

〈論 文〉

# 유한요소법을 이용한 정상상태의 소성가공 공정의 최적설계- I 이론적 고찰

전만수\* · 황상무\*\*  
(1991년 6월 24일 접수)

## Process Optimal Design in Steady-State Metal Forming by Finite Element Method- I Theoretical Considerations

M. S. Joun and S. M. Hwang

**Key Words :** Steady-State Metal Forming Process(정상 상태의 소성가공 공정), Optimal Design(최적설계), Penalty Rigid-Plastic Finite element Method(벌칙 강소성유한요소법), Design Sensitivity(설계민감도), Adjoint Variable Method(수반변수법), Finite Difference Scheme(유한차분법), Gradient Projection Method(구배투영법)

### Abstract

A new approach to process optimal design in steady-state metal forming is presented. In the approach, process optimal design problems are mathematically formulated and solved using a penalty rigid-viscoplastic finite element method as a tool for carrying out necessary calculations for optimization. The basic formulation is presented and the solution procedure is described with the emphasis on the method of calculating the design sensitivities. The accuracy of the design sensitivities thus obtained is assessed by a series of numerical tests. An iterative scheme for optimizing the design variables based on the predicted design sensitivities is also given.

### 기 호 설 명

<p><math>c, m</math> : 재료상수 <math>\bar{\sigma} = c\dot{\epsilon}^m</math></p> <p><math>d</math> : 설계변수 벡터</p> <p><math>f_i</math> : 체적력</p> <p><math>k</math> : 전단항복응력</p> <p><math>l^i</math> : <math>\Psi_i</math>에 대한 설계민감도 벡터</p> <p><math>l_j^i</math> : <math>l^i</math>의 <math>j</math>번째 성분</p> <p><math>m'</math> : 일정전단 마찰상수</p> <p><math>n_i</math> : 공작물과 금형의 접촉면에서의 공작물의 단위 법선벡터</p>	<p><math>p</math> : 정수압</p> <p><math>s</math> : 상태변수 벡터</p> <p><math>T</math> : 온도</p> <p><math>\bar{u}_i</math> : 속도경계상에서의 주어진 속도</p> <p><math>u_i</math> : 속도 벡터</p> <p><math>x</math> : 공작물의 위치벡터</p> <p><math>\delta_{ij}</math> : Kronecker delta</p> <p><math>\bar{\epsilon}</math> : 유효변형률</p> <p><math>\bar{\epsilon}</math> : 유효변형률속도</p> <p><math>\dot{\epsilon}_{ij}</math> : 변형률속도 텐서</p> <p><math>\dot{\epsilon}'_{ij}</math> : 편차변형률속도 텐서</p> <p><math>\mu</math> : Coulomb 마찰계수</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

\*정회원, 포항공과대학 기계공학과 대학원생  
\*\*정회원, 포항공과대학 기계공학과

- $\sigma_{ij}$  : 응력 텐서  
 $\sigma'_{ij}$  : 편차응력 텐서  
 $\Delta d$  : 유한차분법에서의 차분구간 벡터  
 $\Delta d_i$  :  $\Delta d$ 의  $i$ 번째 성분,  $d_i$ 에 해당하는 차분구간  
 $\Delta \bar{d}_i$  : 직접방법에서  $d_i$ 에 해당하는 미소변화량  
 $\Psi_0$  : 목적함수  
 $\Psi, \bar{\Psi}, h$  : 벡터함수,  $i$  번째의 성분은 각각  $\Psi_i, \bar{\Psi}_i$ , and  $h_i$ 이다.  
 $\Gamma_{cm}$  : 금형-공작물의 접촉면  
 $\Gamma_{c_f}$  : 펀치-공작물의 접촉면  
 $\Gamma_{h_i}$  :  $i$ 방향에 대하여 표면응력(traction)이 주어진 경계  
 $\Gamma_{u_i}$  :  $i$ 방향으로의 속도가 주어진 경계  
 $\|\cdot\|$  : norm

## 1. 서 론

소성가공 공정의 설계시, 설계목적에 최적합한 금형의 형상, 공정변수, 압하계획(pass schedule) 등의 설계 문제에 직면하게 된다. 설계목적은 상황에 따라 다를 수 있으나, 일반적으로 제품의 품질 향상과 생산원가의 절감 등이 설계자의 주요 관심사라 할 수 있다. 소성가공 공정의 해석을 위하여 널리 활용되고 있는 유한요소해석의 주요 목적도 공정설계 및 제어에 필요한 정보를 제공하자는 것이다.

이중홍과 Kobayashi<sup>(1)</sup>에 의하여 개발된 강소성 유한요소법은 압연, 단조, 압출, 인발, 판재성형, 다공질 재료의 가공 공정 등을 비롯한 광범위한 소성가공 공정의 해석을 위하여 성공적으로 이용되고 있다<sup>(2-9)</sup>. 최근에는, 금형과 공작물의 접촉응력을 직접 계산하기 위하여 접촉면에서의 법선방향의 기하경계조건을 벌칙방법(penalty scheme)으로 처리한 강소성유한요소법(이하 벌칙 강소성유한요소법이라 칭함)이 개발되어 금형 및 공구에 작용하는 접촉응력의 정확도를 향상시켰다<sup>(10)</sup>. 유한요소해석법의 장점은 주어진 설계변수하에서 공작물의 소성 유동 현상과 금형에 작용하는 응력을 예측할 수 있는 점에 있다. 그 결과, 여러가지의 설계변수의 조합에 대한 시뮬레이션을 실시하므로써 공정설계에 소요되는 경제적, 시간적인 손실이 뒤따르는 수많은 모형의 설계 및 제작을 획기적으로 감소시킬 수 있게 되었다.

