

## 時系列分析에 의한 株式收益率 變動性的 豫測

朴 東 奎\*

### 〈요 약〉

이 연구는 時系列分析에 의해 株式收益率의 變動性を 예측하는 모델을 개발하고 그것에 의해 도출된 豫測值의 實際變動性에 대한 豫測力을 미국의 주식시장자료를 사용하여 검증·비교하였다. 구체적으로 수익률변동성에 대한 (1) 歷史的 變動性, (2) ARMAX 豫測值, (3) GARCH 豫測值 등이 도출되고 그것들의 예측력이 통계적 비교와 회귀분석 등의 여러 차원의 평가기준에 의해서 비교된다. 실증결과에 따르면 선택된 독립변수들에 근거한 ARMAX 예측치가 다른 예측치들 보다 모든 평가기준에서 우수한 예측력을 보였다. GARCH 예측치는 기대와는 달리 만족스러운 예측력을 보여주지 못했다. 본 연구에서 예측력이 실증된 ARMAX 예측치를 다양한 옵션가격결정모형의 변동성투입요소로 사용하는 것은 보다 정확한 옵션의 이론가격을 도출하는 데 크게 기여할 것이다. 또한, 이 논문의 실증결과는 각종의 자산가격결정이론, 수익률분포이론 등의 학문적 분야 뿐만 아니라 주식수익률 변동성의 동향이 일반투자자들의 투자전략에 결정적 영향을 미친다는 점에서 실무적인 관점에서도 시사하는 바가 크다고 할 것이다.

### I. 序 論

金融資産 收益率의 變動性(volatility) 혹은 표준편차<sup>1)</sup>는 재무관리분야에 있어서 그것이 가지고 있는 다음과 같은 중요성으로 인하여 많은 사람들의 관심의 대상이 되어왔다. 첫째, 收益率變動性은 平均-分散 포트폴리오 이론 및 CAPM(Capital Asset Pricing Model)으로 대표되는 資産價格決定理論의 핵심이고, 둘째, 옵션가격의 결정에 있어서 변동성의 예측은 필수적이며, 셋째, 收益率分布理論과 事件研究(event study)에 있어서도 변동성은 없어서는 안 될 요소이다. 일반투자자들은 좀더 현실적인 이유에서 그들의 투자성패에 결정적 영향을 미치는 수익률변동성의 동향에 관심을 기울이고 있다. 또한, “실제의 주식수익률이 어떠한 분포를 보이는가?”는 재무관리 뿐만 아니라

\* 漢陽大學校 經營大學院 專任講師

1) 이 연구에서의 變動性의 개념은 통계학적 개념으로서의 分散(variance)이 아니라 收益率의 標準偏差(standard deviation)이다.

통계학분야에 있어서도 중요한 토픽 중의 하나이다. 그러나, 수익률 분포형태는 수익률 변동성에 대한 정확한 이해없이 규명될 수 없다.

구체적으로 수익률 변동성예측은 위에 열거한 분야들에서 다음과 같은 메카니즘으로 중요하게 작용하고 있다. 첫째, 변동성의 행태에 대한 이해는 옵션 등의 派生證券(derivative securities)의 가격결정에 있어서 필수적이다. 다양한 옵션가격결정모형에 있어서 결정시점에서 알 수 없는 유일한 변수가 기초자산 수익률의 변동성이다. 그러므로, 모형에 따라 옵션가격을 계산하기 위해서는 당해 옵션의 남은 만기동안의 변동성을 예측하는 것이 필요하다. Black과 Scholes(1972)는 옵션의 남은 만기동안의 실제변동성을 사전에 구해서 투입한다면 그들이 개발한 결정모형의 정확성을 훨씬 더 높일 수 있음을 실증적으로 보였다. 결국 옵션가격결정모델의 유용성은 투자자가 얼마나 실제변동성에 가까운 예측치를 만들어 낼 수 있는가에 달려있다고 할 수 있을 것이다. 둘째, 자산가격결정모델에서 事前的(ex ante) 변동성이 기대수익률을 측정하는데 쓰이고 있기 때문에 변동성예측은 이 분야에서 필수적이다. 변동성의 기대치는 보통 期待市場危險프리미엄(expected market risk premium)을 통해서 기대수익률에 영향을 미친다. 이러한 메카니즘에 대하여 Merton(1980)은 總體的 危險忌避性向(aggregate risk aversion)의 변화의 속도가 시장위험의 변화보다 느리다는 전제하에 시장의 변동성과 시장위험프리미엄은 正의 관계(positive relationship)에 있다는 것을 밝혔다. French, Schwert와 Stambaugh(1987)는 주식수익률의 예측가능한 변동성이 기대시장위험프리미엄에 正의 영향을 미침을 보여주었다.

주식수익률 변동성의 시계열적 속성에 대해서는 만족할 만한 이론적 결론이 아직 나오고 있지 않다. 수익률변동성이 非安定的(nonstationary) 혹은 確率的(stochastic)이라는 가정은 많은 학자들에 의해서 받아들여져 왔다. 주식수익률의 확률분포에 영향을 주는 많은 변수들의 시계열(time series)들은 그 자체로 비안정적인 경우가 대부분이며, 이러한 비안정성은 수익률변동성의 시계열을 확률적으로(stochastically) 움직이게 만든다.<sup>2)</sup> 변동성의 시계열 행태에 대한 실증연구들도 연구자에 따라 상반된 결과들을 보여왔다.<sup>3)</sup> Rosenberg(1972)는 S&P 500 지수의 월별수익률의 통계학적 분산이 自己回歸的 過程(autoregressive process)을 따른다는 것을 밝혔다. 특히, Poterba와 Summers(1986)는 1928~1984년 동안의 S&P 종합지수(Composite Index)의 일별수익률로부터 계산된 월별분산시리즈에 근거하여 분산의 시계열이 AR(1) 과정을

2) 수익률분산의 시계열에 영향을 미치는 경제변수들에 대한 자세한 설명을 위해서는 Christie (1982) 참조.

3) 자세한 실증결과를 위해서는 Blattberg와 Gonedes(1974), Macbeth와 Merville (1980), Merville과 Piepstra(1989), Schmalensee와 Trippi(1978) 참조.

따른다는 것을 보여주었다.

본 연구의 대상이 되는 시계열분석에 근거한 수익률변동성 예측모델은 다음과 같이 세 부류로 나눌 수 있다. (1) 歴史的 變動性(historical volatility estimate), (2) ARMAX 혹은 轉換函數(transfer function) 모델, (3) GARCH(generalized autoregressive conditional heteroskedastic) 모델 등이 그것들이다.

역사적 변동성은 가장 최근의 주가수익률로부터 산출된 변동성으로서 이것을 다음 기간의 실제변동성을 예측하는 데 사용하는 것이다. 즉, 역사적 변동성은 주가의 행태에 관한 弱型市場效率性이 현실을 완전히 반영하지는 않는다는 전제로부터 출발하고 있다. 또한, 다양한 형태의 수익률변동성에 대한 충격들(shocks to volatilities)의 영향이 짧은 기간동안 존속한다면 역사적 변동성은 실제변동성에 대해 좋은 예측력을 보일 수 있다.

