

〈論 文〉

수정 횡변위장에 의한 강성과잉이 없는 직선 보 요소

이팔갑* · 신호철**

(1992년 6월 23일 접수)

Locking-free Straight Beam Element by a Modified Transverse Displacement Field

Pal-Gap Lee and Hyo-Chol Sin

Key Words : Straight Beam Element(직선 보 요소), Shear Locking(전단강성과잉), Modified Transverse Displacement Field(수정 횡변위장)

Abstract

The Formulation of a new Hermite straight beam element to eliminate the shear locking is presented. All the kinematic variables in Timoshenko beam are reinterpreted by the consideration of equilibrium equations together. It shows that when the modified transverse displacement field is used the Timoshenko beam looks apparently the same as the Euler beam. The element is formulated for the modified transverse displacement field to have the same interpolation scheme as that in the Hermite element. Transformation Matrix which relates a modified nodal vector with nonmodified one is also introduced to deal with general boundary conditions. Several examples are demonstrated and discussed for the purpose of verification of the concepts employed. The solutions obtained reveal that the element describes behaviors of the beam quite correctly, showing no locking and that it is also applicable to the analysis of both thin and thick beams.

1. 서 론

전통적으로 사용되고 있는 C^0 요소로서의 보, 평판 및 쉘 요소는 실제 해석시의 효율성과 일반적인 해석 능력으로 해서 다양한 문제에 적용되고 있으며 매우 주목받고 있는 요소이기도 하다.^(1~4) 그러나 최근에 들어 중립면을 중심으로한 정식화에 의해 만들어진 이들 요소에 있어서, 보 단면의 두께가 다른 길이에 비해 상대적으로 작아질 경우, 강성과잉현상이 발생하여 유한요소해석결과를 손상시키고 있음이 알려져 있다.^(1~32) 이러한 바람직하지

못한 현상은 실제로는 존재하지 않는 가상 에너지가 유한요소화 과정에 도입되어 모델링 자체의 강성이 크게 나타나는 현상을 일컫는다. 현재 그 원인에 따라서 전단/막 강성 과잉 현상이라 불려지고 있다.

최근에 이르러 이러한 강성과잉현상의 치료에 대한 많은 연구가 수행되고 있으며, 여러가지 방법이 제시되었는데 이를 대별하여 정리하면 다음과 같다.

- Selective/reduced integration^(5~10)
- Field consistency^(11~14)
- Assumed strain method^(15~17)
- Discrete Kirchhoff theories^(18~20)
- Hybrid/mixed formulation^(4,22,23)

*정회원, 서울대학교 정밀기계설계공동연구소

**정회원, 서울대학교 기계설계학과

- Mode-decomposition approach⁽²⁴⁾
- Anisoparametric interpolation^(25~26)
- Shear penalty-parameter modification⁽²⁵⁾
- Free formulation⁽²⁷⁾

Selective/reduced integration 방법은 강성행렬을 계산할 때 완전적분을 수행하지 않고 전 변수에 대해 혹은 어떤 변수에 대해서는 선별적으로 차수를 낮추어 적분함으로써 강성과잉을 완화시키는 개념이다. 이 방법은 강성과잉현상이 발견된 이후 꾸준히 사용되어 왔고 또한 가장 많이 이용된 방법으로써, 최근에 이르러 그 역학적인 원인이 이론적으로 밝혀지고 있다. 그것은 저차의 요소가 굽힘에너지 표현할 때 존재하지 않는 전단 및 막에 대한 가상에너지를 정식화과정에 필연적으로 도입하게 된다는 것이다. 따라서 이러한 가상에너지를 제거하는 것이 강성과잉의 치료에 가장 중요한 출발점이 된다는 사실이 널리 인식되었고 위에서 열거한 대로 이를 제거하기위한 여러 방법들이 제시되고 있다. Field consistency 방법은 강성과잉의 원인이 되는 변수들을 유한차분법의 개념을 원용함으로써 가상에너지를 제거한 방법이다. 또한 Assumed strain method는 먼저 고려하고 있는 영역의 해를 변위에 기초한 유한요소법에 의해 구한다. 이 때 고려중인 영역의 최상의 해를 주는 특정한 점에서의 변형률을 기준으로 하여 다시 요소 전 영역에 걸쳐 이를 보간하고 인접한 요소와의 연속성을 보장하기 위하여 적절한 가정을 가하는 개념이다. 이 방법은 최근에 매우 주목받고 있는 방법중의 하나로써 여러 문헌에서 보고되었다. 그러나 변형률을 산출할 때 전통적인 구조요소의 가장 큰 문제점인 부적절한 변위장으로부터 유도된 해를 이용하고 있으며 이를 해결하기 위한 여러 방법들이 시도되고 있다. 이외의 여러 방법들 역시 강성과잉현상을 제거하기 위한 다양한 접근방식을 사용하여 강성과잉에 대한 원인을 어느 정도 규명하고 있으며 실제 몇몇 문제에 적용하여 개선된 결과를 나타내고 있다.^(31,32)

한편 이러한 강성과잉현상을 제거하기 위한 새로운 시도로서 곡률에 기초한 구조요소^(31,32)를 들 수 있다. 곡률요소는 구조요소에 있어서 가장 중요한 변수인 곡률을 주 고려대상으로 삼고, 무엇보다도 구조요소에 야기되는 굽힘에너지를 직접 보간하고 표현한다는 점에서 전통적인 구조요소와의 근본적인 차이점을 찾을 수 있다. 이 때 전단에너지는 평

행방정식을 고려함으로써 곡률의 미분형태로 기술되어 정식화과정에 포함되며 각각의 변위장은 주어진 관계식을 적분함으로써 얻어진다. 또한 일반적인 경계조건을 처리하기 위하여 적분된 변위장에 포함된 강체운동성분을 제거함으로써 절점의 곡률치와 변위치 사이에 존재하는 변환행렬을 구하게 된다.