공정설계에 있어서 해석 기술은 값진 것임에 틀림없지만, 시뮬레이션만으로 최적설계를 찾는다는 것은 용이하지 않다. 설계기술이 접목되지 않으면, 시행 오차적인 접근방법이 불가피하기 때문이다. 예비형상(preform)의 설계 분야에서는 종래의 접근 방법에서 벗어난 새로운 방법이 개발되어 활용되고 있다<sup>(11-15)</sup>. 이 방법은 유한요소법을 이용하여 소성변형 과정을 역으로 추적해 가는 역추적(backward tracing)의 개념에 바탕을 두고 있다. 이 방법에서는 역추적의 시작을 가공공정의 최종단계로 하기 때문에, 시행오차를 거치지 않고 원하는 최종단계의 제품을 내놓게 하는 최적 예비형상을 예측할 수 있다. 역추적 기법은 셸노오징(shell nosing)<sup>(11-12)</sup>, 이차원 압연<sup>(13)</sup>, 디스크 단조<sup>(14)</sup>, 그리고 최근에는 airfoil section blade forging<sup>(15)</sup> 등의 예비형상 설계에 적용되었다. 역추적 기법은 최적의 가공경로(load pass)가 주어진 경우에 매우 유용한 기법이다. 그러나 일반적인 문제에서는 이러한 경로가 알려지지 않기 때문에 역추적 기법의 적용범위는 최적 가공경로가 명확하거나 역추적 과정에서 예측 가능한 특별한 문제에 한정되어 있다.

본 논문에서는 소성가공 공정의 최적설계를 위한 새로운 접근 방법이 소개된다. 이 방법은 소성가공 공정의 유한요소해석 기술과 기계시스템의 최적설계 기술에 바탕을 두고 있다. 벌칙 강소성유한요소법, 정상 상태의 소성가공 공정(steady-state metal forming process)을 위한 최적설계 문제의 수식화, 설계민감도의 해석 방법, 설계민감도의 정확성에 관한 고찰, 구배투영법(gradient projection method) 등이 본 논문에서 상세하게 소개된다.

## 2. 접촉응력의 직접 계산을 위한 벌칙 강소성유한요소법

소성변형(가공)을 받고 있는 공작물을 고려해 본다. 이 공작물은 내부  $\Omega$ 와 경계  $\Gamma$ 로 이루어져 있다. 경계  $\Gamma$ 는 표면응력(traction)  $h_i$ 가 주어진  $\Gamma_{h_i}$ 와 속도  $u_i = \bar{u}_i$ 가 주어진  $\Gamma_{u_i}$ , 그리고 금형과 공작물이 접하고 있는  $\Gamma_c$ 로 이루어져 있다. 이 공작물은 비압축성 및 강소성의 성질을 지니고 있고, von Mises 항복조건을 따른다고 가정한다. 그리고 금형과 공작물의 접촉면상에서는 Coulomb 마찰 또는 일정전단응력마찰의 법칙을 따른다고 가정한다.

다.

위에서 기술한 소성가공 문제는 속도장  $u_i$ 와 정수압  $p$ 를 구하기 위한 다음의 경계치 문제로 수식화된다.

(1) 평형방정식 :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1)$$

(2) 변형률속도-응력 관계식(구성방정식) :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (2)$$

$$\sigma'_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\varepsilon} \dot{\varepsilon}'_{ij} \quad (3)$$

여기서 유동응력  $\bar{\sigma}$ 는 열간가공일 경우 다음식으로 표현될 수 있다.

$$\bar{\sigma} = c(\bar{\varepsilon}, T) \bar{\varepsilon}^{m(\varepsilon, T)} \quad (4)$$

(3) 비압축성 조건식 :

$$u_{i,i} = 0 \quad (5)$$

(4) 경계조건 :

$$\sigma_{ij} n_j = h_i \quad \text{on } \Gamma_{h_i} \quad (6)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_{u_i} \quad (7)$$

$$\sigma_n = -\zeta(u_n - \bar{u}_n) \quad \text{on } \Gamma_c \quad (8)$$

$$\sigma_t = -\mu\sigma_n g(u_t) \quad \text{on } \Gamma_c \text{ (Coulomb 마찰일 경우)} \quad (9)$$

$$\sigma_t = m'k g(u_t) \quad \text{on } \Gamma_c \text{ (일정전단마찰일 경우)} \quad (10)$$

식 (8)에서  $\zeta$ 는  $\bar{u}_n$ 의 절대값보다 매우 큰 값이다. 따라서 식(8)은 접촉면  $\Gamma_c$ 에서의 압력이 비정상적으로 크지 않는 한, 공작물이 금형으로부터 분리되거나 금형에 침투되지 않게 한다. 평형상태에 도달하면 접촉면에서의 법선응력은 유한한 크기의 값을 가지게 됨은 명백하므로 공작물과 금형 또는 공구의 법선속도의 차이는 매우 적게 된다. 따라서 식 (8)은 법선응력을 구할 수 있게 할 뿐만 아니라 접촉면에서의 법선방향의 경계조건을 만족시키게 한다. 위의 알고리즘, 즉 벌칙방법(penalty scheme)은 금형과 공작물의 접촉면이 댐핑계수가  $\zeta$ 인, 접촉면을 따라 균일하게 분포되어 있는, 일종의 감쇠기(damper)에 의해 연결되어 있는 것으로 간주할 수 있다.  $\zeta$ 가 무한대가 되면, 실제의 경계조건  $u_n = \bar{u}_n$ 을 낳게 된다. 그리고  $g(u_t)$ 는, 식 (9)가 스티킹과 미끄럼 마찰을 동시에 취급할 수 있게 하기 위하여, Chen과 Kobayashi<sup>(5)</sup>가 사용한 다음의 함수를 사용한다.

$$g(u_t) = -\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{(z_t - \bar{u}_t)}{u_t a} \quad (11)$$

여기서  $a$ 는  $\bar{u}_t$  보다 자리수가 몇 개 낮은 작은 값을 가지는 양의 상수이다.