收益率變動性的 時系列이, Poterba와 Summers(1986), Bollerslev(1987), Akgiray (1989)가 보인 것처럼, 系列相關(serial dependence)을 나타낸다면 그것의 행태는 Box-Jenkins(1976)의 ARIMA(autoregressive integrated moving average) 모델에 의해 접근될 수 있을 것이다. 위에서 밝힌 것처럼 Rosenberg(1972)와 Poterba와 Summers (1986)는 변동성의 시계열이 자기회귀적 과정을 보임을 실증했다. 본 연구에서는 ARIMA 모델보다 한층 발전된 모형으로서 ARMAX 모델이 도입된다. 이 모델에서는 변동성의 시계열행태를 설명하기 위해서 원래의 ARIMA 모델에 변동성에 영향을 미치는 여러 독립변수의 시계열을 추가한다.

최근에 개발된 변동성 예측모델로서 Bollerslev(1986)의 GARCH(generalized autoregressive conditional heteroskedastic) 모델을 들 수 있다. 이 모델에서는 과거의 정보에 근거한 條件分散(conditional variance)은 과거 오차항의 함수로서 시간에 따라 변하는 것이 허용되는 반면에 無條件分散(unconditional variance)은 일정하다. GARCH 모델에서는 한 변수가 현재의 정보에 따라 미래에 어떤 값을 가지는가는 예측오차의 조건분산으로 해결된다. Engle(1982)의 ARCH(autoregressive conditional heteroskedastic) 혹은 ARMAX 모델에 비해서 조건분산에 대한 방정식을 가지고 수익률행태를 설명하는 GARCH 모델은 변동성의 시계열상관-주식의 큰 가격변동 뒤에는 큰 가격변동이 따르고 작은 가격변동 뒤에는 작은 가격변동이 따르는 시장상황-을 명확하게 반영하고 있다는 점에서 수익률 변동성에 대한 더 높은 예측력을 기대할 수 있다. GARCH 모델에서는 수익률의 조건분산이 현재의 정보에 따라서 변하기 때문에 수익률의 불확실한 미래변화는 예측오차의 과거구조와 조건분산을 이용해서 모델화할 수 있다. 다시 말하면, GARCH 모델은 k 기간 앞의 條件豫測分散의 時系列을 추정하는데 사용될 수 있다. French, Schwert와 Stambaugh(1987)는 GARCH(1,2)와 ARIMA(0,1,

3) 모델을 사용해서 기대위험프리미엄과 변동성간에 正의 시간적 관계(positive intertemporal relation)가 있음을 밝혔다. Akgiray(1989)는 ARCH(2)와 GARCH(1,1) 모델을 CRSP (Center for Research in Stock Prices) 지수에 적용해서 후자가 전자보다 실제 수익률행태를 더 잘 설명하고 있고 변동성의 예측력도 더 우수함을 밝혔다.

이 연구의 목적은 위에서 소개된 시계열방법론들에 의하여 주가수익률의 변동성을 예측하는 모델을 개발하고 그것에 의해 도출된 예측치의 실제변동성에 대한 예측력을 검증·비교하는 데 있다. 구체적으로 수익률변동성에 대한 (1) 역사적 변동성, (2) ARMAX 예측치, (3) GARCH 예측치 등이 도출되고 그 예측력이 통계적 비교와 회귀분석 등의 여러 차원의 평가기준에 의해서 비교된다. 우선 통계적 비교에 의한 평가기준을 들어보면 예측오차의 크기를 분석하기 위한 여러 평가통계량이 제시되고 한 예측치의 다른 예측치에 대한 예측력우위의 유의성을 검증하기 위한 t-검증이 실시된다. 또한, 確率支配基準(stochastic dominance criterion)을 이용한 누적분포함수 비교기준도 제시된다. 각 예측치가 보이는 예측오차의 원인을 찾기 위해서 예측오차제곱의 평균(mean square error)에 대해서 Theil(1966)의 분해(decomposition)가 행해진다. 평가결과가 각 예측치의 평균간의 차이에 의해서 왜곡될 수 있기 때문에 각 예측치가 基準豫測值(benchmark forecast)와 같은 평균을 갖도록 조정되고 이러한 조정된 자료에 대해서 이미 설명한 평가방법들이 반복 시행된다. 통계적 비교에 대한 대안으로서 실제변동성과 각 예측치간에 회귀분석이 행해져서 각 예측치의 偏倚性(biasedness), 效率性(efficiency), 說明力 등을 테스트한다.

본 연구는 다음과 같이 구성된다. 두번째 장에서는 각 예측모델의 도출을 살펴본다. 각 모델의 이론적 장단점과 그것에 대한 실증분석상의 문제점도 지적된다. 세번째 장에서는 실증분석을 위한 자료들의 특성과 수집방법을 설명하고 예측의 정확도를 평가하는 방법론에 대해 논의한다. 평가를 위한 각종 통계치, 유의성검증기법, 회귀분석방법 등이 제시된다. 네번째 장에서는 각 예측모델을 실제자료에 적용해서 예측치를 도출하고 그것들의 실제변동성에 대한 예측력이 평가·비교된다. 마지막 장은 연구의 결론을 제시하고 이 연구가 함축하는 의미들을 논의한다.

## II. 收益率變動性的 豫測모델

### 1. 歷史的 變動性

수익률변동성의 행태가 시계열적으로 불안정적이라도 그것의 변화는 조금씩 진

전된다는 점에서 만약 예측기간이 충분히 짧다면 가장 최근의 자료로부터 구한 수익률변동성은 다음 기간의 실제변동성에 대한 훌륭한 예측치가 될 수 있다. 일별자료로부터 계산된 역사적 변동성은, 월별변동성의 경우처럼 보다 먼 과거시점의 자료에 의존함이 없이도, 커다란 표본을 구성할 수 있다는 점에서 유용하다. 만약 변동성에 영향을 미치는 주식시장에 대한 외부적 충격이, Black(1976a), Poterba와 Summers(1986), Franks와 Schwartz(1988)가 지적한 것처럼, 짧은 기간동안에만 지속하고 없어져 버린다면 역사적 변동성은 단기적으로 실제변동성의 좋은 예측치가 될 수 있다. 실제변동성에 대한 예측치로서의 역사적 변동성은 본 연구에서 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 HIST_{jt} &= \left[ N \sum_{i=1}^n \frac{(r_{jit-1} - \mu_j)^2}{n-1} \right]^{1/2} & (1) \\
 \mu_j &= (1/n) \sum_{i=1}^n r_{jit-1}
 \end{aligned}$$

여기서,  $HIST_{jt}$  = 주식 j의 분기 t에 대한 예측치로서의 역사적 변동성

$N$  = 일년동안의 주식시장의 거래일수

$n$  = 前分期 t-1 동안의 거래일수

$r_{jit-1}$  = 연속복리로 산출한 일별수익률, 즉  $\ln(1 + R_{jit-1})$ 이다.