본 논문에서는 먼저 곡률요소에서와 같이 Timoshenko보를 기술하는 모든 변수들을 평행방정식과 함께 고려할 때 각 변수들에 대한 새로운 해석이 가능함을 보이고자 한다. 이는 횡변위장을 곡률로 수정함으로써 시작되는데 수정횡변위장을 사용할 경우, 보를 기술하는 모든 변수들이 Euler보의 그것들과 형태상으로 동일하게 나타나며 수학적으로 볼 때 간결하면서도 새로운 접근 방법을 제시해 준다. 또한 이러한 수정횡변위장을 사용할 경우 순수변위에 기초하고 있는 전통적인 구조요소의 정식화과정과 같은 과정을 거치게 되는 잇점이 있다. 한편, 직선 보요소의 정식화 과정에는 수정횡변위장의 형상함수로서 전통적인 Hermite 보 요소의 형상함수를 도입하였는데 이는 회전각의 장이 수정횡변위장의 미분치로 주어지기 때문이다. 마지막 단계로서, 수정횡변위치가 포함된 절점에서의 변위벡터와 원형변위치가 포함된 변위벡터 사이에 존재하는 변환행렬을 찾아 내었다.

이상의 과정을 거쳐 얻어진 새로운 직선 보 요소를 이용하여 강성과잉현상이 전형적으로 나타나는 실제문제에 적용시켜 보아 강성과잉이 제거됨으로 인한 수치적인 안정성을 확인하고자 한다. 또한 이 때 얻어진 유한요소 해가 보 단면의 두께가 아주 얇은 범위에서부터 두꺼운 영역에 이르기까지 보의 거동을 정확하게 나타내는지를 살펴보고자 한다.

2. 수정횡변위장

직선 보요소를 정식화하기 전에 보를 기술하는 각 변수들을 계의 평행방정식과 함께 고려할때, 곡률에 의해 수정된 수정횡변위장을 수학적으로 도출할 수 있음을 살펴 보자.

먼저, Fig. 1의 Timoshenko보를 고려할 때 보의 중립면에 수직인 단면의 회전각 θ 는 중립면의 회전각 $\frac{dw}{dx}$ 와 전단변형률 γ 의 영향으로 이루어진다.⁽¹⁾

$$\theta = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad (1)$$

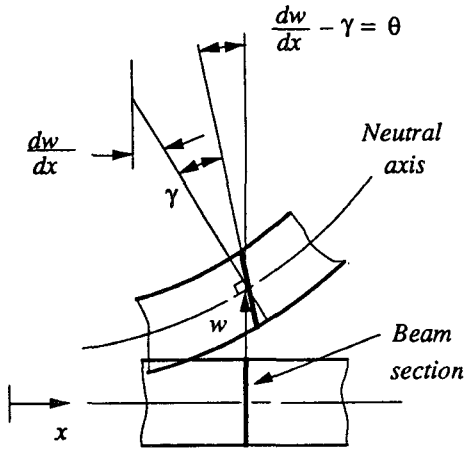


Fig. 1 Deformation of cross-section in a straight Timoshenko beam

이 때 곡률 κ 는 회전각과 다음의 관계가 있다.

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} \quad (2)$$

또한 모멘트 M_b 와 곡률 그리고 전단력 V 와 전단변형률은 각각 다음과 같은 관계가 있다.

$$M_b = EI\kappa \quad (3)$$

$$V = GAk\gamma \quad (4)$$

한편 잘 알려져 있는 계의 평형방정식은

$$\frac{dM_b}{dx} + V = 0 \quad (5)$$

이상의 식을 이용하면 전단 변형률을 곡률의 미분 형태로 표현할 수 있다.

$$\gamma = -\alpha \frac{dw}{dx} \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{EI}{GAk} \quad (7)$$

식 (1), (2), (6)을 이용하면 회전각을 횡변위와 곡률의 함수로서 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\theta = (w + \alpha\kappa)_{,x} \quad (8)$$

이제 횡변위를 곡률로 수정한 수정횡변위장 W 를 다음과 같이 도입한다.

$$W = w + \alpha\kappa \quad (9)$$

따라서 회전각과 곡률은 수정횡변위를 이용하여 다음과 같이 간단히 기술할 수 있다.

$$\theta = W_{,x} \quad (10)$$

$$K = W_{,xx} \quad (11)$$

윗 식에서 주목할 만한 사실은 수정횡변위장을 사용하여 회전각과 곡률을 표시하게 되면 전단변형이 고려되지 않은 Euler보의 관계식과 형태상으로 동일하다는 점이다.

