와 Leissa에 의해 수치해석된 3차, 4차의 고유진동수비의 곡선과 실험으로 구한 고유진동수비의 곡선은 대체적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

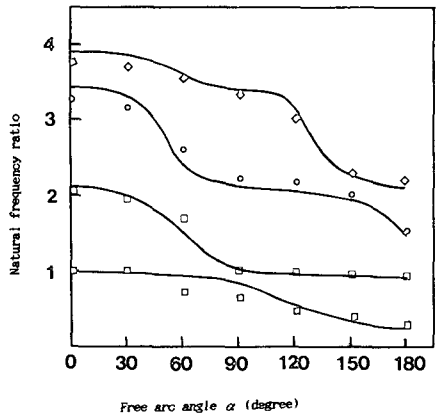

Fig. 7 The natural frequency ratios for varying the free arc angle (—: Numerical analysis by Narita and Leissa, Experimental value, ▣ : 1st mode, □ : 2nd mode, ⓐ : 3rd mode, ◇ : 4 th mode)

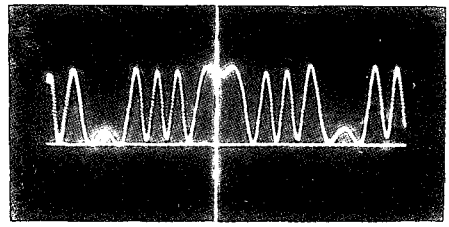

Fig. 8 Oscillogram indicating doppler shift back -scattered light from a vibrating circular plate

3.2 시간평균 홀로그래픽 간섭계와 레이저 도플러 간섭계에 의한 원형평판의 변위값의 비교

시간평균 홀로그래픽 간섭계를 이용한 원형평판의 변위값은 식(1)[6],[7]에 의해서 계산된다.

$$J_0^2(\Phi)=J_0^2[(2\pi)/\lambda\cdot A\cdot(\cos\theta_1+\cos\theta_2)]$$
$$Am=\lambda\cdot\Phi_{om}/(2\pi\cdot(\cos\theta_1+\cos\theta_2)) \quad (1)$$

(1)식에서 $J_o(\Phi)$은 영차 베셀함수이고, θ_1, θ_2는 물체광의 입사각과 반사각, λ는 He-Ne 레이저의 파장, Φ_{0m}은 $J_0^2(\Phi)=0$일 때의 Φ값을 나타낸다. 즉 원형평판의 진동모드 사진에서 어두운 간섭무늬(dark fringe)의 각각의 수에 해당하는 값을 의미한다. 따라서 구하고자 하는 진동물체의 변위는 어두운 간섭무늬의 개수를 세어서 계산한다.

$$S(t)=\lambda/2\cdot B(t) \quad (2)$$

(2)식[8]은 레이저 도플러 진동계에서 진동변위를 계산할 때 사용하는 식으로 $S(t)$는 시간 t에서의 진동물체의 변위이고 $B(t)$는 광증폭기에서 감지된 간섭파형의 총비트 개수를 의미한다. Fig. 8은 레이저도플러 진동계를 이용해서 원형평판이 진동할 때 원형평판의 임의의 점에서 기준광과 물체광이 간섭현상을 일으켜 오실로스코프상에 비트가 발생한 것을 보여주고 있다.

이 사진에서 비트가 발생되지 않은 부분은 속도가 0이 되는 지점으로 최대변위를 의미한다. 따라서 속도가 0인 지점 사이의 총 비트수 $B(t)$를 계산해서 식(2)에 의해 진동변위를 계산한다.

Fig. 9 (a)는 자유단 $\alpha=0°$일 때 2차모드의 X축(홀로그램 재생상의 실선 방향)에 따른 법선변위를 나타낸 것이다. X축을 따라 직경 58 mm의 원형평판을 12등분하여 각각의 지점에 대응하는 어두운 간섭무늬 또는 밝은 간섭무늬의 수를 세어서 시간평균 홀로그래픽 간섭계 이론으로 구한 (1)식으로 변위를 계산한 값을 ○로 나타내었고 레이저도플러 진동계를 이용해 각 지점의 비트수를 세어 (2)식으로 변위를 계산한 값을 실선으로 나타내었다.

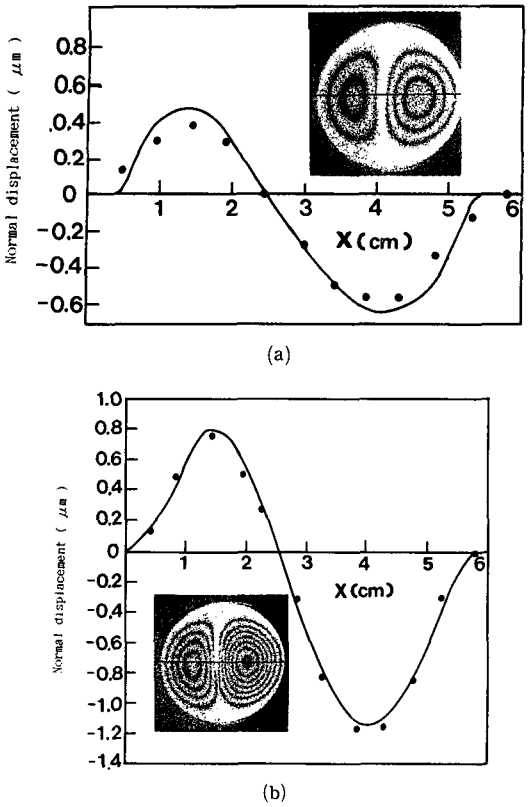

Fig. 9 Normal displacement along X at free arc angle $\alpha=0°$(2nd mode) (● : Holo curve, — : LDV curve)