위에서 기술한 경계치 문제의 해(속도장  $u_i$ 와 정수압  $p$ )는 경계  $\Gamma_{u_i}$ 상에서 속도경계조건을 만족해야 하고, 임의의 함수  $q$ 와 경계  $\Gamma_{u_i}$ 상에서 영인 임의의 함수  $\omega_i$ 에 대하여, 다음의 식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \omega'_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} p \omega_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \omega_i d\Omega \\ & - \int_{\Omega} u_{i,i} q d\Omega - \sum_i \int_{\Gamma_{n_i}} h_i \omega_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_c} -\zeta(u_n - \bar{u}_n) \omega_n d\Gamma \quad (12) \\ & - \int_{\Gamma_c} \mu \zeta(u_n - \bar{u}_n) g(u_t) \omega_t d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

여기서  $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_{i,j} + \omega_{j,i})$  이고,  $\omega'_{ij} = \omega_{ij} - \frac{\omega_{kk}}{3} \delta_{ij}$  이다.

$u_i, p, x_i, \omega_i, q$ 를 적절한 보간함수(Interpolation function)  $N_{iL}$ 와  $H_M$ 으로 각각 유한요소 근사화를 실시하면, 다음과 같다.

$$x_i = N_{iL} X_L \quad (13)$$

$$u_i = N_{iL} V_L \quad (14)$$

$$p = H_M P_M \quad (15)$$

$$\omega_i = N_{iL} W_L \quad (16)$$

$$q = H_M Q_M \quad (17)$$

여기서  $X_L, V_L, P_M, W_L, Q_M$ 은 절점치(nodal value) 또는 요소치(element value)이며,  $W_L$ 와  $Q_M$ 은 임의의 값이다. 단, 경계  $\Gamma_{u_i}$ 상에서  $V_L$ 은 주어진 값이고  $W_L$ 은 영이다.

식 (13)~(17)을 식 (12)에 대입하여, 임의의 상수인  $W_L$ 와  $Q_M$ 에 대하여 성립한다는 조건으로부터 다음과 같은 비선형대수연립방정식을 얻게 된다.

$$h(V, P, X, C) = 0 \quad (18)$$

여기서  $V, P, X$ 는 각각  $V_L, P_M, X_L$ 를 성분으로 하는 벡터이고, 벡터  $C$ 는 금형의 구동속도, 마찰조건 등을 포함한 공정변수들을 나타내고 있다.

따라서 소성가공 공정의 유한요소해석은 주어진 형상  $X$ 와 공정조건  $C$ 에 대하여 식 (18)로부터  $V_L$ 와  $P_M$ 를 직접 반복방법(direct iteration scheme) 또는 Newton-Raphson 방법에 의하여 구하는 것이다.

### 3. 정상상태의 소성가공 공정 최적설계 문제의 수식화

대부분의 기계설계에 있어서 설계하고자 하는 시스템은 자연법칙의 지배를 받는다. 이러한 기계시스템의 거동은 상태변수라고 하는 변수들에 의하여 해석적으로 표현이 된다. 또한, 시스템을 결정짓는 변수들이 있는데 이 변수들은 설계자들에 의하여 결정되어진다. 이러한 변수들을 설계변수라고 칭한다.

강소성유한요소법을 이용하여 정상상태의 소성가공 공정을 최적설계하고자 할 경우, 상태변수와 설계변수는 다음과 같다.

설계변수,  $d$ : 금형의 형상 및 압하계획  $X$ ,  
공정변수  $C$

상태변수,  $s$ : 절점속도벡터  $V$ , 요소압력벡터  $P$ .

일반적으로 최적설계는 주어진 구속조건하에서 목적함수를 최소화시키는 설계변수를 찾으므로써 얻어진다. 소성가공 공정의 설계에 있어서 목적함수는 가공하중, 소요 에너지, 변형의 비균일성, 금형응력 등의 조합으로 표현할 수 있다. 구속조건으로 가공기계의 용량한계, 품질 및 생산원가 등에 대한 제약 등이 있을 수 있다. 이러한 설계의 목적과 구속조건들은 상태변수와 설계변수로 표현된다. 상태변수는 설계변수가 결정이 되면, 지배방정식인 식 (18)로부터 구해지는 종속변수이다.

위에서 설명한 최적공정설계 문제를 수식화하면 다음과 같다.

Find  $d$  that minimizes  $\Psi_0(s, d)$   
subject to constraints

$$\Psi(s, d) = \begin{cases} \Psi_i(s, d) = 0, & i=1, \dots, p \\ \Psi_i(s, d) \leq 0, & i=p+1, \dots, q \end{cases} \quad (19)$$

(20)

and the finite element equations

$$h(s, d) = 0 \quad (21)$$

여기서 식 (19)와 식 (20)은 각각 등식구속조건식과 부등식구속조건식을 나타내고 있다.

### 4. 설계민감도 해석

모든 축차적인 최적화 기법은 목적함수와 구속조건함수에 대한 설계민감도를 필요로 한다. 설계민

감도는 목적함수 및 구속조건함수를 설계변수로 전미분(total derivative)한 결과를 의미한다. 설계민감도를 구하기 위하여  $\Psi_i(s, d)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, q$ 의 일차변분(first variation) 또는 선형근사치(linear approximation)  $\delta\Psi_i$ 를 고려한다.  $(s^*, d^*)$ 에서  $\Psi_i(s, d)$ 의 일차변분  $\delta\Psi_i$ 는

$$\delta\Psi_i[s^*, d^*] = \frac{\partial\Psi_i}{\partial s}[s^*, d^*]\delta s + \frac{\partial\Psi_i}{\partial d}[s^*, d^*]\delta d \quad (22)$$

이다. 여기서  $d^*$ 는 설계진행 과정중의 현재 시점에서의 설계변수들의 값을 의미하고,  $s^*$ 는  $d^*$ 에 사용하는 상태변수의 값을 의미한다. 그리고 괄호가 뒤따르는 함수는 괄호속의 변수값으로 계산한 함수값을 의미한다.