3. 직선 보 요소의 정식화

Fig. 2의 q 개의 절점을 가진 한 개의 직선 보 요소로서 절점의 변위벡터 V 는 수정횡변위와 회전각으로 구성된다. 먼저 식(9)와 식(10)에서 살펴 볼 수 있듯이 회전각은 수정횡변위의 미분형태로 주어지므로 수정횡변위장을 보간하기 위하여 다음과 같이 Hermite 다항식 보간함수로 이루어진 행렬 H_w 를 사용한다.

$$W = H_w V \quad (12)$$

회전각과 곡률 그리고 전단변형률은 식(10)과 (11) 및 (6)으로 부터, 또한 원횡변위는 식(9)로부터 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\theta = H_\theta V \quad (13)$$

$$\kappa = H_\kappa V \quad (14)$$

$$\gamma = -\alpha H_\kappa V \quad (15)$$

$$w = H_w V \quad (16)$$

여기서

$$H_\theta = H_{w,x} \quad (17)$$

$$H_\kappa = H_{w,xx} \quad (18)$$

$$H_w = H_w - \alpha H_\kappa \quad (19)$$

이제 일반적인 경계조건을 처리하기 위하여 수정횡변위치가 포함된 변위벡터를 원횡변위치가 포함된 변위벡터로 표시해 주는 변환행렬을 구해 보자. 수정횡변위장의 정의에 따라 각 절점에서 다음과

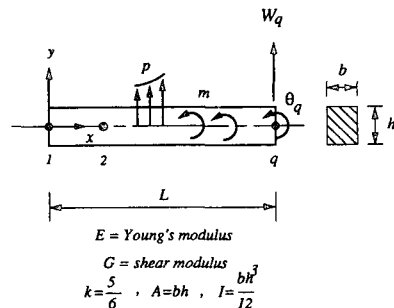


Fig. 2 Nodal displacements and applied loads in a straight beam

$E = \text{Young's modulus}$
 $G = \text{shear modulus}$
 $k = \frac{5}{6}, A = bh, I = \frac{bh^3}{12}$

같은 행렬식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ W_q \\ \theta_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ W_q \\ \theta_q \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} H_{\kappa,1} \\ 0 \\ \vdots \\ H_{\kappa,q} \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (20)$$

윗 식 우변의 첫 벡터를 U 로, 두번째 벡터를 절점에서의 곡률보간행렬이 포함된다는 의미에서 H^n 로 표시하면 다음과 같이 (20)식을 간단히 나타낼 수 있다.

$$V = U + \alpha H^n V \quad (21)$$

$$U = [w_1 \ \theta_1 \ \dots \ w_q \ \theta_q]^T \quad (22)$$

따라서 다음과 같은 변환행렬 T 를 일반적으로 구할 수 있다.

$$V = TU \quad (23)$$

$$T = (I - \alpha H^n)^{-1} \quad (24)$$

2 절점 및 3 절점요소에 있어서의 구체적인 변환행렬은 부록에 나타내었다.

마지막 단계로서, 이상의 각 관계식들을 고려하여 직선 보요소에 대한 정식화를 하여 보자. Fig. 2의 직선보에 대한 Total potential energy는

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2}EI \int_0^L \kappa^2 dx + \frac{1}{2}GAk \int_0^L \gamma^2 dx \\ & - \int_0^L p w dx - \int_0^L m \theta dx \end{aligned} \quad (25)$$

이며, 식 (13), (14), (15)와 (16)을 여기에 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2}EI \int_0^L U^T T^T H_{\kappa}^T H_{\kappa} T U dx \\ & + \frac{1}{2}EI \alpha \int_0^L U^T T^T H_{\kappa,x}^T H_{\kappa,x} T U dx \quad (26) \\ & - \int_0^L U^T T^T H_w^T p dx \\ & - \int_0^L U^T T^T H_{\theta}^T m dx \end{aligned}$$

윗 식을 1차 변분하고 stationarity 조건을 적용하면, 최종적으로 구하고자 하는 임의의 한 개의 직선 보요소에 대한 유한요소 평형방정식이 얻어진다.

$$KU = R \quad (27)$$

여기서

$$K = EIT^T \left[\int_0^L H_{\kappa}^T H_{\kappa} dx + \alpha \int_0^L H_{\kappa,x}^T H_{\kappa,x} dx \right] T \quad (28)$$

$$R = T^T \left[\int_0^L H_w^T p dx + \int_0^L H_{\theta}^T m dx \right] \quad (29)$$

$$U = [w_1 \ \theta_1 \ \dots \ w_q \ \theta_q]^T \quad (30)$$

4. 새로운 직선 보 요소의 수치예

앞에서 정식화된 직선 보요소를 전단강성과잉이 전형적으로 일어나는 몇 가지 실제 문제에 적용시켜 보고 얻어진 해의 안정성 및 그 정확도를 살펴 보자. 단면의 두께 대 길이의 비가 영에 수렴할 때, 강성과잉현상은 그 비의 제곱 형태로 나타난다는 사실이 알려져 있다.^{(28)~(30)} 이로 인한 해의 손상여부 및 안정성에 대한 검토는, 기존의 요소와는 달리 수정행변위에 기초한 직선 보요소가 과연 강성과잉현상이 완전히 제거되었는가를 판단할 수 있게 해 준다. 아울러 엄밀해와의 비교에 의해 얻어진 해의 정확도를 살펴 보고 요소의 타당성을 검증한다. 한편, 계산의 편의를 위하여 물성치는 다음과 같이 가정하였다.

$$E = 2G \quad (31)$$

4.1 2개의 절점을 가진 직선 보 요소의 수치예

2개의 절점을 가진 직선 보요소로 일차 선형장의 굽힘 모멘트가 주어지는 문제를 해석한다. Fig. 3, 4 및 5에 주어진 직선 보는 모두 일차 선형장으로 모멘트가 걸려 있는 문제이다. Castigliano의 에너지 정리를 사용하여 각각의 문제에 대한 이론해를 구하고 얻어진 유한요소 해석 결과와 이를 비교한다.

