

〈論 文〉

속이 찬 실린더와 평판의 접합부에 관한 연구 : 실린더의 끝단 경계조건이 미치는 영향

김 윤 영*

(1992년 5월 14일 접수)

A Study on the Attachment of a Solid Circular Cylinder and a Plate : Effect of End Conditions of the Cylinder

Yoon Young Kim

Key Words : Solid Circular Cylinder(속이 찬 원통 실린더), Plate(평판), End Effect(끝단효과), Analytic Solution(해석해), Stiffness/Flexibility Matrix Approach(강성/유연성 행렬법)

Abstract

This work is concerned with the investigation of end effects of a cylinder on a structure where a circular plate is attached to a solid circular cylinder. Three-dimensional elasticity solutions are used in a cylinder whereas the classical thin plate theory is employed for a plate. The end effect of the cylinder on the flexibility and the structural response is demonstrated by several numerical examples.

1. 서 론

얇은 평판과 속이 찬 실린더는 공학분야에서 매우 중요한 구조요소로, 각종 구조물에 사용되어왔다. 이러한 중요성으로 말미암아 평판과 속이 찬 실린더에 대한 수많은 연구가 진행되어 왔다. 그러나 2차원 구조물로 간주되는 얇은 평판이 3차원 구조물로 간주되는 속이 찬 실린더에 접합된 경우를 특별히 다루는 연구는 별로 많지 않다. 특히, 실린더의 양 끝단에서의 끝단효과(end-effect)가 실린더와 평판의 접합된 구조물의 응력분포에 끼치는 영향에 대한 정량적 해석을 한 연구는 거의 알려져 있지 않다. 이 문제를 해결하기 위해 상용되는 유한요소법 등과 같은 수치해법을 사용할 수 있

지만, 이것은 매우 비능률적이라는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러나 해석해를 사용한 해석법을 적용하면 이러한 끝단효과를 효율적으로 취급할 수 있다.

이 논문에서는 Fig. 1에서와 같은 축대칭 평판과 속이 찬 실린더(이하 단순히 실린더라고만 칭함)가 붙은 구조물에서 실린더의 끝단효과가 응력분포에 미치는 영향을 해석해를 사용하여 고려해 보고자 한다. 이를 위해 얇은 평판에서는 2차원 고전 평판 이론을, 등방성 실린더에서는 끝단효과를 고려하기 위해서 3차원 선형 탄성이론을 사용하고자 한다. 실린더와 평판의 접합부에서, 평판의 이차원 해와 실린더의 3차원 해를 연결시키기 위해 접합부에서의 실린더의 유연성을 나타내는 유연성 행렬을 유도한다. 이러한 실린더의 유연성 행렬은 원형평판의 내부 경계조건으로 사용되는데, 이와 유사한 해석절차⁽¹⁾는 셸구조물에 활용되어 왔다. (Fig. 1)

*정회원, 서울대학교 기계설계학과

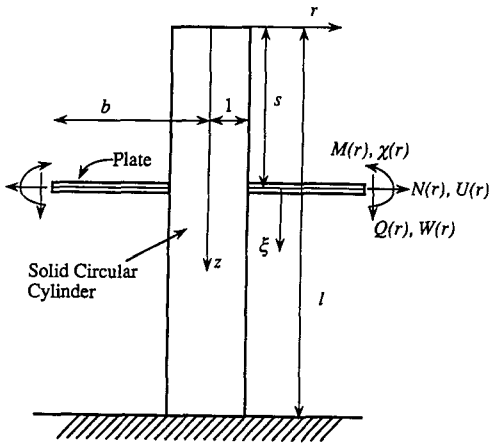


Fig. 1 The structure consists of a circular plate and a solid circular cylinder and its coordinate system is shown

본 논문의 주요 내용 중의 하나는 접합부에서의 실린더의 유연성을 나타내는 유연성 행렬(flexibility matrix)이란 개념을 사용한다는 것과 그것을 구하는 절차이다. 이 유연성 행렬을 구하기 위해서 3종류의 해를 중첩하는데, 그 해의 구체적 성격은 본문에서 논하기로 한다. 그러나 이러한 해들 중의 하나는 실린더의 끝단효과를 나타내는 해로서 그 일반해의 형태는 알려져 있으나,^(2,3) 주어진 경계치 문제의 해를 구하는 것은 쉽지 않다. 전형적인 수치해석법으로(예를 들어, 유한요소법) 지수함수 형태로 끝단으로부터 급격하게 감소해 나가는 특징을 가진 끝단효과를 만족스럽게 나타내기 위해서 수많은 요소들을 사용해야 한다. 이러한 어려움을 극복하기 위해서, 본 논문에서는 지수함수 형태로 감소해 나가는 해석해를 활용하여 만든 해법⁽⁴⁾을 활용하고자 한다.

여러가지 기하학적 조건에 대해 실린더의 끝단효과가 접합부에서의 실린더의 유연성에 끼치는 영향을 수치적으로 살펴본다. 그리고 여러가지 기하학적, 하중조건 하에서 이 끝단효과가 평판의 변위 및 응력분포에 끼치는 영향도 고려한다.

이 연구에서 여러가지 조건하에 정량적 분석을 수행하지만, 본 논문은 평판을 2차원 구조물로 이상화하였으므로, 그 해석결과의 엄밀성에 한계가 있다. 이러한 이상화 과정없이, 평판과 실린더 모든 구조물에서 3차원해를 사용하면 더 좋은 결과를 얻을 수 있겠지만, 3차원 해석해만을 이용하여 이

문제를 푸는 것은 극히 어렵다. 본 논문에서, 평판을 2차원 구조물로만 가정하였으나 이 가정은 물리적으로 상당히 타당성을 지니므로, 그 결과도 실제 엄밀한 해석결과와 크게 다르지 않을 것이다.

2. 가정 및 해석절차

Fig. 1에 나타난 구조물의 해석을 위해서, 다음과 같은 가정을 설정하고자 한다.

- (1) 구조물의 형상과 하중분포는 축대칭이다.
- (2) 평판은 고전 선형 평판이론이 유효할 정도로 얇다.
- (3) 평판과 실린더의 결합부에서 전달될 수 있는 법선응력과 전단응력은 각각 1차, 2차식으로 간주한다. (이것은 고전 평판이론과 일치한다.)
- (4) 평판의 중립면은 실린더와 직각으로 만난다.
- (5) 실린더의 한 끝단의 축방향의 변위는 0**이다.
- (6) 끝단효과를 고려하기 위하여, 실린더에서는 탄성학에 입각한 해를 사용한다.

Fig. 1과 같이 몇 개의 구조요소로 이루어진 구조의 응력해석을 위해서는, 강성 또는 유연성 행렬법을 사용하는 것이 가장 효과적일 것이다.

본 연구에서는 실린더와 평판의 접합부에서 실린더의 유연성행렬을 구하는 것이 가장 중요한 과정이다. 이를 위해 에너지개념과 경계부의 연속조건을 활용한다. 이렇게 구성된 유연성 행렬을 이용하여 먼저 평판에서의 응력분포를 구하고, 필요하다면 실린더에서의 응력분포를 구한다. 물리적으로, 실린더의 유연성행렬은 평판과 실린더의 결합부에 작용하는 평판에 대한 탄성지지대를 나타낸다고 볼 수 있다.

상기와 같은 가정과 해석절차를 염두에 두고, 먼저 탄성이론에 입각한 3차원해와, 고전 평판 이론에 입각한 2차원해를 두 구조물의 결합부에서 접합시키는 과정을 다음 절에서 살펴보기로 하자.