함수  $\Psi_i(s, d)$ 에 대한 설계민감도를 구하기 위해서는 식 (22)에서  $\delta s$ 를 소거해야 한다. 이를 위하여 식 (21)을  $(s^*, d^*)$ 에서 일차변분을 취하면 다음과 같다.

$$J\delta s + \frac{\partial h}{\partial d}\delta d = 0 \quad (23)$$

여기서 자코비안 행렬(Jacobian matrix)  $J = \frac{\partial h}{\partial s}[s^*, d^*]$ 는 유한요소해석시에 Newton-Raphson 방법으로 사용할 경우 강성행렬과 동일하다. 한편,  $h(s^*, d^*) = 0$ 이고  $\delta s$ 와  $\delta d$ 는 조건식  $h(s^* + \delta s, d^* + \delta d) = 0$ 을 만족해야 하므로, 식 (23)은 이 조건식의 선형근사식이라는 물리적 의미를 지니고 있다. 식 (23)으로부터

$$\delta s = -J^{-1} \frac{\partial h}{\partial d} \delta d \quad (24)$$

이고, 식 (24)를 식 (22)에 대입하여 모든 항을  $\delta d$  만으로 표현을 하면 다음식을 얻게 된다.

$$\delta\Psi_i = \left[ \frac{\partial\Psi_i}{\partial s} J^{-1} \frac{\partial h}{\partial d} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial d} \right] \delta d \quad (25)$$

식 (25)에서  $J$ 의 역행렬의 계산을 회피하기 위하여, 수반변수(adjoint variable) 벡터<sup>(16)</sup>라고 불리는  $\lambda^i, i=0, 1, \dots, q$ 를 다음의 수반방정식(adjoint equations)의 해로 정의하고,

$$J^T \lambda^i = \frac{\partial\Psi_i^T}{\partial s} \quad (26)$$

이 식을 식 (25)에 대입하면, 다음과 같이 된다.

$$\delta\Psi_i = l^{iT} \delta d \quad (27)$$

여기서  $l^i, i=0, 1, 2, \dots, q$ 는 설계민감도 벡터이고, 다음의 식을 ( $s^*, d^*$ )에서 계산하므로써 구해진다.

$$l^i = \frac{\partial \Psi_i^T}{\partial d} - \frac{\partial h^T}{\partial d} \lambda^i \quad (28)$$

일반적으로 공정설계를 비롯한 형상최적설계 문제에 있어서 함수  $\Psi_0, \Psi, h$ 를 해석적인 방법으로 형상설계변수에 대하여 미분하는 것은 함수의 복잡성으로 인하여 용이하지 않다. 따라서 본 논문에서는 소성가공 공정의 최적설계를 위하여 전방, 후방, 중앙 유한차분법(forward, backward, central finite difference schemes)의 사용을 제안하는데, 이 방법들에서 행렬  $\frac{\partial f}{\partial d}$  즉, 임의의 함수  $f(s, d)$ 의 설계변수  $d$ 에 대한 편미분은 각각 다음의 식에 의하여 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial d_j} &= \frac{f_i(s^*, d^* + \Delta d_j e^j) - f_i(s^*, d^*)}{\Delta d_j} \\ \frac{\partial f_i}{\partial d_j} &= \frac{f_i(s^*, d^* - \Delta d_j e^j) - f_i(s^*, d^*)}{-\Delta d_j} \\ \frac{\partial f_i}{\partial d_j} &= \frac{f_i(s^*, d^* + \Delta d_j e^j) - f_i(s^*, d^* - \Delta d_j e^j)}{2\Delta d_j} \end{aligned} \quad (29)$$

여기서  $e^j$ 는  $j$ 번째 성분이 1이고 나머지 성분은 모두 0인 단위벡터이다. 또한, 차분구간(step size)  $\Delta d_j$ ( $\Delta d$ 의  $j$ 번째 성분)은  $d_j$ 의 미소변화량(small perturbation)이다. 이 방법의 장점은 일반성과 간단함에 있고, 단점은 설계민감도의 정확도가 차분구간 벡터  $\Delta d$ 에 큰 영향을 받는다는 점이다. 부적

절한 차분구간은 끝처리오차(round-off error)와 함수들의 비선형성에 기인하는 수치계산상의 문제점을 야기하고, 부정확한 설계민감도를 예측하게 된다.

### 5. 설계민감도의 정확성에 대한 고찰

#### 5.1 공정의 선정 및 함수의 설정

설계민감도의 정확도를 조사하기 위하여 축대칭 압출공정(이하 압출공정)을 선택하였다. 컨테이너(container)와 공작물간의 마찰을 무시할 경우, 압출공정에서의 공정설계 문제는 압연 등을 비롯한 정상상태의 가공공정을 대표한다고 볼 수 있는 반면, 컴퓨터의 계산 시간이 비교적 적게 소요되는 장점이 있다. 압출공정의 개념도는 Fig.1에서 보는 바와 같다.

한편, 편치에 작용하는 하중함수에 대한 설계민감도를 조사의 대상으로 삼았다. 가공하중은 상태변수와 설계변수로 표현되므로, 목적함수와 구속함수를 대표한다고 볼 수 있다. 하중함수는 최소에너지이론(minimum energy criterion)에 바탕을 둔 금형의 최적설계시에는 목적함수가 되고, 최적 압하설계시에는 구속함수가 될 수 있다. 벌칙 강소성 유한요소법을 해석의 도구로 사용할 경우, 가공하중함수  $\Psi_0$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi_0 = \int_0^{r_i} 2\pi \zeta (u_n - \bar{u}_n) r \, dr \text{ on } \Gamma_c, \quad (30)$$