(1) 일반적인 일차 선형장으로 모멘트 분포가 주어진 경우

Fig. 3과 같이 한 쪽 단이 고정되어 있고 다른 한 단에 상수의 굽힘모멘트와 횡방향하중이 걸리게 되면 모멘트의 분포가 전형적인 일반적 일차 선형장으로 나타나게 된다. 여기에 2 절점 보요소로 해석하게 되면 다음 식 (32)와 (33)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$w_2 = \frac{PL^3}{3EI} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{h}{L} \right) \right] + \frac{M_0 L^2}{2EI} \quad (32)$$

$$\theta_2 = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_0 L}{EI} \quad (33)$$

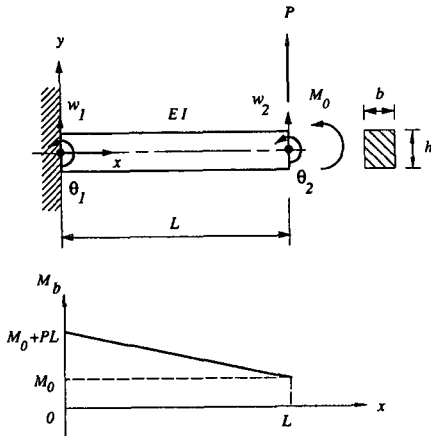


Fig. 3 A cantilever beam under the moment and transverse load at tip and bending moment distribution

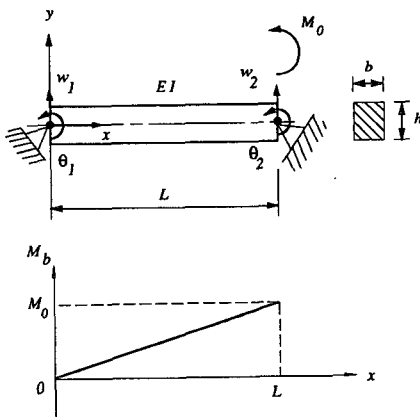


Fig. 4 A simply supported straight beam with moment load applied at tip and bending moment distribution

이 결과는 Castigliano의 energy정리에 의한 이론해와 일치한다. 한편, 모멘트 하중과 횡방향 하중의 영향이 끝단의 절점치가 보여 주듯이 독립적으로 나타나고 있다. 이 점은 대단히 중요한 물리적 의미를 가지고 있다. 즉 상수의 굽힘 모멘트만이 걸려 있는 문제를 고려할 때, 강성과잉현상은 바로 전단변형률이 영인 상태를 표현하지 못하기 때문이다.^(1,21) 전통적인 2 절점 직선 보요소가 이러한 하중에 대해 강성과잉현상으로 해가 매우 손상되어 전혀 다른 해석 결과를 주고 있는 점과 비교해 보면 새롭게 정식화된 요소의 강력한 해석능을 살펴 볼 수 있다. 또한, 전체 보에 걸쳐 회전각

과 횡변위의 장도 이론해와 동일한 결과가 얻어진다.

(2) 단순지지 경계조건을 가진 일차 선형장 모멘트 분포의 경우

고정단의 경계조건뿐만이 아니라 단순지지 경계조건의 경우에도 일차 선형장의 모멘트 분포가 존재할 수 있다. 고정단과 함께 단순지지 경계조건까지 고려하는 이유는 지금까지 제기된 강성과잉현상의 여러 치료 방법들은, 일반적인 경계조건상태하에서 얻어지는 해가 보의 거동을 정확히 표현하지 못하고 있기 때문이다. Fig. 4는 바로 이러한 점을 확인하기 위하여, 단순지지 경계조건을 가지는 일차 선형장의 모멘트 분포 문제의 한 유형으로서 해석 대상으로 삼았다. 경계조건을 고려하고 유한요소 해석을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\theta_1 = -\frac{M_0 L}{6EI} \left[1 - \frac{6}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (34)$$

$$\theta_2 = \frac{M_0 L}{3EI} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (35)$$

이 결과 역시 이론해와 동일하며 양 절점의 회전각에 단면의 두께 대 길이의 비가 제곱형태로 나타나 전단에너지의 영향이 정확하게 기술되고 있음을 알 수 있다. 한편, 횡변위의 장을 구해보면 다음과 같으며, 이론적으로 구해진 결과와 동일하다.

$$w = \frac{M_0 L}{6EI} x \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (36)$$

(3) 일차 선형장으로서 불연속적인 모멘트 분포의 경우

Fig. 5와 같이 한쪽 단이 고정되고 보의 중간에 상수의 모멘트가 걸린 경우 모멘트의 분포가 불연속적으로 나타난다. 모멘트가 불연속인 경우로는 이중재료를 접합하여 보를 구성하거나, 단면의 형상이 불연속일 때 잘 나타난다. 이러한 문제 역시 보요소가 해석할 수 있어야 한다. 다음은 유한요소 해석을 수행하여 얻어진 절점에서의 변위치들이다.