3. 평판에서의 경계치문제

고전평판이론의 결과를 행렬식으로 쓰면⁽⁵⁾

** 이 연구에서의 해석절차는 단순히 이 경우에만 적용되는 것은 아니다. 그러나, 이러한 조건하에서 본 해석절차가 보다 쉽게 기술될 수 있다.

$$\{D(r)\} = [DM(r)]\{A\} + \{D^p(r)\} \quad (1a)$$

$$\{F(r)\} = [FM(r)]\{A\} + \{F^p(r)\} \quad (1b)$$

여기서 $\{D\}$ 와 $\{F\}$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} x(r) \\ W(r) \\ U(r) \end{Bmatrix}; \{F\} = \begin{Bmatrix} M(r) \\ Q(r) \\ N(r) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$\{A\}$ 는 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}^T$ 로써, 미지수를 나타내는 컬럼벡터이다. 식(2)에서, 평면내 변위와 횡변위는 각각 $U(r), W(r)$ 표시되었으며, 중립면의 회전 $x(r)$ 은 $-dW(r)/dr$ 로 정의되었다. $N(r), Q(r)$ 은 평면상의, 그리고 횡방향의 단위 원주길이 당의 힘을 나타내며, $M(r)$ 은 단위 원주길이 당의 모멘트를 나타낸다. 상첨자 p 는 특수해(particular solution)에 관련된 양을 표시한다.

본 연구에서는 편의상 무차원 양을 사용하는데 길이의 차원을 갖는 물리량은 실린더의 반경 \bar{a} 로 나누고, 응력의 단위를 갖는 양은 $2\hat{G}_c$ (여기서 \hat{G}_c 는 실린더의 전단계수)로 나눈다. 따라서, $M(r)$ 은 물리적 모멘트량 $\bar{M}(r)$ 를 $2\hat{a}^2\hat{G}_c$ 으로 나눈 양이며, r 는 물리적인 반경좌표 \bar{r} 을 \bar{a} 로 나눈 무차원 반경 좌표이다. 그리고 평판의 무차원 외경 b 는 내경 \bar{a} 로 나눈 값이다. G_p 와 D_p 는 평판의 전단계수 \hat{G}_c 와 휨강성 \hat{D}_c 을 각각 \hat{G}_c 와 $2\hat{G}_c\hat{a}^3$ 으로 나눈 것들이다. ($\hat{\quad}$ 으로 표시된 양들은 실제 물리량이다.)

상기의 $[DM(r)]$ 과 $[FM(r)]$ 에서 영이 아닌 항들을 적어보면

$$DM_{12} = -\frac{1}{r}; DM_{13} = -2r; DM_{14} = -r(\ln r + 1)$$

$$DM_{21} = 1; DM_{22} = \ln r; DM_{23} = r^2; DM_{24} = r^2 \ln r$$

$$DM_{35} = -\frac{1}{r}; DM_{36} = 2\left(\frac{1-\nu_p}{1+\nu_p}\right)r$$

$$FM_{12} = D_p \frac{1-\nu_p}{r^2}; FM_{13} = -2D_p(1+\nu_p)$$

$$FM_{14} = -D_p[2(1+\nu_p)\ln r + (3+\nu_p)]$$

$$FM_{24} = -D_p \frac{4}{r}$$

여기서 평판의 무차원 두께와 푸아송 비율은 각각 t 와 ν_p 로 표시하였다.

고전적 평판이론에 의한 3차원 응력분포는

$$\sigma_{rr}(r, \xi) = \frac{N(r)}{t} + \frac{12M(r)\xi}{t^3} \quad (3a)$$

$$\sigma_{r\xi}(r, \xi) = \frac{3Q(r)}{2t} \left(1 - \frac{4\xi^2}{t^2}\right) \quad (3b)$$

여기서 ξ 는 평판의 중립면으로부터 측정된 두께 방향의 무차원 좌표이다.

접합부에서의 실린더의 탄성학적 거동은 아래의 식으로 표시될 수 있으며

$$\{D_c\} = [C]\{F_c\} + \{D_c^p\}, \quad (4)$$

여기서 $[C]$ 는 3×3 유연성 행렬로서 접합부에서의 실린더의 유연성을 나타내는데, 그 요소들은 추후 구하기로 한다. $\{D_c\}$ 와 $\{F_c\}$ 는 접합부에서의 실린더의 변위와 힘을 나타내며 하첨자 c 는 실린더를 의미하며, 상첨자 p 는 특수해를 나타낸다.

$r=1$ 에서의 아래의 연속조건을 사용하여

$$\{D_c\} = \{D(1)\}; \{F_c\} = \{F(1)\}$$

다음과 같은 식을 얻는 후 평판의 경계조건 중의 하나로 사용한다.

$$\begin{aligned} & [[DM(1)] - [C][FM(1)]]\{A\} \\ & = \{D_c^p\} + [C]\{F^p(1)\} - \{D^p\} \end{aligned} \quad (5)$$

평판에서의 나머지 경계조건은 $r=b$ 에서 주어지는데, 이 경계조건과 조건(5)를 사용하면 미지수 $\{A\}$ 를 구할 수 있다. 예를들어 $r=b$ 에서 $\{F\}$ 가 주어지면, 다음과 같은 연립방정식을 풀어 $\{A\}$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} [DM(1)] - [C][FM(1)] \\ [FM(b)] \end{Bmatrix} \{A\} \\ & = \begin{Bmatrix} \{D_c^p\} + [C]\{F^p(1)\} - \{D^p(1)\} \\ \{F^p(b)\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

4. 접합부에서의 실린더의 유연성 행렬

지금부터 식(4)에 나타났던 유연성 행렬 $[C]$ 를 구해 보기로 하자. 이를 위해 접합부에 작용하는 N_c, M_c, Q_c 에 의해 실린더에 가해진 일 W_0 를 고려하면

$$\begin{aligned} 2W_0 &= M_c x_c + Q_c W_c + N_c U_c \\ &= \{F_c\} \cdot [C]\{F_c\} + \{D_c^p\} \cdot \{F_c\} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 관계식(4)가 활용되었다.

식(7)을 얻는 절차와는 달리 고전 평판이론에 입각한 N_c, M_c, Q_c 에 의한 3차원 응력분포로써 W_0 를 표현하면

$$\begin{aligned}
 2W_o &= \int_0^l \{ \sigma_{rr}(1, z) [u_r(1, z) + u_r^p(1, z)] \\
 &\quad + \sigma_{rz}(1, z) [u_z(1, z) + u_z^p(1, z)] \} dz \\
 &= \int_0^l \{ [M_c \sigma_{rr}^M(1, z) + Q_c \sigma_{rr}^Q(1, z) \\
 &\quad + N_c \sigma_{rr}^N(1, z)] [M_c u_r^M(1, z) \\
 &\quad + Q_c u_r^Q(1, z) + N_c u_r^N(1, z) + u_r^p(1, z)] \\
 &\quad + [M_c \sigma_{rz}^M(1, z) \\
 &\quad + Q_c \sigma_{rz}^Q(1, z) + N_c \sigma_{rz}^N(1, z)] [M_c u_z^M(1, z) \\
 &\quad + Q_c u_z^Q(1, z) + N_c u_z^N(1, z) + u_z^p(1, z)] \} dz
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 l 은 무차원 실린더 길이이다. 식 (8)에서, 상첨자 M, Q, N 은 각각 표면하중 $M_c=1, Q_c=1, N_c=1$ 에 의해 얻어진 양들임을 나타내기 위해 사용되었다. σ_{rr}^M 등의 정의는 고전 평판이론에 의한 것이며 구체적인 식은 아래와 같다 :

$$\sigma_{rr}^M(1, z) = \begin{cases} \frac{12(z-s)}{t^3} & (s-t/2 < z < s+t/2) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{9a}$$

$$\sigma_{rr}^N(1, z) = \begin{cases} \frac{1}{t} & (s-t/2 < z < s+t/2) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{9b}$$

$$\sigma_{rz}^Q(1, z) = \begin{cases} \frac{3}{2t} \left\{ 1 - \frac{4(z-s)^2}{t^2} \right\} & (s-t/2 < z < s+t/2) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{9c}$$

$$\sigma_{zz}^Q(1, z) = \sigma_{rz}^M(1, z) = \sigma_{rz}^N(1, z) = 0 \quad (0 < z < l)$$