$R_{jit-1}$ 는 주식 j의 前分期 t-1동안의 일별수익률을 나타낸다.

역사적 변동성의 계산에서 N을 곱해주는 것은 그것을 年別(annualized)수치로 만들기 위한 것으로 다른 예측치와의 비교에 있어서 편의를 도모하기 위한 것이다.

## 2. ARMAX 豫測모델

ARMAX 모델은 예측의 정확성을 제고하기 위하여 ARIMA 모델에 독립변수의 시계열적 영향을 추가한다. 그러므로, 종속변수는 時差從屬變數(lagged dependent variable) 뿐만 아니라 독립변수들의 시계열에 의해서도 영향을 받게 된다. 이 연구에서 쓰이는 수익률변동성에 대한 ARMAX 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_t &= v_1 \sigma_{t-1} + \dots + v_k \sigma_{t-k} \\
 &= w_0 X_{t-d} + w_1 X_{t-d-1} + \dots + w_m X_{t-d-m} + U_t
 \end{aligned}$$

다시 쓰면 다음과 같다.

$$\sigma_t = v^{-1}(B)w(B)X_{t-d} + U_t \quad (2)$$

여기서,  $\sigma_t$  = t분기의 수익률변동성

$X_t$  = t분기의 변동성에 영향을 미치는 독립변수들의 벡터

$d$  = 독립변수들이 변동성에 영향을 미치는 데 있어서의 시차를 측정해 주는  
시차모수(delay parameter)

$m$  = 전환함수의 차수

$B$  = 시계열상의 後進을 나타내 주는 지표(backshift operator)

잔차항  $U_t$ 는  $X_t$ 에 대해 독립적인 것으로 가정한다. 잔차의 시계열 또한 다음의 ARIMA 과정에 따르는 것으로 가정된다.

$$U_t = \phi^{-1}(B)\varphi(B)\varepsilon_t \quad (3)$$

여기서  $\phi$ ,  $\varphi$  = 각각 자기회귀(autoregressive)와 이동평균(moving average)모수

$\varepsilon_t$  = t기에서의 잔차(white noise)

본 연구에서의 독립변수 시리즈는 다음의 실증적 연구결과에 기초하여 시장의 변동성, 이자율, 표본주식의 분기별 수익률 등으로 구성된다. Black(1976b)은 서로 다른 주식들의 변동성들이 같은 방향으로 움직인다는 것을 발견했다. 이것은 개별주식들이 시장변동성에 正의 관계를 가짐을 즉, 개별주식의 수익률변동성에 시장효과가 있음을 실증한 것이다. Christie(1982)는 변동성시계열에 영향을 미치는 요소들을 조사해서 주식의 변동성이 이자율에 대해 강한 正의 관계를 가지고 있음을 밝혔다. Black(1976a)과 Schmalensee와 Trippi(1978)는 주가의 변화와 그것의 변동성의 변화간에 逆의 관계가 있음을 밝혔다.

ARMAX 모델의 판별(identification)을 위해서는 투입(독립)변수와 산출변수간의 交叉相關函數(cross correlation function)가 사용된다. 식(2)에 있는 모수들  $v$ ,  $w$ ,  $d$ 의 최초값들은 표본상관함수에 근거하여 추정된 轉換函數加重值(transfer function weights)로부터 계산될 수 있다. 이러한 임시적인 ARMAX 모델이 주어지면, 잔차가 ARIMA 과정에 따르는 수정된 모델이 後方豫測技法(back forecasting method)에 의하여 추정될 수 있다.<sup>4)</sup> 모델의 적합성을 검증하기 위하여 수정된 모델의 잔차에 대한

4) 후방예측기법에 대한 자세한 논의는 Box와d Jenkins(1976) 참조.

유의성 검증이 행해져야 한다. ARMAX 변동성 예측치를 구하기 위해서는 最小平均제곱誤差 (minimum mean square error)에 근거한 예측법이 사용된다. 산출변수인 수익률변동성을 예측하기 위해서는 투입변수들에 대한 예측이 선행되어야 한다.

### 3. GARCH 豫測 모델

Bollerslev(1986)는 Engle(1982)의 ARCH 모델을 일반화시켜서 더욱 긴 메모리와 신축적인 時差構造(lag structure)를 가진 GARCH 모델을 개발했다. 이 모델에서는 과거의 오차에 근거한 조건분산은 시간에 따라 변하지만 무조건분산은 변하지 않는다. 본 연구에서는 표본주식수익률의 시계열에 대한 ARIMA 분석 결과를 GARCH 예측모델의 평균방정식으로 사용한다. 만약 수익률에 대한 ARIMA 분석의 결과 수익률이 AR(1) 과정에 따른다면 그때의 GARCH(p,q) 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 r_t &= \theta_0 + \theta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \\
 &= \mu_t + \varepsilon_t
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)
 \tag{5}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0.
 \tag{6}$$

여기서  $\Omega_{t-1}$ 은 (t-1)기에서 수집가능한 정보를 나타낸다.

이 모델에서 條件平均收益率(conditional mean return),  $\mu_t$ 는 과거 수익률의 함수로 표시된다. 식(4)를 수익률에 대한 平均方程式(mean equation)이라고 부른다. 식(5)에 따라서 조건오차는 정규분포에 따르고 조건분산,  $h_t$ 는 식(6)에 의해 과거의 오차제곱과 과거의 조건분산의 선형함수의 형태를 띠고 있다. 따라서, GARCH 모델에 의하면 투자자들은 그들의 수익률의 평균과 분산을 현재 수집가능한 정보에 기초하여 끊임없이 수정하고 있는 것으로 가정되고 이것은 전통적인 시계열모델에 비해 좀더 현실적인 모델설정이라고 볼 수 있다. 식(4)~(6)으로 주어진 모델에서 주식가격의 큰(작은) 변동 뒤에는 큰(작은) 변동이 따르지만 그 변동의 방향(상향 혹은 하향)은 예측될 수 없는 것을 볼 수 있다. 이것은 과거의 주식시장에서 목격되었던 전형적인

분산의 시계열적 변화 행태이고 실증연구들에 의해 그 존재가 입증된 현상이다.<sup>5)</sup> 더욱이, GARCH 모델의 무조건오차분포는 렙토크틱(leptokurtic)한데, 이것 또한 Fama (1965, 1970)의 실증결과와 일치하는 것이다.