$$w_2 = \frac{M_0 \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2EI} \quad (37)$$

$$\theta_2 = \frac{M_0 \left(\frac{L}{2} \right)}{EI} \quad (38)$$

$$w_3 = \frac{M_0 \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2EI} + \frac{M_0 \left(\frac{L}{2} \right) L}{EI} \quad (39)$$

$$\theta_3 = \theta_2 \quad (40)$$

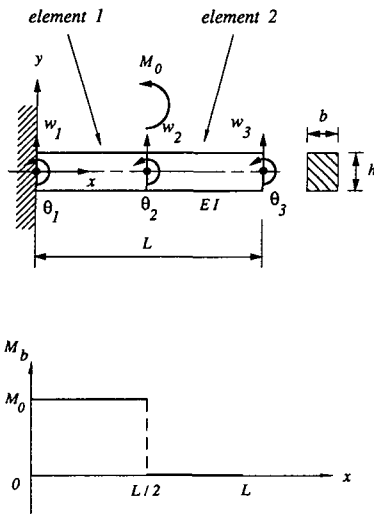


Fig. 5 A cantilever beam under moment load at the middle of the beam (two 2-node elements used) and bending moment distribution

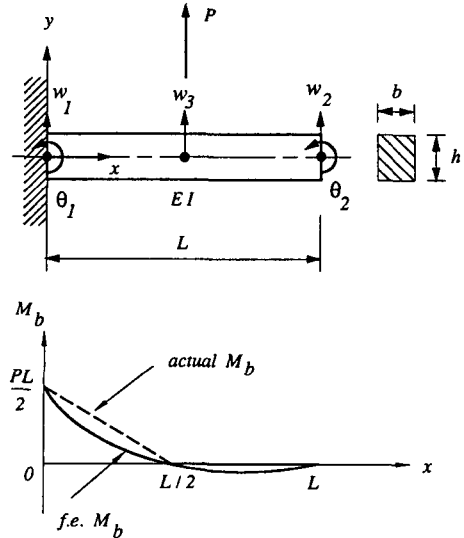


Fig. 6 A 3-node straight beam element under transverse load at the middle of the span and bending moment distribution

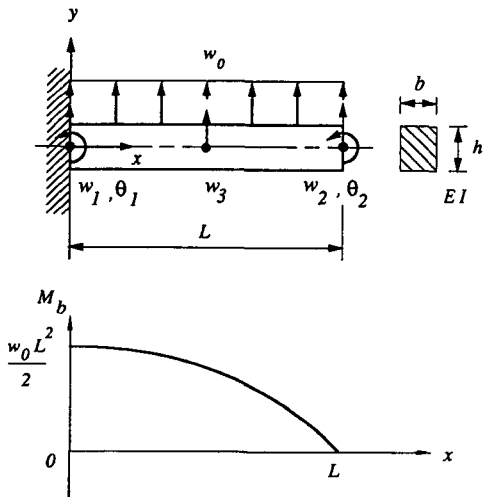


Fig. 7 A cantilever beam under the uniformly distributed load and bending moment distribution

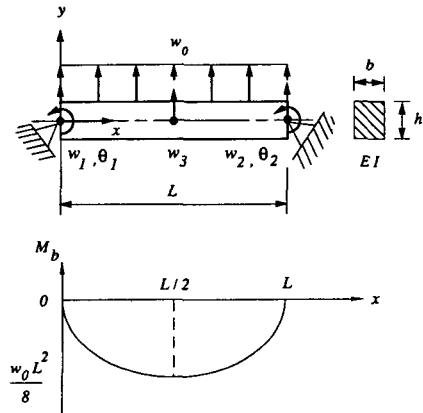


Fig. 8 A simply supported beam under the uniformly distributed load and bending moment distribution

위의 유한요소 해석치들은 이론치와 동일하다. 한편, 회전각과 횡변위장 역시 이론해와 일치한다.

따라서 이상의 결과로부터, 2개의 절점으로 이루어진 직선 보요소로 유한요소해석을 수행할 경우, 일반적인 일차 선형장의 모멘트 분포를 가지는 문제에 있어서는 한 개의 요소만으로도 이론해와 동일한 결과를 나타내었다. 또한 전통적인 직선 보요소에서 발생하는 전단강성과잉현상으로 인한 해

의 손상이 전혀 나타나지 않아 전단강성과잉현상이 치료되고 있음을 알 수 있다. 또한 모멘트의 분포가 불연속 함수로 주어진 경우에도 마찬가지로 본 직선 보요소를 적절히 사용함으로써 이론해와 일치하는 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

4.2 3개의 절점을 가진 직선 보 요소의 수치에 3개의 절점을 가진 직선 보 요소는 사용된 형상함

수의 성격상 2차 함수의 형태로 주어지는 모멘트 분포를 정확하게 기술하여야 한다(부록 참조). Fig. 6, 7, 그리고 8에 주어진 문제를 3절점 요소로 해석하고 얻어진 해의 안정성과 정확도를 살펴본다. 한편, 3절점 요소의 중간 정점은 각 요소의 정중앙에 위치시켰다.