여기서 s 는 실린더 끝단으로부터 측정된 평판의 중립면의 위치를 나타낸다.

식 (7)과 식 (8)은 같아야 하므로 $[C]$ 와 $\{D\}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 C_{1j} &= \int_0^l \sigma_{rr}^M(1, z) [\delta_{j1} u_r^M(1, z) + \delta_{j2} u_r^Q(1, z) \\
 &\quad + \delta_{j3} u_r^N(1, z)] dz
 \end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2j} &= \int_0^l \sigma_{rz}^Q(1, z) [\delta_{j1} u_z^Q(1, z) + \delta_{j2} u_r^M(1, z) \\
 &\quad + \delta_{j3} u_z^N(1, z)] dz
 \end{aligned} \tag{10b}$$

$$\begin{aligned}
 C_{3j} &= \int_0^l \sigma_{rr}^N(1, z) [\delta_{j1} u_r^M(1, z) + \delta_{j2} u_r^Q(1, z) \\
 &\quad + \delta_{j3} u_z^N(1, z)] dz
 \end{aligned} \tag{10c}$$

그리고

$$x_r^p = \int_0^1 \sigma_{rr}^M(1, z) u_r^p(1, z) dz \tag{11a}$$

$$W_r^p = \int_0^1 \sigma_{rz}^Q(1, z) u_z^p(1, z) dz \tag{11b}$$

$$U_r^p = \int_0^1 \sigma_{rr}^N(1, z) u_r^p(1, z) dz \tag{11c}$$

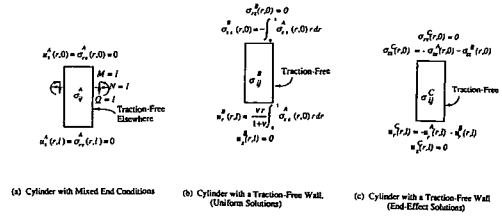


Fig. 2 Computing the total flexibility matrix requires three types of solutions: (a) solutions of a cylinder with mixed ends, (b) uniform solutions and (c) end-effects solutions

주어진 끝단조건을 갖는 실린더의 유연성 행렬 $[C]$ 를 구체적으로 구하기 위해서는 자유로운 한쪽 끝 ($z=0$)과 고정된*** 다른 한쪽 끝 ($z=l$)을 갖는 실린더를 고려하자. 이 실린더가 접합부에서 각각 $(\sigma_{rz}^M \sigma_{rz}^Q)$, $(\sigma_{rz}^Q \sigma_{rz}^N)$, 그리고 $(\sigma_{rz}^N \sigma_{rz}^M)$ 의 하중 분포를 받고 있는 경우들을 풀면 $[C]$ 의 요소들을 하나하나 구할 수 있을 것이다. 이 문제를 풀기 위해서는 Fig. 2에서 나타난 바처럼, 아래의 3가지 형태의 해를 중첩하는 방법을 채택하고자 한다.

(1) 접합부에서 하중을 받고, 끝단이 다음과 같은 경계 조건을 갖는 실린더의 해 (“A-Solution”)

$$\begin{cases} u_z(r, 0) = u_z(r, l) = 0 \\ \sigma_{rz}(r, 0) = \sigma_{rz}(r, l) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

(2) $r=1$ 의 표면에서 응력이 0이며 끝단에서만 균일한 하중분포(합력=0)를 받는 실린더의 해 (“B-Solution”)

(3) $r=1$ 의 표면에서 응력이 0이며 끝단에서의 합력이 0인 하중분포를 받는 실린더의 해 (“C-Solution”)

여기서 “C-Solution”은 소위 끝단효과만을 고려한 해이다. 해를 A,B,C로 나누는 것은, “A-Solution”과 “B-Solution”은 비교적 손쉽게 구해질 수 있고, “C-Solution”는 기계발된 방법(4)을 활용하여 구할 수 있기 때문이다. 그러므로 유연성 행렬 $[C]$ 는 아래와 같이 3개로 나누어 구할 수 있다.

$$[C] = [C^A] + [C^B] + [C^C] \tag{13}$$

다음에서 그것들을 구체적으로 구하는 식을 유도하기로 한다.

*** 전술된 바, 이러한 끝단조건은 단순히 해석과정을 간략히 설명하기 위하여 선택되었다.

4.1 [C^A]의 구성

[C^A]를 계산하기 위해서는 조건 (12)를 갖는 실린더에 대한 일반해^(2,6)를 사용하자 :

$$u_r(r, z) = (1 - 2\nu_c) A_0 r - \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(\mu_m r) I_0(\mu_m r) + B_m I_1(\mu_m r)] \cos \mu_m z \quad (14a)$$

$$u_z(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ [4(1 - \nu_c) A_m + B_m] I_0(\mu_m r) + A_m(\mu_m r) I_1(\mu_m r) \} \sin \mu_m z \quad (14b)$$

$$\sigma_{rr}(r, z) = A_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m \mu_m [(1 - 2\nu_c) I_0(\mu_m r) + (\mu_m r) I_1(\mu_m r) + B_m [\mu_m I_0(\mu_m r) - \frac{I_1(\mu_m r)}{r}]] \} \cos \mu_m z \quad (14c)$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = 2\nu_c A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \{ [2(2 - \nu_c) A_m + B_m] \mu_m I_0(\mu_m r) + A_m \mu_m^2 r I_1(\mu_m r) \} \cos \mu_m z \quad (14d)$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ (2(1 - \nu_c) A_m + B_m) \mu_m I_1(\mu_m r) + A_m \mu_m^2 r I_0(\mu_m r) \} \sin \mu_m z \quad (14e)$$

여기서 ν_c 는 실린더의 푸아송 비율을 나타내며, μ_m 은 $m\pi/l$ 로 정의되었다. I_n 은 차수가 n 인 1종 수정 Besscl 함수를 나타낸다.