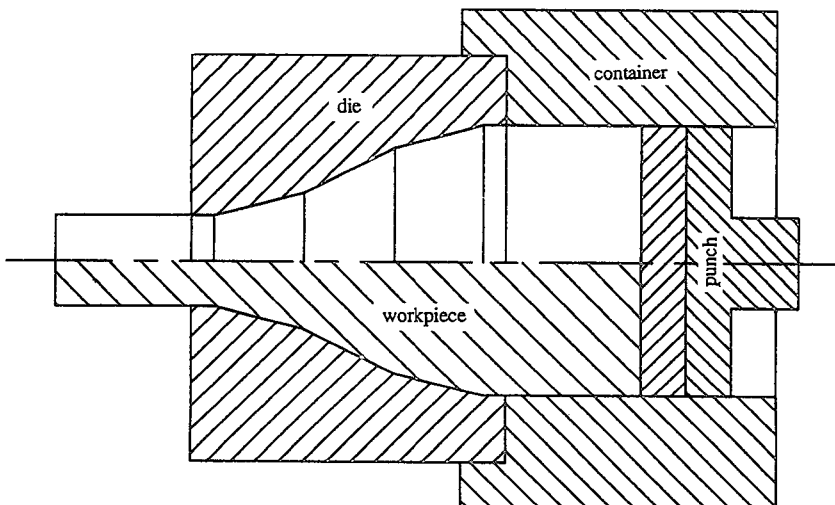
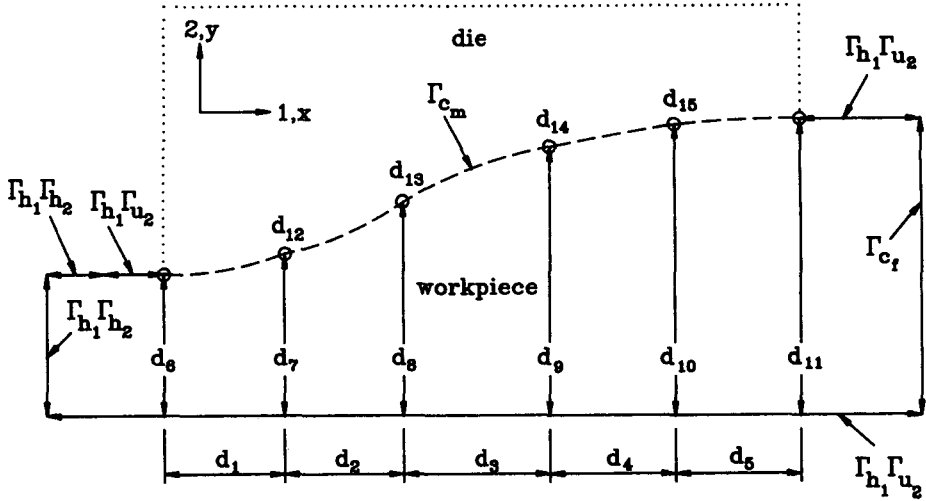


Fig. 1 Schematic diagram of extrusion with multi stepped conical die



1. ○ : data point
2.  $d_{1,12,13,14,15}$  : gradients at the data points for design model 2
3. — — — : straight line in design model 1  
 Hermite polynomial in design model 2  
 cubic spline in design model 3

Fig. 2 Design models and design variables selected for the present investigation

여기서  $r_i$ 는 공작물의 초기반경을 나타내고  $\bar{u}_n$ 은 펀치의 속도를 의미한다. 압하계획 설계 문제의 경우  $r_i$ 는 설계변수의 일부가 될 수 있다.

본 연구에서는 Fig. 2에 정의되어 있는 바와 같이 형상설계변수에 대한 설계민감도의 정확도만을 고려하였다. 펀치의 속도나 마찰 등과 같은 비형상 설계변수에 대한 설계민감도의 정도는 논의할 필요가 없을 정도로 높기 때문이다. 이는 이러한 설계변수들의 변화가 해석 및 설계영역의 변화를 초래하지 않는 데에 기인한다.

사용된 공정조건과 재료의 성질은 다음과 같다.

- 유동응력 :  $\bar{\sigma} = 6.5949 \bar{\epsilon}^{0.1951} \text{kg/mm}^2$
- 공작물의 출력 및 입력 반경 :  $r_i = 20.0 \text{mm}$ ,  
 $r_o = 30.0 \text{mm}$
- Coulomb 마찰계수 :  $\mu = 0.1$  (금형-공작물),  
 $\mu = 0.0$  (콘테이너-공작물, 펀치-공작물)
- 펀치속도 :  $\bar{u}_n = -100 \text{mm/sec}$ .

### 5.2 설계모델

일반적으로 복잡한 금형의 형상은 소구간 복합곡선(piecewise composite curve) 또는 곡면을 이용하여 표현된다. 이러한 표현은 분점(data point)의

정보(예를들면, 분점의 좌표, 기울기)와 이에 해당하는 선 또는 면 보간 방식(curve or surface fitting scheme)에 의하여 결정된다. 이러한 정보들은, 금형의 형상을 설계하고자 할 때, 형상설계변수가 되고, 형상설계변수와 적절한 보간방식을 합하여 설계모델(design model)이라고 일컫는다. 본 연구에서는 설계모델의 변화에 따른 설계민감도를 조사하기 위하여 다음의 3가지 모델을 개발하여 사용하였다.

- (1) 소구간 선분 설계모델(piecewise line segment design model, 설계모델 1)
- (2) 소구간 1차 Hermite다항식 설계모델(piecewise first-order or cubic Hermite polynomial-design model, 설계모델 2)
- (3) 소구간 3차 스플라인 설계모델(piecewise cubic spline design model, 설계모델 3)

위의 설계모델들은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 분점들에 의해 구분된 각 구간(segment, subint interval)을 어떻게 표현하느냐에 따라 구분되는 때, 설계모델 1은 각 구간을 선분으로, 설계모델 2는 1차 Hermite 다항식으로, 설계모델 3은 3차 스플라인<sup>(17)</sup>으로 표현하고 있다. 설계모델 1, 2, 3은