(1) 일차 선형장으로서 연속적인 모멘트 분포를 가진 경우

Fig. 6의 문제를 한 개의 3절점 보요소로 해석하여 보자. 3절점 직선 보요소로 이를 모델링할 경우 모멘트 분포는 Fig. 6에서 도시한 바와 같이 약간의 오차가 발생하게 된다. 유한요소해석으로 얻어진 절점의 변위치는 다음과 같다.

$$w_2 = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} \left[1 + 3\left(\frac{h}{L/2}\right)^2 \right] + \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \frac{L}{2} \quad (41)$$

$$\theta_2 = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \quad (42)$$

$$w_3 = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} \left[\frac{635 + 8928\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 16128\left(\frac{h}{L}\right)^4}{640\left\{1 + 12\left(\frac{h}{L}\right)^2\right\}} \right] \quad (43)$$

$$\theta_3 = \theta_2 \quad (44)$$

2번 절점의 변위치와 3번 절점의 회전각은 이론해와 일치하나 식 (43)의 3번 절점의 횡변위치는 이론해와 약간의 오차를 보이고 있다. 이는 두 개의 직선으로 이루어진 모멘트 분포를 한개의 이차 함수로 표현하는데에서 연유한 오차이다. 그러나, 만일 단면의 두께 대 길이의 비가 영으로 수렴할 경우 Euler보의 이론해와는 0.8%의 작은 오차를 나타내어 전단강성과잉이 전혀 나타나지 않음을 확인할 수 있다. 또한 두꺼운 보의 예로서 단면두께 대 길이의 비가 1 : 4인 경우를 고려해 보면 약 8%의 오차만을 나타내고 있다. 한편 2개의 3절점 보요소로 이 문제를 해석할 경우 이론해와 동일한 결과가 얻어진다.

(2) 고정단 경계조건과 이차 함수의 모멘트 분포를 가진 경우

Fig. 7은 전체 보에 걸쳐 횡방향의 균일분포하중이 걸려 있는데 전형적인 2차 함수형태의 모멘트의 분포를 보이고 있다. 3절점 보요소로 이를 해석하게 되면 2절점 보요소가 일반적인 선형장을 기술할 수 있듯이 일반적인 2차 함수로 주어지는 모멘트 분포를 정확하게 기술할 수 있어야 한다. 다음은

한 개의 3절점 직선 보요소로 유한요소 해석을 수행하여 얻어지는 절점의 변위치이다.

$$w_2 = \frac{w_0 L^4}{8EI} \left[1 + \frac{4}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (45)$$

$$\theta_2 = \frac{w_0 L^3}{6EI} \quad (46)$$

$$w_3 = \frac{w_0 L^4}{EI} \left[\frac{17}{384} + \frac{3}{40} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (47)$$

$$\theta_3 = \frac{7w_0 L^3}{48EI} \quad (48)$$

윗 식의 결과는 이론해와 동일하다. 또한 이를 이용하여 얻어진 전체 보에 걸친 회전각과 횡변위의 장 역시 이론해와 일치한다. 한편, 절점의 횡변위치에서 보듯이 전단에너지의 영향이 단면두께 대 길이 비의 제곱의 형태로 정확하게 표현되고 있어 전단강성과잉현상이 제거되어 있음을 확인할 수 있다.

(3) 단순지지 경계조건과 이차 함수의 모멘트 분포를 가진 경우

3절점 직선 보요소의 마지막 문제로 단순지지 경계조건의 경우를 살펴 보자. Fig. 8은 양단이 단순지지되어 있고 전체 보에 걸쳐 2차 함수의 모멘트 분포를 가지는 문제이다. 고정단 경계조건의 경우와 마찬가지로 경계조건을 고려하여 유한요소해석을 수행하면, 각 절점에서의 변위치를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$w_3 = \frac{w_0 L^4}{EI} \left[\frac{5}{384} + \frac{1}{40} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (49)$$

$$\theta_1 = -\theta_2 = \frac{w_0 L^3}{24EI} \quad (50)$$

$$\theta_3 = 0 \quad (51)$$

이론해와 이들 유한요소해석치는 동일하다. 또한 전체 보에 걸쳐 구할 수 있는 변위장 역시 이론해와 동일하다. 한편, 전단강성과잉현상이 완전히 제거됨으로 해서 단면두께 대 길이의 비가 영으로 수렴할 경우 Euler보의 해에 일치하게 되어 해의 안정성 역시 보장되고 있다.

이상의 결과로부터 3절점으로 이루어진 직선 보 요소는 2차함수로 표현되는 모멘트의 분포 문제를 정확하게 기술하고 있으며 문제가 되어 온 전단강성과잉현상이 완전히 제거되어 있다. 또한, 한 개의 3절점 직선 보요소 만으로도 2차 함수의 모멘트 분포를 가지는 문제의 경우 이론해와 동일한 결과를 나타내고 있다.

5. 결 론

전통적인 구조요소의 하나로서 직선 보에 나타나는 전단강성과잉현상을 해결하기 위하여 본 논문에서는 먼저 직선 보를 기술하는 각 변수들을 평형방정식과 함께 고려함으로써 새로운 수정 횡변위장의 개념을 도입하였다. 또한 회전각과 수정횡변위장 사이의 관계식을 고려하여 Hermite 보간함수를 수정횡변위장을 보간하는데 사용하였으며 이를 이용한 새로운 직선 보 요소를 정식화 할 수 있었다.

또한 2절점 및 3절점 요소를 사용하여 강성과잉이 전형적으로 일어나는 문제를 해석하고 이론해와 이를 서로 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 평형방정식을 고려하여 얻어진 수정횡변위장으로 보의 거동을 기술할 경우 Timoshenko보는 Euler보의 거동과 동일하게 표현될 수 있다.