만약 실린더의 표면($r=1$)에서 기술될 수 있는 응력 및 변위성분을 아래와 같이 전개하면

$$u_r(1, z) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \cos \mu_m z \quad (15a)$$

$$u_z(1, z) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin \mu_m z \quad (15b)$$

$$\sigma_{rr}(1, z) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m \cos \mu_m z \quad (15c)$$

$$\sigma_{rz}(1, z) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m \sin \mu_m z \quad (15d)$$

다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} P_m \\ Q_m \end{Bmatrix} = [H_m] \begin{Bmatrix} N_m \\ T_m \end{Bmatrix} \quad (16a)$$

여기서

$$\begin{aligned} H_m^{11} &= 2(1 - \nu_c) \mu_m I_1^2(\mu_m) / \Delta_m \\ H_m^{12} = H_m^{21} &= \{ 2(1 - \nu_c) \mu_m I_0(\mu_m) I_1(\mu_m) + \mu_m^2 [I_1^2(\mu_m) I_0^2(\mu_m)] \} / \Delta_m \\ H_m^{22} &= \{ -4(1 - \nu_c) I_0(\mu_m) I_1(\mu_m) + \mu_m [(3 - 2\nu_c) I_0^2(\mu_m)] \} / \Delta_m \end{aligned} \quad (16b)$$

그리고

$$\Delta_m = - [\mu_m^2 + 2(1 - \nu_c)] \mu_m I_1^2(\mu_m) + \mu_m^3 I_0^2(\mu_m)] / \Delta_m$$

그리고

$$\Delta_m = - [\mu_m^2 + 2(1 - \nu_c)] \mu_m I_1^2(\mu_m) + \mu_m^3 I_0^2(\mu_m)$$

$m=0$ 인 경우의 H_0 는 아래와 같이 주어진다.

$$H_0^{11} = 1 - 2\nu_c ; H_0^{12} = H_0^{21} = H_0^{22} = 0 \quad (16c)$$

실린더의 표면에서의 응력분포 $[\sigma_{rr}(1, z), \sigma_{rz}(1, z)]$ 가 각각 $(\sigma_{rr}^M, \sigma_{rz}^M), (\sigma_{rr}^Q, \sigma_{rz}^Q), (\sigma_{rr}^N, \sigma_{rz}^N)$ 일 때 식 (15c, d)에서 상응하는 Fourier시리즈 계수는 다음과 같이 표시되며

$$\begin{aligned} N_m^M &= \frac{2}{l} \int_0^l \sigma_{rr}^M(1, z) \cos \mu_m z dz \\ T_m^Q &= \frac{2}{l} \int_0^l \sigma_{rz}^Q(1, z) \sin \mu_m z dz \\ N_m^N &= \frac{2}{l} \int_0^l \sigma_{rr}^N(1, z) \cos \mu_m z dz \\ N_m^Q &= T_m^N = T_m^M = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

그 구체적 식은 부록에 유도해 놓았다. 또한 식 (16)을 이용하면 $(\sigma_{rr}^M, \sigma_{rz}^M)$ 등의 하중분포에 의한 $r=1$ 에서의 변위에 대한 Fourier시리즈 계수를 구할 수 있을 것이다. 식 (15, 16)을 식 (10)에 대입하면 다음과 같이 [C^A]의 요소들을 구할 수 있다.

$$C_{11}^A = \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{11} (N_m^M)^2 \quad (18a)$$

$$C_{12}^A = C_{21}^A = \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{12} N_m^M T_m^Q \quad (18b)$$

$$C_{13}^A = C_{31}^A = \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{11} N_m^N N_m^M \quad (18c)$$

$$C_{22}^A = \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{22} (T_m^Q)^2 \quad (18d)$$

$$C_{23}^A = C_{32}^A = \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{12} N_m^N T_m^Q \quad (18e)$$

$$C_{33}^A = \frac{l}{2} [2H_0^{11} (N_0^N)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{11} (N_m^N)^2] \quad (18f)$$

4.2 [C^B]와 [C^C]의 구성

실린더 끝단 $z=0, z=l$ 에서의 임의의 경계조건, 예를 들면 자유단, 고정단과 같은 경계조건은 A-Solution으로만 만족시킬 수 없으므로 임의의 끝단 경계조건을 다룰 수 있는 해를 고려해야 하며, 이 경우 적합한 기법⁽⁴⁾을 사용한다. 이 기법에 의한 해석절차를 요약하면

(1) 자유표면을 갖는 실린더에서의 끝단 경계조건을 직교하는 Dini시리즈⁽⁹⁾로 전개하는데, 이 Dini시리즈는 $r=1$ 에서 특별한 실린더 표면조건을 만족시키는 해이다.

(2) 이러한 방법으로 얻은 해로부터, 실린더 끝단에서 변위에 대한 Dini시리즈 계수와 응력에 대한 Dini시리즈계수와와의 관계, 즉 끝단 강성 행렬을 구성한다. (이 끝단 강성행렬은 유한요소법에서 채택되는 절점에서의 변위와 응력과의 관계가 아니라 시리즈계수간의 관계인 것이 특징이다.)

(3) 실린더 내부에서의 변위나 응력분포를 구하기 위해서는 복·직교성 관계^(8,9)를 활용한다.

이 과정에 입각하여, 먼저 다음과 같이 변위와 응력성분을 Dini 시리즈로 전개하면,

$$\begin{cases} u_r(r,z) \\ u_z(r,z) \\ \sigma_{rz}(r,z) \\ \sigma_{zz}(r,z) \end{cases} = \sum_{k=1}^{n_k} \begin{cases} U_k(z) J_1(\rho_k r) / \tau_k^e \\ W_k(z) J_0(\xi_k r) / \tau_k^e \\ R_k(z) J_1(\rho_k r) / \tau_k^e \\ Z_k(z) J_0(\xi_k r) / \tau_k^e \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ W_0(z) / \tau_0^e \\ 0 \\ Z_0(z) / \tau_0^e \end{cases} \quad (19)$$

식(19)에서 ξ_k 와 ρ_k 은 각각 $dJ_0(r)/dr=0$, $J_0(r)=0$ 의 근이며, 상수 τ_k^e 와 τ_k^e 는 다음과 같이 정의되었다.

$$\tau_k^e = \left[\frac{J_0^2(\xi_k)}{2} \right]^{-1/2}; \tau_k^e = \left[\frac{J_1^2(\rho_k)}{2} \right]^{1/2}$$

식(19)에서 $W_0(z)$, $Z_0(z)$ 를 제외한 나머지 모든 항들은 순수 합력이 0인 경우에 사용하는 것들로서 끝단효과를 나타내는데 사용되는 항들이다. 따라서 W_0 , Z_0 에 관련된 해는 강체변위를 포함한 균일한 응력상태를 나타낸다. 여기서 균일한 응력상태에 유연한 행렬을 $[C^B]$ 로 정의하고 순수합력이 0인 응력상태에 (끝단효과만을 나타내는 응력상태) 관련된 유연성 행렬을 $[C^C]$ 으로 정의한다.

$[C^B]$ 와 $[C^C]$ 를 구체적으로 구하기 위해서 $u_r^M(r,z)$, $u_z^g(r,z)$, $u_r^N(r,z)$ 를 (19)에 있는 시리즈로 전개한다. 이것들을 전개한 Dini시리즈의 m 번째 계수 U_m^M , u_m^g , U_m^N 등은 부록에 유도해 놓았다.