GARCH 모델을 추정하기 위해서는 最大尤度推定法(maximum likelihood estimation)이 다음과 같이 사용된다. 식 (4)~(6)과 같이 GARCH(p,q)모델이 주어졌다면 크기 T의 표본에 대한 로그우도함수는 아래와 같이 도출된다.

$$L_T(\phi) = T^{-1} \sum_{i=1}^T \lambda_i(\phi)$$

$$\lambda_i(\phi) = -1/2(\ln h_i + \varepsilon_i^2 h_i^{-1}) \tag{7}$$

여기에서  $\phi$ 는 추정될 모수들의 벡터를 나타낸다.  $\lambda_i(\phi)$ 를 식(4)~(6)에 있는 모수들에 대해서 각각 편미분해줌으로써 우도함수를 극대화할 수 있다. 그러나, ARCH 모델과는 달리 GARCH 모델은 이 과정에서 반복적인 절차(iterative procedure)가 필요하다.

일반적으로 이 모델에 최우법을 적용하기 위해서는 Berndt, Hall, Hall과 Hausman (1974)의 알고리즘(algorithms)이 쓰인다.<sup>6)</sup>

GARCH 모델의 평균방정식으로 AR(1) 과정이 쓰인 것은 주식수익률의 시계열이 AR(1) 모델에 따른다는 Akgiray(1989)의 발견에 근거한 것이다. GARCH 모델의 차수를 (p=1, q=1)로 한 것은 (p>2, q>2)의 차수가 모델의 적합도(goodness-of-fit)를 유의하게 증진시키지 못한다는 저자의 예비적 실증결과에 따른 것이다. 모델의 낮은 차수는 最大尤度推定法 알고리즘의 收斂(convergence)을 위해서도 유용하다. 따라서, GARCH 모델에 의한 변동성 예측을 위해서는 AR(1)-GARCH(1,1) 모델이 사용된다. 식(6)에서 조건분산이 실제 관찰가능한 변수들의 함수로 표시되어 있기때문에 1기 후의 분기별 변동성예측치가 도출될 수 있다. 구체적으로 식(4)~(6)의 AR(1)-GARCH (1,1) 모델에서 현재시점 t에서의 k期후의 수익률조건분산은 다음과 같이 도출된다.<sup>7)</sup>

$$h_{ik} = \alpha_0 \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j + \alpha_1 \delta_{k-1} \varepsilon_i^2 + \beta_1 \delta_{k-1} h_i \tag{8}$$

$$\text{여기서 } \delta_j = \sum_{i=0}^j (\alpha_1 + \beta_1) \theta_1^{2(j-i)}$$

5) 이에 대한 대표적인 실증연구로는 Akgiray(1989) 참조.  
 6) 「Berndt, Hall, Hall and Hausman 알고리즘」과 그것의 GARCH 모델에의 적용방법에 대해서는 Berndt, Hall, Hall and Hausman(1974)과 Bollerslev(1986) 참조.  
 7) Engle과 Kraft(1983)는 AR(1)-ARCH(1) 과정에서 t기 후의 조건분산을 구했다. 구체적인 도출방법은 그들의 논문 참조.



만약 평균방정식 (4)에 自己回歸項(autoressive term)이 없다면,  $\theta_1$ 을 0으로 놓으면 된다.

#### 4. 豫測모델의 理論的 比較

ARMAX 모델은 수익률변동성과 독립변수들간의 관계를 규정하는 전환함수에 의해 변동성을 예측하는 모델이다. 이러한 전환함수를 찾아내기 위해서는 먼저 종속변수인 변동성과 각 독립변수에 대해 전통적인 단일변수(univariate) ARIMA 분석이 선행되어야 한다. 따라서 역사적 변동성과 같은 단일변수에 근거한 시계열예측모델에 비해 더 나은 예측력을 기대할 수 있다. 그러나, ARMAX 모델에 의한 성공적인 변동성의 예측을 위해서는 각 변수에 대한 ARIMA 분석단계나 교차상관함수의 판별과정에서 필요한 모수들의 세심한 선택 및 운용이 요구된다.

GARCH 모델의 핵심은 변동성과 수익률사이의 사전적 관계식이라고 할 수 있다. ARMAX나 역사적 변동성 모델 등의 변동성에 관한 전통적인 시계열모델에서는 대상변수로서의 無條件變動性이 분석기간동안 일정하다고 가정된다. GARCH 모델에서는 사전적 관계식을 통하여 조건변동성은 조건오차에 따라 변하지만 전통적인 시계열모델에서 사용되는 무조건변동성은 일정하다. 이러한 변동성의 행태에 관한 GARCH 모델의 가정은 좀더 현실에 접근하는 것이라고 볼 수 있다. 또한, 조건분산의 현재정보에 대한 의존성때문에 조건분산의 움직임이 전통적인 시계열모델의 무조건분산의 그것과 다르다. 즉, 이 모델에서는 새로운 정보의 도입은 변동성예측치의 모든 시계열을 변화시키게 된다. 그 결과 GARCH 모델은 다른 시계열분석모델과 달리 앞서 지적한 변동성의 시계열상관경향 등의 주식수익률변동성의 현실적인 시계열 행태를 내재화할 수 있는 것이다.

### III. 資料 및 實證方法論

#### 1. 資料

표본주식으로서는 전대상기간동안(1981.1~1987.10)의 수익률 기록이 CRSP 데이터에 들어있는 주식으로서 변동성예측이 시행되는 1986.7 현재 거래량 상위 30개

주식이 추출된다. 또한, 이 연구가 옵션에 관한 연구와 동시에 시행되었기 때문에 표본주식은 그것의 옵션이 1-4-7-10 만기구조로 되어 있는 주식으로 제한된다. 이러한 과정을 거친 후의 표본은 <표 1>과 같이 구성된다.

<표 1> 標本株式의 構成

Aluminum Co. America	American Tel & Teleg Co.	Atlantic Richfield Co.
Avon Products Co.	Burlington Northern Inc.	Bethlehem Steel Corp.
BankAmerica Corp.	Citicorp	Delta Airlines Inc.
Eastman Kodak Co.	Exxon Corp.	Federal Express Co.
Flour Corp.	Great Western Financial	Haliburton Co.
Homestake Mining Co.	IBM	Int'l Paper Co.
Johnson & Johnson	Minnesota MN & MFG Co.	Monsanto Co.
NWA Inc.	Pennzoil Co.	Polaroid Corp.
Squibb Corp.	Teledyne Inc.	Texas Instruments Inc.
Weyerhaeuser Co.	Winnebago Inds Inc.	Xerox Corp.

주식수익률의 변동성을 구하기 위해서 1981.1~1987.10 까지의 일별수익률자료가 CRSP 일별수익률자료(daily return file)에서 추출된다. 일별수익률을 계산함에 있어서 주가는 幾何散布過程(geometric diffusion process)에 따른다고 가정한다. 이것은 連續複合收益率(continuously compounded return)이 정규분포함을 의미한다. 따라서 일별수익률의 자연대수는 정규분포에 따른다. 이러한 가정들에 근거하여 주식  $j$ 의 실제변동성은 역사적 변동성을 나타내는 식(1) 우변의  $(t-1)$ 을  $t$ 로 바꾸어 줌으로써 구할 수 있다.