Table 1 Variation of design sensitivities with the finite difference schemes and the step sizes for the three design models

i	$\Delta$	Design model 1					Design model 2					Design model 3					
		$l_i^p$	$l_i^f$	$l_i^f$	$T_i^0$	$T_i^0$	$l_i^p$	$l_i^f$	$l_i^f$	$T_i^p$	$T_i^p$	$l_i^p$	$l_i^f$	$l_i^f$	$T_i^p$	$T_i^p$	
1	$10^{-2}$	104.31	106.24	105.27	105.28		-96.82	-95.29	-96.05	-96.06		-99.58	98.00	-98.79	-98.79		
	$10^{-3}$	105.18	105.37	105.27			-96.13	-95.98	-96.06			-98.87	-98.71	-98.79			
	$10^{-4}$	105.26	105.28	105.27			-96.06	-96.05	-96.06			-98.80	-98.78	-98.79			
	$10^{-5}$	105.27	105.28	105.28			-96.06	-96.06	-96.06			-98.80	-98.80	-98.79			
	$10^{-6}$	105.18	105.34	105.26			-96.00	-96.13	-96.06			-98.73	-98.80	-98.78			
	$10^{-9}$	25.93	111.00	104.73			-91.63	-103.02	-94.53			-88.01	-101.78	-95.72			
	$10^{-9}$	25.93	157.88	78.43			-123.16	-197.84	-97.99			-107.11	-140.48	-131.51			
	$10^{-10}$	-123.16	483.57	135.94			-43.50	-95.86	-97.74			290.08	60.02	127.56			
	9	$10^{-2}$	-2715.7	-2624.9	-2670.3	-2670.4		-1815.4	-1870.3	-1870.1	-1870.1		-1985.7	-1875.7	-1930.7	-1930.5	
		$10^{-3}$	-2674.9	-2665.9	-2670.4			-1875.6	-1864.6	-1870.1			-1936.0	-1925.0	-1930.5		
$10^{-4}$		-2670.8	-2669.9	-2670.4			-1870.6	-1869.5	-1870.1			-1931.0	-1929.9	-1930.5			
$10^{-4}$		-2670.8	-2669.5	-2670.4			-1870.6	-1869.5	-1870.1			-1931.0	-1929.9	-1930.5			
$10^{-5}$		-2670.4	-2670.3	-2670.4			-1870.1	-1870.0	-1870.1			-1930.5	-1930.4	-1930.5			
$10^{-6}$		-2670.4	-2670.3	-2670.4			-1870.1	-1870.0	-1870.1			-1930.5	-1930.4	-1930.5			
$10^{-7}$		-2670.4	-2670.4	-2670.4			-1870.1	-1870.1	-1870.1			-1930.5	-1930.5	-1930.5			
$10^{-8}$		-2670	-2670.4	-2670.4			-1870.1	-1870.1	-1870.1			-1930.5	-1930.5	-1930.5			
$10^{-9}$		-2670.4	-2670.3	-2670.3			-1870.0	-1870.1	-1870.1			-1931.5	-1930.6	-1930.3			
$10^{-10}$		-2671.3	-2668.9	-2670.6			-1870.0	-1870.3	-1870.1			-1931.4	-1932.5	-1930.3			
$10^{-11}$		-2676.8	-2659.1	-2663.0			-1868.6	-1871.5	-1870.3			-1964.2	-1941.6	-1946.8			
$10^{-12}$		-2847.7	-2744.9	-2448.0			-1865.1	-1898.1	-1880.8			-2095.7	-2277.4	-2015.2			
12	$10^{-2}$						-11.49	477.95	233.23								
	$10^{-4}$						240.57	245.46	243.02								
	$10^{-6}$						242.99	243.04	243.02								
	$10^{-8}$						242.99	243.01	243.02								
	$10^{-10}$						240.29	240.82	242.43								

각각  $C^0$ ,  $C^1$ ,  $C^2$  연속성을 지니고 있다. 또한 설계 모델 1과 2는 하나의 설계변수의 변화에 따라 인접한 구간의 형상을 변화시키는 반면, 설계모델 3은 모든 구간의 설계모델의 변화를 일으킨다. 설계모델 2는 분점에서의 기울기 정보를 필요로 하며, 설계모델 2와 3에서는 금형의 입구 및 출구의 기울기를 영으로 가정하였다.

본 연구에서 설계민감도의 정도를 조사하기 위하여 사용한  $d^0$ (current design)은 다음과 같다.

· 설계모델 1, 3 :  $d^{0T} = (6.7, 5.2, 6.1, 7.0, 6.6, 20.0, 21.1, 23.0, 25.2, 28.7, 30.0)$

· 설계모델 2 :  $d^{0T} = (6.7, 5.2, 6.1, 7.0, 6.6, 20.0, 21.1, 23.0, 25.2, 28.7, 30.0, 0.316, 0.356, 0.448, 0.407)$

### 5.3 설계민감도 해석 결과의 분석

Fig. 2의 형상설계변수들은 구간의 폭, 분점의  $y$  축 좌표, 분점에서의 기울기 등으로 구분될 수 있다. 따라서 설계민감도의 정도를 다각적으로 조사하기 위하여 설계변수 1, 9, 12에 대한 하중함수  $\Psi_0$ 의 설계민감도를 구하였다. 그 결과는 Table 1에서 보는 바와 같다. 표에서  $l^p$ ,  $l^f$ ,  $l^s$ 는 각각 후방유한차분법, 전방유한차분법, 중앙유한차분법에 의하여 구한 설계민감도를 나타낸다. 또한, 유한차분법에 의한 설계민감도의 정도를 조사하기 위하여 직접방법(direct approach)을 이용한 근사설계민감도  $\tilde{l}^p$ 를 구하였는데 그 결과도 표에 나타내었다. 직접방법에서는 근사설계민감도  $\tilde{l}^i$ 를 다음 식으로부터 구한다.

$$\tilde{l}_j^i = \frac{\bar{\Psi}_i(d^0 + \Delta \bar{d}_j e^j) - \bar{\Psi}_i(d^0)}{\Delta \bar{d}_j} \quad (31)$$

여기서  $\Delta \bar{d}_j$ 는  $d_j$ 의 미소변화량을 의미하고,  $\bar{\Psi}_i(d) \equiv \Psi_i(s(d), d)$ 이다. 이 방법은 적절한  $\Delta \bar{d}_j$ 로 고정도의 설계민감도를 낳는 반면, 계산상 매우 비효율적이기 때문에 주로 다른 방법의 정확도를 조사할 목적으로 활용된다. 본 연구에서는  $\Delta \bar{d}_j/d_j = 0.00001$ 을 사용하였다.