$[C^B]$ 를 구하기 위해서는 다음과 같은 끝단경계조건을 갖는 문제를 풀어야 한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r,0) &= 0 \\ \sigma_{zz}(r,0) &= - \left[\frac{Z_0^N(0) + Z_0^M(0) + Z_0^g(0)}{\tau_0^e} \right] \end{aligned}$$

$$u_r(r,l) = \frac{\nu_c r}{1+\nu_c} \left[\frac{Z_0^N(0) + Z_0^M(0) + Z_0^g(0)}{\tau_0^e} \right] \quad (20)$$

$$u_z(r,l) = 0$$

$$\sigma_{rz}(1,z) = \sigma_{rr}(1,z) = 0$$

조건 (20)에 대한 엄밀해는^(2,3)

$$u_r(r,z) = \left[\frac{Z_0^M(0) + Z_0^g(0) + Z_0^N(0)}{\tau_0^e} \right] \frac{\nu_c r}{1+\nu_c}$$

$$u_z(r,z) = - \left[\frac{Z_0^M(0) + Z_0^g(0) + Z_0^N(0)}{\tau_0^e} \right] \frac{z-l}{1+\nu_c} \quad (21)$$

$$\sigma_{zz}(r,z) = - \left[\frac{Z_0^M(0) + Z_0^g(0) + Z_0^N(0)}{\tau_0^e} \right]$$

$$\sigma_{rz}(r,z) = \sigma_{rr}(r,z) = 0$$

식(21)과 (A6)를 (10)에 대입하면 다음과 같이 $[C^B]$ 를 구할 수 있다.

$$[C^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(l-s)^2 \nu_c}{l(\tau_0^e)^2(1+\nu_c)} & \frac{(l-s) \nu_c}{l(\tau_0^e)^2(1+\nu_c)} \\ 0 & \frac{(l-s) \nu_c}{l(\tau_0^e)^2(1+\nu_c)} & \frac{\nu_c^2}{l(\tau_0^e)^2(1+\nu_c)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

끝단효과에 관련된 유연성 행렬 $[C^C]$ 를 구하는 과정이 가장 복잡하고 많은 계산 시간이 요구되는데, 그 이유는 이 경우에 대한 정해가 존재하지 않기 때문이다. $[C^C]$ 를 구하기 위해서는 아래와 같은 경계 조건을 고려해야 하며

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r,0) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^M(0) + Z_k^g(0) + Z_k^N(0)}{\tau_k^e} \\ &\quad J_0(\xi_k r) \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\sigma_{rz}(r,0) = 0$$

$$\begin{aligned} u_r(r,l) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_k^e} \left[U_k^M(l) + U_k^g(l) + U_k^N(l) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_c}{\tau_k^e(1+\nu_c)} \frac{(-1)^{k+1} 2^{3/2}}{\rho_k^2} \{ Z_0^M(0) \right. \\ &\quad \left. + Z_0^g(0) + Z_0^N(0) \} \right] J_1(\rho_k r) \end{aligned}$$

$$u_z(r,l) = 0 \quad (23b)$$

식(23b)에서는 다음과 같은 식을 활용하였으며

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_k^e} \frac{(-1)^{k+1} 2^{3/2}}{\rho_k^2} J_1(\rho_k r)$$

여기서 함수 "r"은 $z=l$ 에서 반경방향의 변위조건 즉 구속조건을 만족시키기 위해 필요한 것이다. 왜냐하면 A, B-Solution은 일반적으로 $z=l$ 에서 0이 아닌 값을 주기 때문이다. 식(23)에 나타낸 Dini 시리즈계수 $Z_k^M(0)$ 등도 부록에 유도해 놓았다.

$[C^c]$ 를 구하는 구체적 절차⁽⁴⁾는 다음과 같다. 먼저 $r=1$ 에서의 자유표면을 갖는 실린더의 일반해가 필요한데, 이것은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{cases} u_r(r, z) \\ u_z(r, z) \\ \sigma_{rz}(r, z) \\ \sigma_{zz}(r, z) \end{cases} = \sum_{p=1}^{\infty} E^p \begin{cases} \tilde{u}_r^p(r) \\ \tilde{u}_z^p(r) \\ \tilde{\sigma}_{rz}^p(r) \\ \tilde{\sigma}_{zz}^p(r) \end{cases} \exp(-\mu^p z) \quad (24)$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \bar{E}^p \begin{cases} \tilde{u}_r^p(r) \\ -\tilde{u}_z^p(r) \\ -\tilde{\sigma}_{rz}^p(r) \\ \tilde{\sigma}_{zz}^p(r) \end{cases} \exp[-\mu^p(l-z)] [Re(\mu^p) > 0]$$

여기서

$$\tilde{u}_r^p(r) = [(\mu^p)^2 J_0(\mu^p) + 2(1-\nu_c)(\mu^p) J_1(\mu^p)] J_1(\mu^p r) - (\mu^p)^2 J_1(\mu^p) r J_0(\mu^p r) \quad (25a)$$

$$\tilde{u}_z^p(r) = [(\mu^p)^2 J_0(\mu^p) + 2(1-\nu_c)(\mu^p) J_1(\mu^p)] J_0(\mu^p r) + (\mu^p)^2 J_1(\mu^p) r J_1(\mu^p r) \quad (25b)$$

$$\tilde{\sigma}_{rz}^p(r) = (\mu^p)^3 [-J_0(\mu^p) J_1(\mu^p r) + J_1(\mu^p) r J_0(\mu^p r)] \quad (25c)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^p(r) = (\mu^p)^2 [-(\mu^p) J_0(\mu^p) + 2J_1(\mu^p)] J_0(\mu^p r) - (\mu^p)^3 J_1(\mu^p) r J_1(\mu^p r) \quad (25d)$$

전개계수 E^p , \bar{E}^p ($\{\cdot\}$ 는 공액복소수를 나타내는 것이 아님)는 일반적으로 복소수이며 복소수값을 갖는 고유치 μ 는 다음의 식을 만족한다.

$$J_0^2(\mu) + \left[1 - \frac{2(1-\nu_c)}{(\mu)^2}\right] J_1^2(\mu) = 0$$

끝단강성행렬법을 사용하여 식 (23)의 문제를 풀면 식 (24) 등에 나타나는 $(E^p)^N$, $(\bar{E}^p)^N$ 등을 구할 수 있다. 따라서 식 (25)로부터 $u_r(1, z)$, $u_z(1, z)$ 에 대한 식을 구할 수 있으므로 유연성행렬의 정의식인 식 (10)을 활용하여 $[C^c]$ 의 요소들을 구할 수 있다. 예를들면 C_{11}^c 는

$$C_{11}^c = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{u}_r^p(1) \left[(E^p)^M \int_0^l \sigma_{rz}^p(1, z) \exp(-\mu^p z) dz + (\bar{E}^p)^M \int_0^l \sigma_{rz}^p(1, z) \exp[-\mu^p(l-z)] dz \right]$$

$$C_{21}^c = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{u}_z^p(1) \left[(E^p)^M \int_0^l \sigma_{zz}^p(1, z) \exp(-\mu^p z) dz - (\bar{E}^p)^M \int_0^l \sigma_{zz}^p(1, z) \exp[-\mu^p(l-z)] dz \right]$$

$$- 4\nu_c \sum_{p=1}^{\infty} J_1^2(\mu^p) [(E^p)^M \exp(-\mu^p l) - (\bar{E}^p)^M]$$

$$C_{31}^c = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{u}_r^p(1) \left[(E^p)^M \int_0^l \sigma_{rz}^p(1, z) \exp(-\mu^p z) dz \right]$$

$$- (\bar{E}^p)^M \int_0^l \sigma_{rz}^p(1, z) \exp[-\mu^p(l-z)] dz \Big]$$

C_{21}^c 을 나타내는 상기의 식 중 마지막 항은 아래와 같이 표시될 수도 있다.

$$\int_0^l \sigma_{rz}^p(1, z) u_z^*(r, l) z dz$$

$$= \int_0^l \sigma_{rz}^p(1, z) \left[\frac{1}{(t\hat{a})^2} \int_0^l u_z^*(r, l) r dr \right] z dz$$

$$= 2 \int_0^l \sigma_{rz}^p(1, z) \sum_{p=1}^{\infty} \left[\int_0^l \tilde{u}_z^p(r) r dr \right]$$

$$[(E^p)^M \exp(-\mu^p l) - (\bar{E}^p)^M] z dz$$

여기서 $u_z^*(r, l)$ 은 $u_z(r, l) = 0$ 의 조건을 만족시키기 위해 사용된, 축방향 강체변위에 해당된다. 식 (26)에 나타나는 적분은 간단히 정식으로 표현될 수 있으며 C_{21}^c , C_{31}^c 는 C_{11}^c 과 유사하게 표현됨을 알 수 있다.