일별자료에 근거한 分期別 變動性(quarterly volatility)은 다음과 같은 이유에서 사용된다. 첫째, 수익률변동성의 행태에 관한 연구는 원래 옵션에 대한 연구에서 비롯되었는데 실제옵션들은 분기별 만기구조에 따라 거래되고 있다. 둘째, 年間變動性(annual volatility)을 사용하면 자료의 크기를 크게 축소시켜 시계열분석의 정확도를 반감시키게 될 것이다. 셋째, 미국기업들은 일반적으로 배당을 분기별로 지급하므로 변동성예측치에 대한 배당의 영향을 극소화할 수 있다. ARMAX 모델에 의한 변동성예측치를 구하기 위해 BMDP(Biomedical Data Processing) 소프트웨어 패키지가 쓰인다. 시장포트폴리오의 지표(proxy)로서는 CRSP 거래금액가중지수(value-weight-

ted index)가 사용되며<sup>8)</sup> 이자율 지표로는 3개월 후에 만기가 도래하는 미국재무부증권(Treasury Bill)의 수익률이 쓰일 것이다. GARCH 모델의 모수를 추정하기 위해서는 日別收益率이 아닌 週別收益率이 다음과 같은 이유에서 사용된다. 첫째, 일별수익률이 사용되면 자료기간동안의 1,300개가 넘는 관찰치가 추정에 이용되어 GARCH 모델의 最大尤度推定(maximum likelihood estimation)을 위한 Berndt, Hall, Hall과 Hausman의 알고리즘에서 수렴된 값을 얻는다는 것이 거의 불가능하다. 둘째, 5년 동안의 일별수익률은 수익률패턴상의 構造的 變化(structural changes)를 포함하고 있는 경우가 많은 데 이것은 GARCH 모델의 예측력을 감소시키기 쉽다.

## 2. 實證方法論

세 가지의 서로 다른 변동성예측치들이 표본주식들에 대하여 예측기간동안의 매 분기 초에 도출되어 실제변동성과 비교된다. 이러한 과정이 전기간에 걸쳐서 반복된다. 각 변동성예측치의 정확성을 비교하기 위하여 통계적 비교와 회귀분석 등 두 가지 차원의 평가기준이 아래와 같이 적용된다.

### (1) 統計的 比較

이 비교방법은 각 모델의 예측오차,  $e$ 에 대해 아래의 비용함수  $C(e)$ 를 산정한다.

$$C(0)=0, \quad C(e_1)>C(e_2) \quad (e_1>e_2>0 \text{ 혹은 } e_1<e_2<0 \text{ 일때})$$

이 방법에서는 주어진 비용함수를 최소화하는 모델이 실제변동성을 가장 정확하게 예측하는 모델이 된다. 비용함수의 형태에 따라 다음과 같은 구체적 평가기준이 제시된다.

$$\text{평균오차} = (I/J) \sum_{j=1}^J (\sigma_{jt} - ACT_{jt})$$

(ME)

$$\text{Theil 불균등계수} = \left[ \frac{\sum_{j=1}^J (\sigma_{jt} - ACT_{jt})^2}{\sum_{j=1}^J (HIS_{jt} - ACT_{jt})^2} \right]^{1/2} \quad (10)$$

(TIC)

$$\text{평균자승오차} = (I/J) \sum_{j=1}^J (\sigma_{jt} - ACT_{jt})^2 \quad (11)$$

(MSE)

8) 시장지표로서 어떤 지수(거래금액가중 혹은 균등가중(equal-weighted) 지수)를 사용하는 가는 실증결과에 영향을 미치지 않음이 필자의 연구(1987)에 의해 밝혀졌다.

$$\text{평균절대비율오차(MAPE)} = (I/J) \sum_{j=1}^J [ |\sigma_{jt} - \text{ACT}_{jt}| / \text{ACT}_{jt} ] \quad (12)$$

여기에서  $\text{ACT}_{jt} = t$  기간동안의 주식  $j$ 의 실제변동성

$\sigma_{jt}$  =  $(t-1)$ 기에 측정된 주식  $j$ 의  $t$ 기에 대한 변동성 예측치

$J$  =  $t$ 기 동안의 대상주식수

平均誤差(mean error : ME)는 개별주식에 대한 예측오차를 일차비용함수에 근거하여 산술평균한 값이며 실제변동성과 예측치간의 오차의 방향을 나타내 준다. 그러나, 개별예측오차들이 오차의 방향을 고려하지 않고 단순히 더해진다면 陽과 陰의 오차들이 서로 상쇄되어 진정한 예측오차가 왜곡되기 쉽다. 이러한 편차를 시정하기 위하여 平均제곱誤差(mean square error : MSE)는 각 개별주식의 오차에 동일한 가중치를 부여하여 예측오차의 제곱의 평균을 측정한다. 이 평가기준은 그 근거가 되는 비용함수가 이차함수이고 대칭형일 때 적합하다. 다른 예측치에 대한 특정 예측치의 상대적 정확성을 평가하기 위하여 Theil 不均等係數(Theil inequality coefficient : TIC)가 산출된다. 비교의 기준이 되는 예측치로는 역사적 변동성이 사용된다. 식(10)로부터 특정예측치가 실제변동성을 완벽하게 예측한다면  $\text{TIC}=1$ 이고 그것의 예측력이 역사적 변동성과 같다면  $\text{TIC}=1$ 임을 알 수 있다. 平均絶對比率誤差(mean absolute percentage error : MAPE)는 비용함수가 실제변동성과의 거리만을 측정하는 절대오차보다는 실제변동성에 대한 상대적 오차와 더 밀접하게 관련되어 있다는 전제하에 상대적 예측오차를 측정한다. 실제변동성의 크기가 주식에 따라서 다르기 때문에 특정예측치의 실제변동성에 대한 상대적 오차도 중요한 예측력 평가의 기준이 된다.

두 모델간의 예측력의 차이에 대한 유의성을 검증하기 위하여 각 쌍의 예측치들에 대하여 다음과 같은 통계량이 계산된다.

$$D_i = (\sigma_{i1} - \text{ACT}_i)^2 - (\sigma_{i2} - \text{ACT}_i)^2, \quad (13)$$

여기에서  $\sigma_{i1}$ 과  $\sigma_{i2}$ 는 예측치 1과 2의  $i$ 번째 관찰치이고  $\text{ACT}_i$ 는  $i$ 번째의 실제변동성을 나타낸다. 양측  $t$  검증이  $D_i$ (두 예측치간의 평균제곱오차의 차이)의 평균에 대해 행해진다.  $D_i$ 의 평균이 유의하게 0보다 적다면 예측치 1이 예측치 2보다 우월하다고 할 수 있다. 이러한  $t$  검중에 의한 예측력 비교는 평균제곱오차와 평균절대비율오차의 두 가지 기준에 대하여 행해진다.