Table 1을 조사해 보면, 비교적 넓은 범위의 차분구간에 의한 설계민감도가 신뢰할 수 있는 범위에 존재함을 알 수 있다. 그 범위는 설계변수에 따라 상당한 차이가 있다. 후방 및 전방 유한차분법에 의한 설계민감도는 차분구간이 충분히 작거나 클 경우, 수치오차와 비선형성에 기인한다고 판단

되는, 다소의 오차를 낳고 있고, 특히 적절한 범위를 벗어날 경우 설계민감도의 정도는 급격히 악화됨을 알 수 있다. 이러한 문제점은 차분구간이 비교적 큰 경우에는 중앙유한차분법에 의하여 많이 개선되었으나 차분구간이 작은 경우에는 큰 개선이 보이지 않음을 알 수 있다.

한편, 설계모델 2의 설계민감도가 설계모델 3에 비하여 다소 양호함을 표에서 알 수 있다. 이는 선형방정식을 풀어야 하는 설계모델 3에 비하여 설계모델 2가 수치적인 오차가 개입될 여지가 훨씬 적기 때문으로 판단된다. 그러나 설계모델에 따른 설계민감도의 정확도의 차이는 크지 않음을 알 수 있다.

## 6. 최적화 기법

구배투영법(gradient projection method)<sup>(16)</sup>을 바탕으로 하여, 주어진 구속조건과 유효요소식들을 만족하면서 목적함수를 최소화시키는 방법을 전개하면, 다음과 같다.

Step 1.  $i=0$ 으로 두고, 초기설계  $d^0$ 를 실시한다.

Step 2. 식(21)로부터 현재의 설계변수  $d^i$ 에 대한 상태변수  $s^i$ 를 구한다.

Step 3. 구속조건들 중에서 다음의 조건을 만족하는 위험구속조건( $\epsilon$ -active constraint)들로 구성된 벡터함수  $\bar{\Psi}$ 를 구성한다.

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ a \in A \end{bmatrix} \quad (33)$$

여기서  $A = \{a : a = 1, 2, \dots, p, \text{ and } a > p \text{ for which } \Psi_a(s^i, d^i) \geq -\epsilon\}$ 이고,  $\epsilon$ 은 양의 값을 갖는 작은 상수이다.

Step 4. 경계조건 함수  $\bar{\Psi}$ 와 목적함수  $\Psi_0$ 에 대한 식(26)을 푼다.

Step 5. 적절한 차분구간  $\Delta d$ 를 결정한다. 설계가 축차적으로 진행되는 과정에서 설계민감도의 정확도 향상을 위하여 필요하다고 판단될 경우, 이 차분구간을 바꾼다.

Step 6. 식(28)로부터 목적함수  $\Psi_0$ 와 위험구속조건 함수  $\bar{\Psi}$ 에 대한 설계민감도를 구한다. 그리고  $\bar{\Psi}$ 에 포함된 구속조건들에 대한 설계민감도 벡터들을 컬럼(column)으로 하는 행렬  $A$ 를 구성한다. 즉,  $\delta \bar{\Psi} = A^T \delta d$ 이다.



Step 7.  $\Delta\bar{\Psi}_j \equiv -\bar{\Psi}_j(s^i, d^i)$ 를 계산하여 벡터  $\Delta\bar{\Psi}$ 를 구성한다.

Step 8. 벡터  $M_{\Psi\Psi_0}$ 와 행렬  $M_{\Psi\Psi}$ 를 다음으로부터 구한다.

$$M_{\Psi\Psi_0} = \Lambda^T W^{-1} \Lambda^0 \quad (34)$$

$$M_{\Psi\Psi} = \Lambda^T W^{-1} \Lambda \quad (35)$$

여기서  $W$ 는 설계변수에 대한 가중치 행렬로서, 대개 대각행렬이다.

Step 9. 변수  $\gamma$ 를 결정한다. 이 변수는 설계변화량(design iteration)과 직결되어 있다. 이 변수는 설계가 진행되는 동안 고정시키거나 수렴 특성상 필요한 경우에는 수정한다.

Step 10. 벡터  $k, k^1, k^2$ 를 다음 식으로부터 구한다.

$$M_{\Psi\Psi} k^1 = -M_{\Psi\Psi_0} \quad (36)$$

$$M_{\Psi\Psi} k^2 = -C_{\Psi} \Delta\bar{\Psi} \quad (37)$$

$$k = k^1 + 2\gamma k^2 \quad (38)$$

여기서  $C_{\Psi}$ 는 대개 0.3과 1.0 사이의 값인데, 벗어난 구속조건의 정정계수이다.

Step 11. 만약 부등식구속조건에 해당하는 벡터  $k$ 의 어떤 성분이 음수이면, 그에 해당하는 구속조건을  $\bar{\Psi}$ 에서 제거하고, Step 3으로 돌아간다. 그렇지 않으면, 다음 Step으로 간다.

Step 12.  $\delta d^1, \delta d^2$ 를 다음 식으로부터 구한다.

$$\delta d^1 = W^{-1} [1^0 + \Lambda k^1] \quad (39)$$

$$\delta d^2 = -W^{-1} \Lambda k^2 \quad (40)$$

Step 13. 설계계산  $\delta d^i$ 를 다음 식으로부터 구한다.

$$\delta d^i = -\frac{1}{2\gamma} \delta d^1 + \delta d^2 \quad (41)$$

새로운 설계를 다음 식으로부터 구한다.

$$d^{i+i+1} = d^i + \delta d^i \quad (42)$$

Step 14. 만약 모든 구속조건이 만족되고,  $\|\delta d^i\|$ 이 충분히 적으면 끝낸다. 그렇지 않으면,  $i$ 를  $i+1$ 로 바꾸어 Step 2로 간다.