5. 수치해석결과

한쪽 끝단 ($z=0$)은 자유롭고 다른 끝단 ($z=l$)은 고정되어 있는 실린더에 대해서 다음과 같은 수치해석을 수행하였다.

먼저 실린더의 유연성 행렬 $[C]$ 에 끝단효과 (C-Solution)가 미치는 영향을 고려해 보았다. Fig. 3에서는 유연성 행렬의 성분들을 실린더의 자유단으로부터 측정된 평판의 중립면의 위치 ($s = \hat{s}/\hat{a}$)의 함수로 나타내 보았다. 이 그림에 대한 평판의 두께 ($t = \hat{t}/\hat{a}$)는 0.25, 실린더의 길이 ($l = \hat{l}/\hat{a}$)는 10.0, 실린더의 포아슨비율은 1/3로 잡았다. 이 문제를 풀기 위해 식(18)과 (26)에서의 급수의 항은 각각 200, 20을 취했는데 이것으로 수렴된 결과를 얻을 수 있다는 것을 수치적으로 검증하였다.

Fig. 3a, 3b는 각각 상대적으로 실린더의 자유단에 그리고 고정단에 가까이 있을 경우의 $[C]$ 를 나타낸다. 이 그림에서 알 수 있듯이 실린더의 양 끝단에서 반경의 반정도 이상을 벗어난 곳에 평판이 접합되어 있으면 A-, B-Solution만에 의한 결과가 엄밀한 결과 (A-, B-, C-Solution를 중첩에 의한 결과)와 매우 잘 일치한다. 물론 St. Venant원리로서 이와 같은 것을 정성적으로 추측할 수 있으나 실제로 끝단효과가 얼마만큼이나 영향을 미치는지는 알 수 없다. 또한 $t=1/8$, $1/2$ 인 경우에 대해서도 수치해석을 수행하였으며, 그 결과가 Fig. 3과 매우

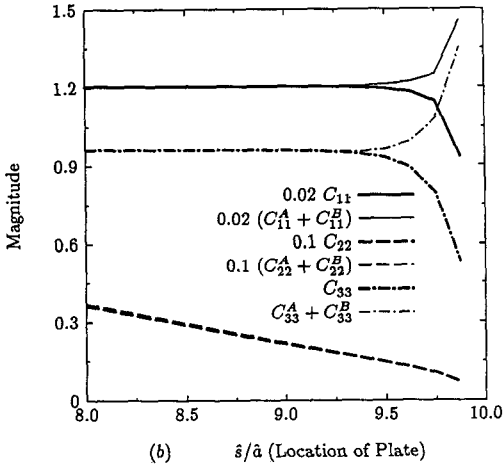
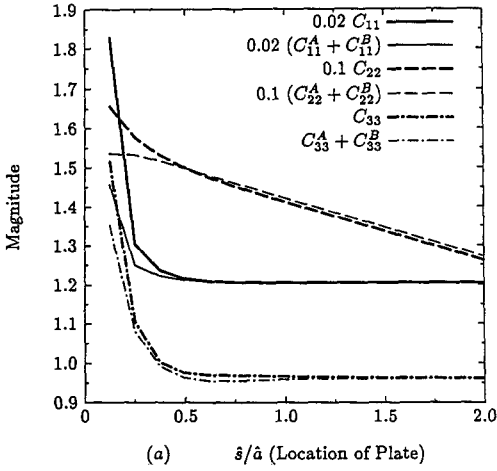


Fig. 3 The diagonal elements of the flexibility matrix, $[C]$, are shown as a function of the location s of the plate near (a) the free end (b) the fixed end of the cylinder for $l=10$, $t=1/4$, $\nu_c=1/3$. The influences of the end-effects solutions (C -solutions) are very localized near the ends of the cylinder

유사하게 얻어짐을 알 수 있었다. (Fig. 3)

평판의 두께 t 가 커짐에 따라 C_{11} , C_{33} 의 점근적 거동 (asymptotic behavior)을 고찰하기 위해서 C_{11} , C_{33} 를 평면변형 (plane-strain) 가정하에 얻어지는 $C_{11}^{plane-strain}$, $C_{33}^{plane-strain}$ 와 비교해 놓았다. Fig. 4는 t 가 증가함에 따라 C_{11} , C_{33} 가 $C_{11}^{plane-strain}$, $C_{33}^{plane-strain}$ 로 점근적으로 다가감을 보여주고 있다. 푸아송비율 ν 가 0.30일 때 Rankine⁽¹⁰⁾이 계산해 놓은 결과가 본 연구에서 얻어진 결과와 매우 잘 일치함을 알 수 있고, 또한

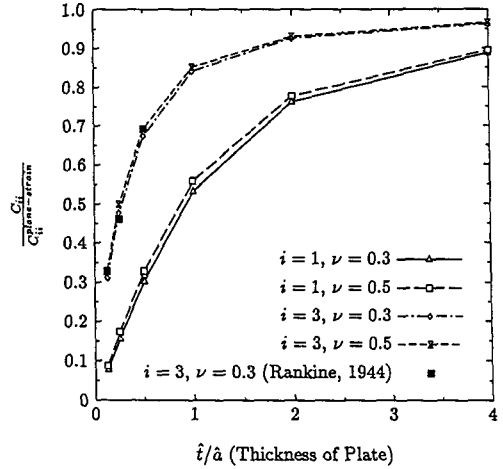


Fig. 4 The asymptotic behavior of C_{11} and C_{33} is illustrated ($l=10$, $s=5$). C_{33} approaches more rapidly the limiting plane-strain result than C_{11}

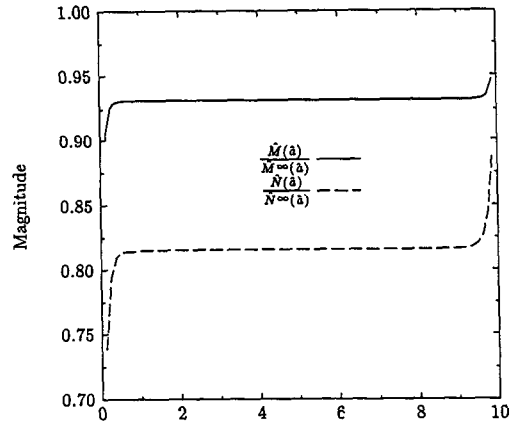


Fig. 5 The influence of the elastic solid cylinder attachment on the stress resultant concentration at the inner edge of the plate is shown for varying location s of the inner attachment. The solid and dashed lines represent, respectively, $\hat{M}(\bar{a})/\hat{M}^\infty(\bar{a})$ subjected to $[\hat{M}(\bar{b})/2G_p\bar{a}^2=1, \hat{Q}(\bar{b})=0, \hat{N}(\bar{b})=0]$, and $\hat{N}(\bar{a})/\hat{N}^\infty(\bar{a})$ subjected to $[\hat{N}(\bar{b})/2G_p\bar{a}=1, \hat{M}(\bar{b})=0, \hat{Q}(\bar{b})=0]$. (The results with the superscript ∞ are those of the plate with the fixed inner edge. ($l=10$, $\nu=1/3$, $t=1/4$, $b=5$))