각 쌍의 예측치간의 예측력격차의 유의도를 검증하기 위하여 예측오차제곱에 대한

누적분포함수(cumulative frequency distribution)를 사용한 평가기준이 제시된다. 一次確率支配基準(the first degree stochastic dominance criterion)에 따라 만약 한 예측 모델의 예측오차의 분포함수가 다른 모델의 그것보다 모든 구간에서 같거나 크고 적어도 한 구간 이상에서 확실하게 크다면 전자가 후자보다 우월하다고 평가된다. 특정한 오차구간에서의 누적분포함수값 차이의 유의도를 검증하기 위해 15개 구간이 설정된다. 예측오차의 0에 대한 歪度(skewness)가 예상되기 때문에 0에 가까운 구간들은 구간의 간격을 좁게 하고 0에서 멀어질수록 간격을 넓게 설정했다. 확실한 확률지배(strict stochastic dominance)가 성립되지 않을 경우에는 한 예측치가 15개 구간 중 8개 구간 이상에서 다른 예측치보다 큰 분포함수값을 보였을 때 그 예측치가 우월하다고 평가된다. 이 평가기준에 의한 특정 예측모델의 전체적인 평가는 그 예측치의 분포함수가 다른 예측치의 그것보다 큰 회수의 합계를 산출함으로써 판단할 수 있다. 이 분포함수기준에 의한 예측력 비교도 평균제곱오차와 평균절대비율오차에 적용된다.

예측오차를 발생시키는 원인을 살펴보고 그것을 각각의 성격에 따라 구분한다는 것은 오차의 교정 및 시행착오에 의한 예측력의 제고를 위해서도 중요하다. 이러한 작업을 위해 전예측기간을 통하여 산출된 평균제곱오차가 아래와 같이 세 부분으로 구분된다.

$$MSE = (1/J) \sum_{j=1}^J (\sigma_j - ACT_j)^2 = (M_v - M_a)^2 + (SD_v - SD_a)^2 - 2(1-r)SD_v SD_a \quad (14)$$

여기에서  $(M_v, M_a)$  그리고  $(SD_v, SD_a)$ 는 각각 변동성 예측치와 실제변동성의 평균 및 분산을 가리키고  $r$ 은 그들 사이의 상관계수를 나타낸다. 식(14) 우변의 첫째항은 평균예측치와 실제변동성의 평균이 일치할 경우에만 0이 된다. 이 항이 陽의 값을 가질 때 그것을 歪曲된 예측에 의한 誤差(errors due to a biased forecast)라고 부른다. 식(14) 우변의 둘째항에 나타나는 오차는 분산의 차이에서 비롯되기 때문에 그것을 不均等한 變動에 의한 誤差(errors due to unequal variation)라고 부른다. 셋째항과 관련된 오차는 상관계수와 관련이 있기 때문에 그것을 不完全한 相關關係에 의한 誤差(errors due to incomplete correlation)라고 한다. 각 항을 평균제곱오차로 나누어 주면 다음과 같이 세 가지의 不均等部分(inequality proportions)으로 나눌 수 있다.

Bias Proportion  $P_b = (M_v - M_a)^2 / MSE \quad (15a)$

Variance Proportion  $P_v = (SD_v - SD_a)^2 / MSE \quad (15b)$

$$\text{Correlation Proportion} \quad P_c = 2(1-r)SD_v SD_{\hat{v}} / \text{MSE}, \quad (15c)$$

식(15)에서 보는 바와 같이 각 불균등부분들은 2차비용함수가 전제되었을 경우의 예측오차들의 원천을 밝혀준다.

만약 각 예측치의 평균이 서로 유의하게 다르다면 이 차이에 의해 예측력평가결과가 왜곡될 수도 있을 것이다. 이러한 왜곡을 피하기 위하여 서로 다른 예측치들이 기준예측치인 역사적 변동성과 동일한 평균을 가지도록 조정되어 이미 설명된 통계적 비교에 의해 예측력이 평가된다. 평균조정을 한 후의 예측력평가는 각 예측치의 서로 다른 평균들이 예측력순위에 영향을 주었는지를 판별해 줄 것이다.

## (2) 回歸分析

통계적 비교에 의한 예측력평가의 대안으로 각 예측치를 독립변수로 하는 회귀 분석을 생각할 수 있다. 구체적으로 각 예측치의 효율성이 다음과 같은 Theil(1966)의 완전한 예측(the line of perfect forecasts)에 근거한 회귀분석을 행함으로써 검증될 수 있다.

$$ACT_{jt} = \alpha + \beta \sigma_{jt} + u_{jt}, \quad j=1, \dots, J \text{ 와 } t=1, \dots, T \quad (16)$$

완전한 예측의 경우에는 식(16)의  $\alpha$ 와  $\beta$ 계수들이 각각 0과 1에 유의하게 다르지 않을 것이다.  $\alpha$ 에 대한 유의도 검증은 회귀방정식의 편의 정도(degree of bias)를 밝혀주고  $\beta$ 에 대한 검증은 각 예측치의 효율성을 나타내 준다. 회귀선의  $R^2$ 는 각 예측치들이 실제변동성의 움직임을 설명해 주는 정도를 반영한다.

## IV 實證結果

대상기간인 1981년 1월부터 1987년 10월까지의 모든 27개의 분기가 존재하므로 그만큼의 분기별 변동성을 계산할 수 있다. 예측력검증기간은 그 중에서 마지막 5개 분기, 즉 1986년 7월부터 1987년 10월까지로 잡았다. 미국에서의 이 기간은 빈번한 이자율변동과 80년대 초반의 인플레이션으로 주식수익률의 변동성이 시계열적으로 심한 변동을 보였을 때이다. 만약 ARMAX 방정식에서 특정 독립변수가 모델추정과정

(the estimation stage)에서 유의하지 않은 것으로 발견된다면 그것은 추정에서 제외된다. 개별주식들의 수익률변동성에 대한 ARIMA 분석을 해 본 결과 30개의 표본주식 중에서 5개를 제외하고는 Poterba와 Summers(1986)의 결과와 마찬가지로 AR(1) 과정을 보였다. 1986년 7~10월 분기에 대한 최초의 GARCH 예측치는 1981년 1월부터 1986년 7월까지의 282개 주별수익률로부터 산출된다. 그 후의 분기별 예측치는 가장 오래된 분기의 13개 관측치를 제외하고 가장 최근 분기의 13개 관측치를 추가함으로써 얻어지는 데 이것은 GARCH 모델의 예측효과를 반감시키는 대상기간동안의 수익률패턴상의 景氣變動의 요소를 배제하기 위한 것이다. 표본주식 ALCOA에 대한 GARCH 분석결과를 예시하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 標本株式 ALCOA에 대한 GARCH 分析

표본주식 : ALCOA(AA)			
관찰치의 수 = 282			
기간 : 1982.1~1987.7			
$r_t = \theta_0 + \theta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$			
$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$			
	계수	표준오차	T값
$\theta_0$	0.400436E-02	0.260072E-02	1.53971
$\theta_1$	-0.929199E-01	0.664122E-01	-1.39914
$\alpha_0$	0.0005237	0.205327E-01	1.11462
$\alpha_1$	0.0354587	0.163631	1.15079
$\beta_1$	0.6646146	0.348758	2.33755

<표 3>에는 각 변동성예측치의 예측력검증기간 동안의 요약통계량이 실려 있다. 역사적변동성에 비해서 ARMAX와 GARCH 예측치들의 분산이 시계열적으로 매우 적음을 볼 수 있는 데 이것은 각 모델속에 내재된 원활화(smoothing) 과정의 결과로 보인다. 또한, ARMAX와 GARCH 예측치들간의 상관관계가 비교적 높음을 볼 수 있다.