실선의 곡선과 ●의 곡선이 잘 일치하지 않는데 이것은 간섭무늬 수가 작음에 따른 레이저도플러 진동계의 측정한계 $\lambda/2$에 기인하는 것으로 여겨진다. 그러나 (b)는 간섭무늬 개수가 많기 때문에 (a)에 비해 시간평균 홀로그래픽 간섭계와 레이저 도플러 진동계의 변위계산값이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서 간섭무늬가 증가(진동물체의 변위의 증가)할수록 레이저 도플러 진동계의 측정정도가 증대됨을 알 수 있기 때문에 레이저 도플러 진동계의 측정한계 범위를 규정지을 수 있는데 본 실험에서의 측정한계범위는 0.3~48 μm였다. 또한 (a), (b)의 진동형태를 보면 nodal line을 축으로 음(−), 양(+)으로 원형평판이 진동하고 있음을 알 수 있다. Fig. 10은 자유단각 $\alpha=60°$일 때의 3차모드의 X축(홀로그램 재생상의 실선방향)을 따라 법선변위를 나타낸 것이다.

시간평균 홀로그래픽 간섭계와 레이저 도플러 진동계로 측정한 변위는 잘 일치하고 있으며 X축을

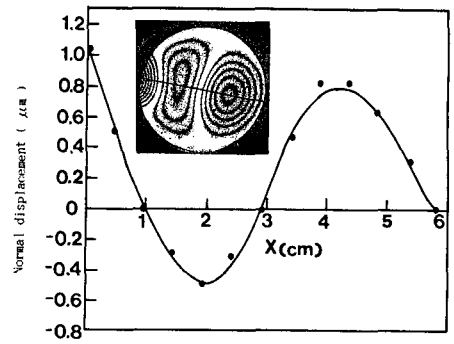

Fig. 10 Normal displacement along X at free arc angle $\alpha=60°$(3rd mode) (● : Holo curve, — : LDV curve)

따라 양(+), 음(−), 양(+)으로 원형평판이 진동하고 있음을 알 수 있고, 또한 자유단 $\alpha=60°$에서 자유단쪽의 변위가 가장 크므로 자유단쪽의 영향을 많이 받고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

시간평균 홀로그래픽 간섭계를 이용해서 경계조건의 변화에 따른 원형평판을 스피커로 공기진동시킬 때 나타나는 진동모드, 고유진동수, 진동모드에 따른 법선 변위와 레이저 도플러 진동계로 원형평판의 법선변위를 분석한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 자유단각 $\alpha=0°$와 $\alpha=30°$일 때 1차모드, 2차모드, 3차모드, 4차모드는 동일한 진동모드이고 자유단각 $\alpha=60°$, 90°, 120°의 1차모드, 2차모드, 3차모드는 자유단의 증가에 따른 영향만 받을 뿐 진동모드는 유사한 형태였고, 단지 4차모드의 진동모드만 달랐다. 자유단각 $\alpha=150°$와 180°에서는 1차모드에서 4차모드까지 동일한 진동모드였다.

(2) 시간평균 홀로그래픽 간섭계를 이용해 실험적으로 구한 고유진동수의 비와 Narita와 Leissa에 의해 수치해석된 고유진동수의 비에 대한 경계조건의 변화에 따른 곡선의 형상은 잘 일치한다.

(3) 시간평균 홀로그래픽 간섭계의 이론으로 구한 변위곡선과 레이저도플러 진동계에 의해 측정된 원형평판의 변위곡선은 진폭이 클 경우 잘 일치하나 진폭이 작은 경우는 다소 차이가 있었다.

(4) 반경 $a=29$ mm인 원형평판의 진동변위를 본 실험에서 구성된 레이저도플러 진동계와 시간평

균 홀로그래픽 간섭계로 진동변위를 측정한 결과, 레이저도플러 진동계의 변위 측정 한계범위는 약 0.3~48 μm이고 시간 평균 홀로그래픽 간섭계의 변위 측정 한계범위는 약 0.3~4 μm였다.

참고문헌

(1) Leissa, A.W., 1969, "Vibration of Plates," NASA SP-160(N70-18461), pp. 7~35.

(2) Nowaki, W. and Olesiak, Z., 1956, "Vibration, Buckling and Bending of a Circular Plate Clamped along Part of its Periphery and Simply -Supported on the Remaining Part," Bulletin de l'Academic Polonaise des Sciences, Vol. 4, pp. 247~258.

(3) Keer, L.M. and Stahl, B., 1972, "Eigenvalue Problems of Rectangular Plates with Mixed Edge Conditions," Trans. ASME Series E, Vol. 39, No. 2, pp. 513~520.

(4) Hirano, Y. and Okazaki, K., 1976, "Vibration of a Circular Plate Having Partly Clamped or Partly Simply Supported Boundary," Bull. JSME, Vol. 19, No. 132, pp. 610~618.

(5) Narita, Y. and Leissa, A.W., 1981, "Flexural Vibrations of Free Circular Plates Elastically Constrained along Parts of the Edge," Int. J. Solids Structures, Vol. 17, pp. 83~92.

(6) Singh, K. and Gupta, P.C., 1975, "Characteristic Fringe Function for Time Average Holography of Periodic Nonsinusoidal Vibrations," Applied Optics, Vol. 14, No. 1, pp. 129~133.

(7) Lee, K.B., Park, S.J., et al., 1992, "Three Dimensional Displacement and Strain of the Vibration Plate Using Holographic Interferometry and F.E.M.," J. of Sound and Vibration, Vol. 153, No. 1, pp. 63~75.

(8) Bruce, R.A. and Fitzpatrick, G.L., 1975, "Remote Vibration Measurement of Rough Surface by Laser Interferometry," Applied Optics, Vol. 17, No. 4, pp. 1621~1626.