여러가지 푸아송 비율에 대한 계산결과도 $C_i/C_i^{plane-strain}$ 의 거동은 푸아송비율에 크게 영향을 받지 않음을 보여주었다. (Fig. 4)

이제 Fig. 1에서 같은 구조물에서, 상기의 해석

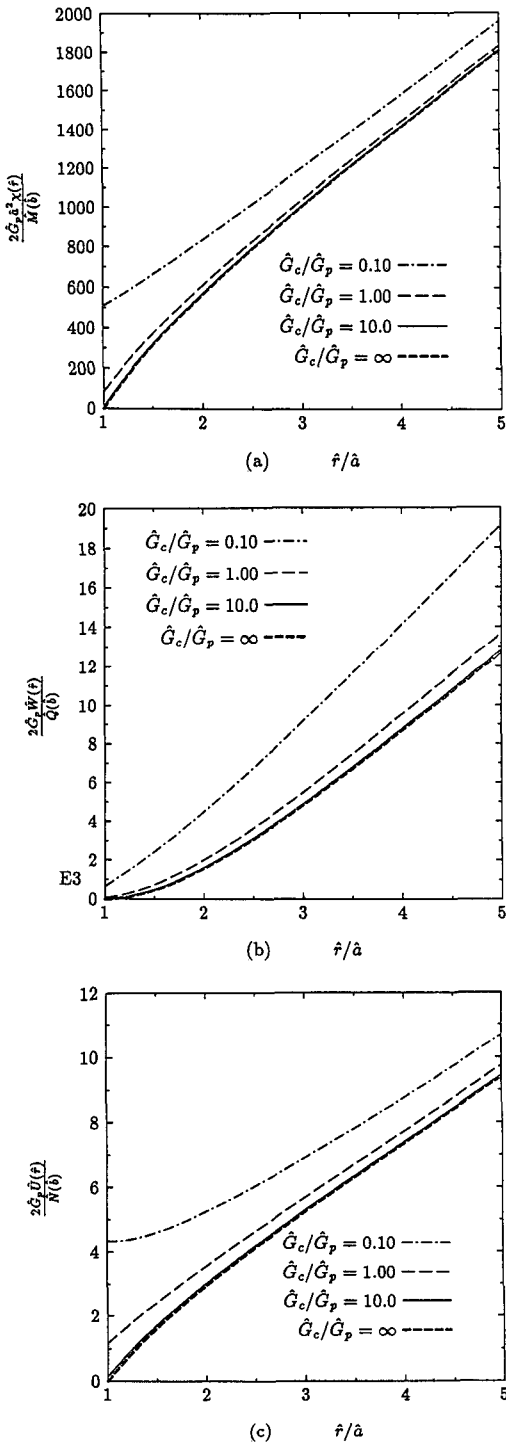


Fig. 6 For different ratios of \hat{G}_c/\hat{G}_p , the structural responses of the plate are examined. The results are shown for (a) $2\hat{G}_p a^2 \chi(\bar{r})/\hat{M}(\bar{b})$ (b) $2\hat{G}_p \hat{W}(\bar{r})/\hat{Q}(\bar{b})$, and (c) $2\hat{G}_p \hat{U}(\bar{r})/\hat{N}(\bar{b})$ (\bar{b})

법에 입각하여 평판에서의 응력 분포를 구해보기로 하자. Fig. 5는 $[M(b)=1, Q(b)=0, N(b)=0]$ 하중상태에서의 $M(1)/M^\infty(1)$ 의 값을 실선으로 표시하였고, $[N(b)=1, M(b)=0, Q(b)=0]$ 하중상태에서의 $N(1)/N^\infty(1)$ 의 값을 점선으로 표시하였다. 여기서 상첨자 ∞ 가 붙는 양은 평판이 $r=1$ 에서 고정된 경우로 가정하여 얻은 값이다. 실린더의 자유단으로부터 평판의 중립면까지의 거리 s 가 증가함에 따라, $M(1), N(1)$ 은 각각 $M^\infty(1), N^\infty(1)$ 로 접근해간다. 특히 끝단효과에 의한 $M(1), N(1)$ 의 변화가 매우 현저함을 알 수 있다. (Fig.5)

평판의 회전 등과 같이 변형을 나타내는 양에 끼치는 실린더의 전단계수 G_c 의 영향을 고려해 본 결과는 Fig. 6에 나타나 있다. (여기서 $s=2.0, t=0.25, \nu_c=\nu_p=\frac{1}{3}$ 값을 취함). 하중 상태 $[M(b)=1, Q(b)=0, N(b)=0]$ 에 대한 회전각 $\chi(r)$, $[Q(b)=1, N(b)=M(b)=0]$ 에 대한 횡변위 $W(r)$, 그리고 $[M(b)=Q(b)=0, N(b)=1]$ 에 대한 평면내 변위 $U(r)$ 은 각각 Fig. 6a,b,c에 나타나 있다. 실린더의 전단계수가 평판의 전단 계수보다 10배이상 크면, 실질적으로 평판의 내부단이 고정된 것으로 볼수 있는데, 이 정량적 결과는 실제 구조해석을 간단하게 하기 위해 활용될 수 있다.

6. 결 론

이 연구에서 사용된 해석절차로 끝단효과 등을 효율적으로 처리할 수 있고 또한 끝단효과가 구조의 거동에 끼치는 영향을 정성적으로 해석할 수 있었다.

Fig. 1과 같은 구조물에서 평판 등의 응력분포를 구할 때 평판이 실린더의 끝단으로부터 반경의 1/2 이상 떨어져 있으면 실린더의 끝단효과를 무시해도 되는 것을 정량적으로 알 수 있다. 또한 평판과 실린더의 접합부가 실린더의 양 끝단에 가까이 다가감으로써, 평판의 응력집중현상이 매우 현저하게 변함을 알 수 있었다. 또한 실린더의 전단계수가 평판의 전단계수보다 약 10배이상 큰 경우에는 평판의 내부단이 고정되어 있는 것으로 간주할 수 있음을 알 수 있다.

후 기

단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구 되었으며, 관계자에게 감사한다.

참고문헌

- (1) Steele, C.R., Ranjan, G.V., Goto, C. and Puliam, T.H., 1979, "Computer Analysis of Shells of Revolution Using Asymptotic Results," Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, St. Louis.
- (2) Little, R.W., 1973, Elasticity, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- (3) Robert, M. and Keer, L. M., 1987, "An Elastic Circular Cylinder with Displacement Prescribed at the Ends-Axially Symmetric Case," Quart. J. Mech. Appl. Mech., Vol. 40, pp. 339~363.
- (4) Kim, Y.Y. and Steele, C.R., 1992, "Static Axisymmetric End Problems in Semi-Infinite and Finite Solid Cylinders," AMSE J. Appl. Mech., Vol. 59, pp. 69~76.
- (5) Steele, C.R. and Balch, C.D., 1989, Theory of Plates, Stanford University Lecture Notes.
- (6) Love, A.E.H., 1944, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Ed., Dover Publications, New York.
- (7) Watson, G.N., 1966, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, The Cambridge University Press.
- (8) Fama, M.E.D., 1972, "Radial Eigenfunctions for the Elastic Circular Cylinder," Quart. J. Mech. Appl. Mech., Vol. 15, pp. 479~495.
- (9) Gregory, R.D., 1983, "A Note on Bi-Orthogonality Relations for Elastic Cylinders of General Corss Section," J. Elasticity, Vol. 13, pp. 351~355.
- (10) Rankine, A.W., 1944, "Shrink-Fit Stresses and Deformations," ASME J. Appl Mech., Vol. 11, pp. 77~85.