<표 4>는 각 예측치에 대한 전예측기간 및 각 분기별로 산출된 비교통계량을 보여주고 있다. 전예측기간의 평균오차에 의한 검증결과를 보면 전반적으로 GARCH 예측치는 실제변동성에 대해 과대평가되어 있고 ARMAX와 역사적 변동성은 약간 과소평가되는 경향이 있음을 볼 수 있다. 평균제곱오차에 의하면 ARMAX가 다른 예측치에 비해 월등한 정확성을 보이고 있다. 예상과는 달리 GARCH 예측치는 역사적

〈표 3〉 變動性 豫測值의 요약통계량

관찰치의 수 : 150(1986. 7-1987. 10)				
HIS = 역사적 변동성 예측치				
AMX = ARMAX 예측치				
GAR = GARCH 예측치				
	평 균	표준편차	최 소 치	최 대 치
HIS	.298462	.101117	.158100	.835500
AMX	.297271	.756788E-01	.173100	.601500
GAR	.305058	.808919E-01	.182900	.630900
상관계수 행렬				
	HIS	AMX	GAR	
HIS	1.00000			
AMX	.772640	1.00000		
GAR	.721191	.825153	1.00000	

변동성보다도 못한 예측성과를 보여 주고 있다. 그러나, 이것은 GARCH 예측치의 마지막 분기에서의 극히 나쁜 실적에 기인한 것이다. 평균절대비율오차면에서도 ARMAX 예측치가 가장 우수한 성과를 보여주고 있으나 평균제곱오차에서와는 달리 GARCH가 역사적 변동성에 비해 더 나은 예측력을 나타내고 있다. 분기별로 예측오차를 살펴보아도 ARMAX 예측치의 모든 분기에 걸친 우월성을 확인할 수 있다. GARCH가 4개 분기에서 역사적 변동성에 비해 월등히 낮은 예측오차를 보여 주었지만 마지막 분기에서의 극히 나쁜 예측결과에 의해 전체적 예측력이 많이 떨어졌음을 알 수 있다.

식(16)에 근거하여 평균제곱오차가 세 가지의 불균등부분으로 세분되어 있다. 그 결과 예측치와 실제변동성간의 불완전한 상관관계가 예외없이 예측오차의 주된 원인으로 분석되고 있다. 불완전한 상관관계에 의한 오차를 측정하는  $P_c$ 는 상관계수가 1이면 0이 되므로 제곱오차의 대부분은 예측치와 실제변동성간의 낮은 상관관계에서 비롯됨을 알 수 있다. 이러한 양자간의 상관관계는 예측모델자체에 기인하는 것이고 예측분석자의 예측기법운용으로는 개선이 어려운 것이라고 할 수 있다.



〈표 4〉 예측력에 대한 평가통계량 (평균에 대해 조정되지 않은 값)

		AMX	GAR	HIS
1. 전예측기간 (86.7~87.10)	ME	-.0035	.0043	-.0023
	TIC	.8945	1.0052	1.0000
	MSE <sup>a)</sup>	.0059	.0074	.0073
	Pb	.0021	.0025	.0007
		(.12) <sup>b)</sup>	(.19)	(.05)
	Pv	.0064	.0469	.0003
		(5.7) <sup>b)</sup>	(3.5)	(.02)
	Pc	.9015	.9506	.9990
	(53) <sup>b)</sup>	(70)	(73)	
	MAPE <sup>c)</sup>	.1769	.2022	.2057
2. 제 1 분기 (86.7~86.10)	ME	-.0347	-.0377	-.0561
	TIC	.9677	.9901	1.0000
	MSE	.0133	.0140	.0142
	MAPE	.1916	.1881	.2004
3. 제 2 분기 (86.10~87.1)	ME	.0262	.0336	.0576
	TIC	.7525	.9927	1.0000
	MSE	.0039	.0068	.0069
	MAPE	.2148	.2349	.2429
4. 제 3 분기 (87.1~87.4)	ME	-.0311	-.0157	-.0432
	TIC	.9608	.9420	1.0000
	MSE	.0056	.0054	.0061
	MAPE	.1529	.1608	.1974
5. 제 4 분기 (87.4~87.7)	ME	.0137	.0219	.0285
	TIC	.7751	.9113	1.0000
	MSE	.0032	.0044	.0053
	MAPE	.1597	.1844	.1945
6. 제 5 분기 (87.7~87.10)	ME	.0084	.0192	.0015
	TIC	.8937	1.2578	1.0000
	MSE	.0032	.0064	.0040
	MAPE	.1652	.2425	.1931

a) 각 예측치간의 평균오차의 차이는 AMX와 GAR 사이에서만 10%의 유의수준에서 유의했다.

- b) 괄호안의 숫자는 식(15)에 나타나 있는 Theil의 불균등부분의 분자를 표시한다. 비교를 용이하게 하기 위하여 나타나 있는 숫자는 분자의 실제값에 10<sup>4</sup>를 곱하여 산출한 값이다.
- c) 각 예측치간의 평균절대비율오차의 차이는 (AMX, HIS), (AMX, GAR)의 두 쌍에서 10% 유의수준에서 유의했다.

식(14)에 나타나 있는 각 예측치에 대한 예측오차차이  $D_i$ 의 유의성을 검증하기 위해 먼저 양측 t 검증이  $D_i$ 의 평균에 대해 실시된다. 평균제공오차에 대한 검증결과 서로 다른 세 가지의 예측치간의 관계에서 단지 ARMAX만이 GARCH의 예측력에 비해 유의하게 우월함이 드러났다. 비록 역사적 변동성이 GARCH 예측치보다 평균제공오차면으로 우수한 것으로 나타났지만 그것의 차이는 통계적으로 의미없는 것이었다. 평균절대비율오차에 대한 t 검증은 평균제공오차의 경우와는 달리 (ARMAX, 역사적 변동성)과 (ARMAX, GARCH)의 두 쌍에서 유의한 예측력의 차이가 나타났다.  $D_i$ 의 평균의 부호는 <표 4>에서 추론된다는 가정하에 단측 t 검증을 해 본 결과 <표 4>에는 보고되어 있지만, 평균제공오차나 평균절대비율오차에 상관없이 ARMAX 예측치가 다른 모든 예측치에 대해 10% 유의수준에서 유의하게 우월한 예측력을 보임이 밝혀졌다. t 검증의 결과는 결론적으로 ARMAX의 다른 예측치에 대한 유의한 우월성을 보여 주었다. GARCH와 역사적 변동성간에는 평가기준에 따라 예측력순위에는 변동이 있지만 그 차이는 통계적으로 유의하지 못하다.