(2) 2절점 요소는 모멘트의 분포가 일반적인 선형장으로 주어지는 문제를, 3절점 요소는 2차함수 형태로 주어지는 문제를 해석하였을 때 이론해와 동일한 해석 결과를 나타내었다.

(3) 전통적인 직선 보 요소에서는 강성과잉현상이 단면두께 대 길이의 비의 제곱형태로 나타나는데 수정횡변위장에 기초한 보 요소는 그 두께가 얇은 영역에서부터 두꺼운 영역에 이르기까지 보의 거동을 정확하게 기술하였다.

(4) 수정횡변위장을 이용하여 본 논문에서 제안된 요소는 개선된 Hermite 직선 보요소로 파악될 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 목적기초연구(90-02-00-01)와 국방과학연구소 장기기초연구(90-5-007)의 일환으로 수행되었으며, 관계자 여러분께 심심한 감사사를 표한다.

참고문헌

(1) Bathe, K.-J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- (2) Zienkiewicz, O.C., 1977, "The Finite Element Methods," 3rd Edn., McGraw-Hill, London.
- (3) Cook, R. D., 1981, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," 2nd Edn., Wiley, New York.
- (4) Saleeb, A. F., Chang, T. Y. and Yingyeungong, S., 1988, "A Mixed Formulation of C^0 -Linear Triangular Plate/Shell Element-The Role of Edge Shear Constraints," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 26, pp. 1101~1128.
- (5) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M., 1971, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 3, pp.275~290.
- (6) Pawsey, S. F. and Clough, R. W., 1971, "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 3, pp.575~586.
- (7) Pugh, E. D. L., Hinton E. and Zienkiewicz, O. C., 1978, "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 12, pp. 1059~1079.
- (8) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for curved Elements," J. Appl. Mech., Vol. 49, pp. 172~178.
- (9) Prathap, G. and Bhashyam, G. R., 1982, "Reduced Integration and the Shear-flexible Beam Element," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 18, pp. 195~210.
- (10) Huang, H. C. and Hinton, E., 1986. "A New Nine Node Degenerated Shell Element with Enhanced Membrane and Shear Interpolation," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 22, pp.73~92.
- (11) Prathap, G., 1985, "The Curved Beam/Deep Arch/Finite Ring Element Re-visited," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol.21, pp.389~407.
- (12) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986. "A Field Consistent Three-Noded Quadratic Curved Axisymmetric Shell Element," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 23, pp.711~723.
- (13) Babu, C. R. and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element," Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 23, pp. 1313~1328.

- (14) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (15) Huang, H. C., 1987, "Implementation of Assumed Strain Degenerated Shell Elements," *Comp. Struct.*, Vol. 25, pp. 147~155.
- (16) Jang, J. and Pinsky, P. M., 1987, "An Assumed Covariant Strain Based 9-Node Shell Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 24, pp. 2389~2411.
- (17) Jang, J. and Pinsky, P. M., 1988, "Convergence of Curved Shell Elements Based on Assumed Covariant Strain Interpolations," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 26, pp. 329~347.
- (18) Batoz, J. L., Bathe, K.-J. and Ho, L. W., 1980, "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp.1771~1812.
- (19) Batoz, J. L., 1982, "An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate-bending Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 18, pp. 1077~1089.
- (20) Kui, L. X., Liu, G. Q. and Zienkiewicz, O. C., 1985, "A Generalized Displacement Method for the Finite Element Analysis of thin Shells," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp.2145~2155.
- (21) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1983, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 41, pp. 279~296.
- (22) Bathe, K.-J. and Dvorkin, E. N., 1985, "A Four-node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.21, pp. 367~383.
- (23) Bathe, K.-J. and Dvorkin, E. N., 1986, "A Formulation of General Shell Elements-The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 22, pp. 697~722.
- (24) Belytschko, T., Stolarski, H. and Liu, W. K., 1985, "Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 51, pp. 221~258.
- (25) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.
- (26) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1988, "Resolving Membrane and Shear Locking Phenomena in Curved Shear-deformable Axisymmetric Shell Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 1071~1086.
- (27) Bergan, P. G. and Wang, X., 1984, "Quadrilateral Plate Bending Elements with Shear Deformations," *Comp. Struct.*, Vol. 19, pp. 25~34.
- (28) Dow, J. O. and Byrd, D. E., 1988, "The Identification and Elimination of Artificial Stiffening Errors in Finite Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 743~762.
- (29) Tessler, A., 1985, "A Priori Identification of Shear Locking and Stiffening in Triangular Mindlin Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 53, pp. 183~200.
- (30) Prathap, G., 1985, "An Additional Stiffness Parameter Measure of Error of the Second Kind in the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp. 1001~1012.
- (31) 이팔갑, 1992, "강성과잉 현상이 없는 곡률 보 및 평판 요소," 서울대학교 공학박사학위 논문.
- (32) Lee, P.-G. and Sin, H.-C., 1992, "Locking-free Straight Beam Element Based on Curvature," submitted for publication to *Int. J. Numer. Meth. Eng.*

부 록

Fig. A.1의 2절점 요소에 있어서 절점의 변위벡터는 다음과 같다.