부 록

식 (17)에 나타난 $\sigma_{rr}^M(1, z)$, $\sigma_{rr}^N(1, z)$, $\sigma_{rr}^O(1, z)$ 등에 대한 Fourier 시리즈 계수는 (m 이 0이 아닌 경우)

$$N_m^M = \frac{2}{l} \left[\frac{6 \sin \mu_m S}{t \left(\frac{\mu_m t}{2} \right)^2} \right] \left(\frac{\mu_m t}{2} \cos \frac{\mu_m t}{2} - \sin \frac{\mu_m t}{2} \right)$$

$$T_m^O = -\frac{2}{l} \left[\frac{3 \sin \mu_m S}{\left(\frac{\mu_m t}{2} \right)^3} \right] \left(\frac{\mu_m t}{2} \cos \frac{\mu_m t}{2} - \sin \frac{\mu_m t}{2} \right)$$

(A1. a)

$$N_m^M = \frac{2}{l} \frac{\cos \mu_m S}{\frac{\mu_m t}{2}} \sin \frac{\mu_m t}{2}$$

그리고 $m=0$ 일때

$$N_0^N = \frac{1}{l} ; N_0^M = 0 \tag{A1. b}$$

Dini시리즈의 계수에대한 정식은 다음으로 표현할 수 있다.

$$U_k^O(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{U}_k^m \cos \mu_m z \tag{A2. a}$$

$$W_k^O(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{W}_k^m \sin \mu_m z \tag{A2. b}$$

$$R_k^O(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{R}_k^m \sin \mu_m z \tag{A2. c}$$

$$Z_k^O(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Z}_k^m \cos \mu_m z \tag{A2. d}$$

여기서

$$\tau_k^p \tilde{U}_k^m = \begin{cases} (1-2\nu_c) A_0^O E_k & (m=0) \\ -A_m^O \mu_m L_{m,k}^0 - B_m^O L_{m,k}^1 & (m=1, 2, \dots) \end{cases} \tag{A3. a}$$

$$\tau_k^E \tilde{W}_k^m = [4(1-\nu_c) A_m^O + B_m^O] M_{m,k}^0 + A_m^O \mu_m M_{m,k}^1 \tag{A3. b}$$

$$\tau_k^p \tilde{R}_k^m = A_m^O \mu_m^2 L_{m,k}^0 + [2(1-\nu_c) A_m^O + B_m^O] L_{m,k}^1 \tag{A3. c}$$

$$\tau_k^E \tilde{Z}_k^m = \begin{cases} 2\nu_c A_0^O G_k & (m=0) \\ [2(2-\nu_c) A_m^O + B_m^O] \mu_m M_{m,k}^0 + A_m^O \mu_m^2 M_{m,k}^1 & (m=1, 2, \dots) \end{cases} \tag{A3. d}$$

그리고

$$E_k = \int_0^1 J_1(\rho_k) r^2 dr = \frac{2J_1(\rho_k)}{\rho_k^2}$$

$$G_k = \int_0^1 J_0(\xi_k) r dr = \begin{cases} 1/2 & \text{if } (\xi_k=0) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$L_{m,k}^0 = \int_0^1 I_0(\mu r) J_1(\rho_k r) r^2 dr = \frac{\mu_m I_1(\frac{\mu_m}{\rho_k}) J_1(\rho_k)}{\mu_m^2 + \rho_k^2} + \frac{2I_0(\frac{\mu_m}{\rho_k}) \rho_k^2 J_1(\rho_k)}{(\mu_m^2 + \rho_k^2)^2}$$

$$L_{m,k}^1 = \int_0^1 I_1(\mu_m r) J_1(\rho_k r) r dr = \frac{\mu_m I_0(\frac{\mu_m}{\rho_k}) J_1(\rho_k)}{\mu_m^2 + \rho_k^2}$$

$$M_{m,k}^0 = \int_0^1 I_0(\mu_m r) J_0(\xi_k r) r dr = \frac{\mu_m I_1(\mu_m) J_0(\xi_k)}{\mu_m^2 + \xi_k^2}$$

$$M_{m,k}^1 = \int_0^1 I_1(\mu_m r) J_0(\xi_k) r^2 dr = \frac{\mu_m I_0(\mu_m) J_0(\xi_k)}{\mu_m^2 + \xi_k^2}$$

$$- \frac{2\mu_m^2 I_1(\mu_m) J_0(\xi_k)}{(\mu_m^2 + \xi_k^2)^2} \quad (A4)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} A_m^0 \\ B_m^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta_m} \begin{bmatrix} \mu_m I_1(\mu_m), \\ -2(1-\nu_c) \mu_m I_1(\mu_m), \\ -\mu_m^2 I_0(\mu_m), \\ -I_1(\mu_m) + \mu_m I_0(\mu_m) \\ -\mu_m^2 I_1(\mu_m) \\ -(1-2\nu_3) \mu_m I_0(\mu_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_m^0 \\ T_m^0 \end{Bmatrix} \quad (A5)$$

상기의 식을 유도하는데 있어 Bessel 함수의 직교성과 순환성⁽⁹⁾을 활용하였다. 식 (A3, A4, A5)에 사용된 Ω 는 M, Q, N 을 나타낸다.

특별히 $k=0$ 일때, 다음과 같이 계수를 구할 수 있음을 보일 수 있다.

$$\tau_0^s Z_0^N(0) = \frac{\nu_c}{l} \quad (A6. a)$$

$$\tau_0^s Z_0^M(0) = 0 \quad (A6. b)$$

$$\tau_0^s Z_0^Q(0) = \frac{l-s}{l} \quad (A6. c)$$

식 (A6)을 유도하는데 있어 다음을 사용하였다.

$$\tau_0^s Z_0(z) = \int_0^1 \sigma_{zz}(r, z) r dr$$

$$= \nu_c N_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m}{\mu_m} \cos \mu_m z$$

식 (A6a, b)에서는 $N_0^N=1/l$, $N_0^M=0$ 그리고 $T_m^N=T_m^M=0$ 이라는 사실을 활용하였다.

식 (A6. c)은 다음과 같이 T_m^Q 의 정의로부터 구할 수 있으며

$$\tau_0^s Z_0^Q(0) = \sum_0^{\infty} \frac{T_m^Q}{\mu_m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m} \frac{2}{l} \int_0^1 \sigma_{rz}^Q(1, z) \sin \mu_m z dz$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^1 \sigma_{rz}^Q(1, z) \left[\sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{\sin \mu_m z}{\mu_m} \right] dz$$

$$= \int_0^1 \sigma_{rz}^Q(1, z) \left(\frac{1-z}{2} \right) dz$$

여기서 다음의 사실을 활용하였다.

$$l-z = \sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{\sin \mu_m z}{\mu_m}$$