만약 위험구속조건이 없을 경우, Steps 7, 8, 10은 수행하지 않아도 된다.

## 7. 결 론

축차적인 최적화기법은 매 반복설계(design iteration)마다 설계민감도의 계산을 요구하기 때문에 설계민감도의 효율적인 계산 방법이 최적설계에 필

수적이다. Newton-Raphson 방법에 의하여 유한요소식을 풀 경우, 이 과정에서 구한 강성행렬과 힘 벡터를 이용하여 설계민감도를 용이하게 구할 수 있음을 본 연구를 통하여 확인하였다. 본 연구에서 수행된 계산결과, 유한차분법에 의한 설계민감도의 정확도는 차분구간에 다소의 영향을 받고 있으며, 각 설계변수에 대한 최적의 차분구간이 존재함이 밝혀졌다. 설계모델에 따른 설계민감도의 정확도는 큰 변화를 보이지 않았으나, 설계모델의 선정 및 수치계산에 세심한 주의가 요구됨을 알 수 있었다.

벌칙 강소성유한요소법은 금형과 공작물의 접촉면에서의 응력분포를 접촉면에서의 금형과 공작물의 속도 벡터를 이용하여 표현할 수 있게 한다. 이로 인하여 가공하중 또는 소요에너지를 목적함수 및 구속함수로 선택할 경우, 이 함수들이 상태변수에 대한 미분항을 포함하고 있지 않으므로, 설계민감도의 계산이 용이하고 유한차분법을 위한 적절한 차분구간이 선정된다면 고정도의 설계민감도를 얻을 수 있다. 따라서 벌칙 강소성유한요소법은 가공하중, 가공에너지, 금형에 작용하는 응력 또는 금형의 마모 등의 최적설계 문제에 매우 적합한 방법이다.

본 논문에서 정상상태의 소성가공 공정의 최적공정설계(금형형상설계, 공정변수설계, 압하계획설계)에 필요한 이론적 배경과 접근 방법이 소개되었다. 제안된 방법은 계속 발전하여, 온도 등의 영향도 고려할 수 있게 될 것이고, 비정상 상태의 소성가공 공정 설계 문제에도 일부 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 후 기

본 연구는 포항종합제철(주)(계약과제 1131A)의 지원으로 수행되었습니다. 포항제철에 감사를 드리면서 무궁한 발전을 기원합니다.

## 참고문헌

- (1) Lee, C.H. and Kobayashi, S., 1973, "New Solutions to Rigid-Plastic Deformation Problems using a Matrix Method," Trans. ASME, J. Eng. for Ind., Vol. 95, p. 865.
- (2) Zienkiewicz, O.C. and Godbole, P.N., 1974, "Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with

- Special Reference to Extrusion and Forming Processes," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.8, p. 3.
- (3) Shah, S. N. and Kobayashi, S., 1974, "Rigid-Plastic Analysis in Cold Heading by the Matrix Method," *Proc. of the 15th International MTDR Conf.*, p. 603.
- (4) Kobayashi, S. and Kim, J. H., 1977, "Deformation Analysis of Axisymmetric Sheet Metal Forming Processes by the Rigid-Plastic Finite Element Method," *Proc. General Motors Symposium on Mechanics of Sheet Metal Forming*.
- (5) Chen, C.C. and Kobayashi, S., 1978, "Rigid Plastic Finite Element Analysis of Ring Compression," *ASME Publication, AMD, Vol.28, Application of Numerical Methods to Forming Processes*, p. 163.
- (6) Oh, S. I., 1982, "Finite Element Analysis of Metal Forming Process with Arbitrary Shaped Dies," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 24, p. 479.
- (7) Shima, S., et al, 1980, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Strip Rolling," *Proc. 4th Int. Conf. on Prod. Eng.*, p. 82.
- (8) Li, G. J. and Kobayashi, S., 1982, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Plane Strain Rolling," *Trans. ASME, J. Eng. for Ind.*, Vol. 104, p. 55.
- (9) Mori, K. and Osakada, K., 1982, "Simulation of Three-Dimensional Rolling by the Rigid-Plastic Finite Element Method," *Proc. Num. Methods Ind. Forming Processes*, Swansea, p.747.
- (10) Hwang, S. M., Joun, M. S. and Park, J. S., 1990, "A Penalty Rigid-Plastic Finite Element Method for the Determination of Stress Distributions at the Tool-Workpiece Interfaces in Metal Forming," *Proc. 18th NAMRC, University park, Pennsylvania*, p. 13.
- (11) Park, J. J., Rebelo, N. and Kobayashi, S., 1983, "A New Approach to Preform Design in Metal Forming with the Finite Element Method", *Int. J. Mach. Tool Des. Res.*, Vol. 23, p. 71.
- (12) Hwang, S. M. and Kobayashi, S. 1987, "Preform Design in Shell Nosing at Elevated Temperatures," *Int. J. Mach. Tool Des. Res.*, Vol. 27, p. 1.
- (13) Hwang, S. M. and Kobayashi, S., 1984, "Preform Design in Plane-Strain Rolling by the Finite Element Method," *Int. J. Mach. Tool Des. Res.*, Vol. 24, p. 253.
- (14) Hwang, S. M. and Kobayashi, S., 1986, "Preform Design in Disk Forging," *Int. J. Mach. Tool Des. Res.*, Vol. 26, p. 231.
- (15) Kang, B. S., Kim, N.S. and Kobayashi, S., 1990, "Computer-Aided Preform Design in Forging of an Airfoil Section Blade," *Int. J. Mach. Tools and Manufacture*, Vol. 30, p. 43.
- (16) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design-Mechanical and Structural Systems*, John Wiley and Sons, New York.
- (17) Faux, I.D. and Pratt, M.J., 1979, *Computational Geometry for Design and Manufacturing*, Ellis Horwood Ltd.