$$U = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2]^T \quad (A1)$$

수정횡변위장의 보간행렬은 Hermite다항식 함수를 사용할 때 다음과 같이 표현된다.

$$H_w = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4] \quad (A2)$$

여기서
$$h_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (A3)$$

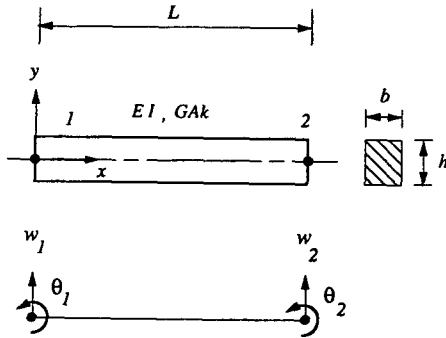


Fig.A.1 A 2-node straight beam element

또한 이 때의 변환행렬은 식(24)로부터 얻을 수 있다.

$$T = \frac{1}{1 + \frac{12\alpha}{L^2}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{6\alpha}{L^2} & -\frac{4\alpha}{L}(1 + \frac{3\alpha}{L^2}) & \frac{6\alpha}{L^2} & -\frac{2\alpha}{L}(1 - \frac{6\alpha}{L^2}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6\alpha}{L^2} & \frac{2\alpha}{L}(1 - \frac{6\alpha}{L^2}) & 1 + \frac{6\alpha}{L^2} & \frac{4\alpha}{L}(1 + \frac{3\alpha}{L^2}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A7)$$

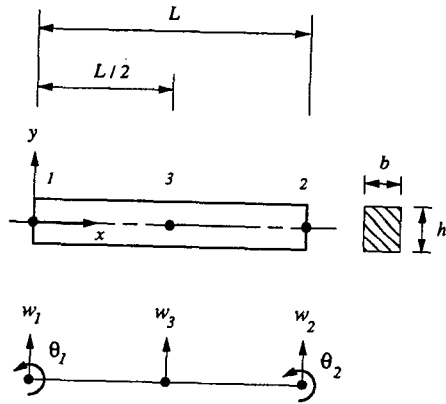


Fig.A.2 A 3-node straight beam element with the nodal variables ensuring a nonsingular transformation matrix

다음으로 Fig. A.2와 같은 3절점 요소에 대해 변환행렬을 고려하여 보자. 먼저 요소 양단의 절점치로서 횡변위와 회전각을 취한다. 이는 인접 요소와의 연속성을 보장하기 위해서이다. 한편 중간 절점에서는 횡변위를 절점치로 취한다. 회전각을 중간 절점의 절점치로 취하면 변환행렬이 구해지지 않는다. 따라서 절점의 변위 벡터는 다음과 같다.

$$U = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ w_3]^T \quad (A8)$$

수정횡변위장에 대한 보간행렬은

$$H_w = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4 \ h_5] \quad (A9)$$

$$\text{여기서 } h_1 = 1 - 11\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 18\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 8\left(\frac{x}{L}\right)^4 \quad (A10)$$

$$h_2 = L\left\{\left(\frac{x}{L}\right) - 4\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^4\right\} \quad (A11)$$

$$h_3 = -5\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 14\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 8\left(\frac{x}{L}\right)^4 \quad (A12)$$

$$h_4 = L\left\{\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^4\right\} \quad (A13)$$

$$h_5 = 16\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 32\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 16\left(\frac{x}{L}\right)^4 \quad (A14)$$

이상의 관계식을 이용하면 3 절점 요소에 대한 변환행렬을 최종적으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T = \frac{1}{1 + \frac{60\alpha}{L^2} + \frac{576\alpha^2}{L^4}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{38\alpha}{L^2} + \frac{96\alpha^2}{L^4} & -\frac{4\alpha}{L}\left(2 + \frac{63\alpha}{L^2} + \frac{144\alpha^2}{L^4}\right) \\ 0 & 1 \\ -\frac{10\alpha}{L^2} + \frac{96\alpha^2}{L^4} & -\frac{2\alpha}{L}\left(1 - \frac{18\alpha}{L^2} + \frac{288\alpha^2}{L^4}\right) \\ 0 & 0 \\ \frac{8\alpha}{L^2} + \frac{96\alpha^2}{L^4} & \frac{\alpha}{L} - \frac{36\alpha^2}{L^3} - \frac{576\alpha^3}{L^5} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 -\frac{10\alpha}{L^2} + \frac{96\alpha^2}{L^4} \quad \frac{2\alpha}{L} \left(1 - \frac{18\alpha}{L^2} + \frac{288\alpha^2}{L^4} \right) \quad \frac{32\alpha}{L^2} + \frac{384\alpha^2}{L^4} \\
 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \\
 1 + \frac{38\alpha}{L^2} + \frac{96\alpha^2}{L^4} \quad \frac{4\alpha}{L} \left(2 + \frac{63\alpha}{L^2} + \frac{144\alpha^2}{L^4} \right) \quad \frac{32\alpha}{L^2} + \frac{384\alpha^2}{L^4} \\
 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 0 \\
 \frac{8\alpha}{L^2} + \frac{96\alpha^2}{L^4} \quad -\left(\frac{\alpha}{L} - \frac{36\alpha^2}{L^3} - \frac{576\alpha^3}{L^5} \right) \quad 1 + \frac{144\alpha}{L^2} + \frac{384\alpha^2}{L^4}
 \end{array} \right\} \quad (A15)$$