예측력의 차이에 대한 또하나의 유의성 검증으로 누적분포함수에 의한 검증이 전예측기간에 대하여 실시되어 그 결과가 <표 5>로 나타나 있다. 모든 경우에 있어서 確實한 確率支配(strict stochastic dominance)는 발견되지 않았다. 여전히 ARMAX 예측치가 다른 예측치에 비해 압도적 정확성을 보여 주고 있다. 이것은 ARMAX가 어떤 크기의 예측오차누적구간에서도 오차를 범할 확률이 다른 예측치의 그것보다 적다는 것을 의미한다. t 검증에서와는 달리 GARCH 예측치가 제공오차나 절대비율오차를 막론하고 역사적 변동성에 비해서 우수한 예측결과를 보이고 있다. 이 결과는 GARCH가 예측오차가 일반적으로 적을 경우(다른 예측치들도 좋은 예측결과를 보일 때) 더 좋은 예측력을 보임을 의미한다. 다시 말하면, GARCH가 <표 4>에 나타난 것과 달리 비교적 우수한 결과를 누적분포기준에서 보인 것은 그것이 다른 예측치들도 좋은 예측력을 보일 때 좀더 우수한 예측결과를 나타내고 다른 예측치들이 좋지 않은 결과를 보일 때 더욱더 나쁜 예측력을 보임을 의미한다.

〈표 5〉 累積分布函數에 의한 豫測力差異에 대한 有意性檢證

		AMX	GAR	HIS	Total
1. 제공예측 오차의 경우	AMX		$13_{1/2}$	$13_{1/2}^2$	$26_{1/2}^3$
	GAR	$1_{1/2}$		$10_{1/2}$	$11_{1/2}^2$
	HIS	$1_{1/2}^2$	$4_{1/2}$		$4_{1/2}^3$
2. 절대비율 오차의 경우	AMX		$13_{1/2}$	$14_{1/2}$	$27_{1/2}^2$
	GAR	$1_{1/2}$		$13_{1/2}$	$14_{1/2}^2$
	HIS	$1_{1/2}$	$1_{1/2}$		$1_{1/2}^2$

주) 각 숫자는 왼쪽의 각 예측치가 위쪽의 예측치보다 더 큰 누적분포함수를 보였던 구간의 수를 나타낸다. 만약 상응하는 두 예측치가 15개 누적구간 중 n개 구간에서 동일한 누적분포값을 보였다면  $1/2^n$ 으로 표기된다. 예를 들어 숫자  $13_{1/2}$ 는 왼쪽의 예측치가 위쪽의 예측치에 비해서 13개 누적구간에서 더 작은 예측오차를 보였고 한 개 누적구간에서 동일한 누적분포값을 보였음을 의미한다. 맨 오른쪽 열의 합계는 왼쪽의 예측치가 다른 모든 예측치보다 우수한 예측력을 보였던 누적 구간수의 합계를 나타내고 있다.

예측치들의 서로 다른 평균값에 의한 예측력평가결과의 왜곡을 피하기 위해 각 모델에 의한 예측치의 평균이 기준예측치인 역사적변동성의 평균과 일치하도록 조정하여 지금까지 시행했던 평가과정을 거친 결과도 우리가 이미 본 결과와 대동소이하여 여기에는 신지 않았다. ARMAX 예측치가 사용된 평가기준에 관계없이 월등한 예측력을 보여 주었다.

지금까지 살펴본 통계적 비교에 대한 대안으로 회귀분석에 의한 예측력평가 결과가 〈표 6〉에 실려 있다. 각 예측치의 통계량은  $R^2$ 가 큰 순으로 보고되어 있다. 전예측 기간에 대한 결과부터 살펴보면 ARMAX의 실제변동성의 움직임에 대한 설명력이 가장 우수하고 그 다음이 역사적 변동성, GARCH로 나타나 있다. 회귀계수들 ( $\alpha, \beta$ )의 유의성검증결과를 보면 ARMAX 예측치만이 각각 0과 1에 비유의하게 다른 것으로 나타났다. 따라서 ARMAX만이 Theil의 「完全한 豫測」의 관점에서 볼 때 불편예측치이고 效率的(efficient)이라고 말할 수 있다. 분기별 검증결과를 살펴보면 역사적 변동성이 제 1-3 분기에서 가장 높은  $R_2$ 를 보이고 있지만 1분기를 제외하고는 여전히 그것은 편의적(biased)이고 非效率的(inefficient)이다. 결국 회귀분석에 의한 결과를 종합해 보아도 모든 면에서 ARMAX 예측치의 우수성을 확인할 수 있다. GARCH의 예측결과는 여전히 좋지 않았다.

〈표 6〉 회귀분석에 의한 예측력평가 결과

ACT <sub>jt</sub> = α + βσ <sub>jt</sub> + u <sub>jt</sub>				
	σ <sub>jt</sub>	α <sup>a)</sup>	β <sup>b)</sup>	R <sup>2</sup>
1. 전예측기간 (86.7~87.10)	AMX	0.0478(1.89)	0.8511(-1.81)	0.4189
	HIS	0.1144(5.80)	0.6244(-6.01)	0.4024
	GAR	0.0905(3.42)	0.6894(-3.71)	0.3140
2. 제 1 분기 (86.7~86.10)	HIS	0.0649(0.88)	0.9679(-0.13)	0.3392
	AMX	0.0357(0.38)	0.9966(-0.01)	0.2773
	GAR	0.0331(0.33)	1.0156(0.05)	0.2527
3. 제 2 분기 (86.10~87.1)	HIS	0.0405(1.68)	0.7049(-4.38)	0.7961
	AMX	-0.0409(-0.99)	1.0489(0.37)	0.6931
	GAR	0.0171(0.32)	0.8359(-0.99)	0.4754
4. 제 3 분기 (87.1~87.4)	HIS	0.1090(3.34)	0.7606(-2.15)	0.6258
	AMX	0.0288(0.53)	1.0081(0.04)	0.5195
	GAR	0.0619(1.19)	0.8472(-0.92)	0.4829
5. 제 4 분기 (87.4~87.7)	AMX	0.0892(2.57)	0.6610(-3.07)	0.5615
	HIS	0.1204(3.85)	0.5323(-4.98)	0.5341
	GAR	0.1089(3.00)	0.5803(-3.74)	0.4879
6. 제 5 분기 (87.7~87.10)	AMX	0.0931(2.37)	0.6580(-2.67)	0.4843
	HIS	0.1195(2.71)	0.5824(-2.82)	0.3562
	GAR	0.1591(3.71)	0.4201(-4.31)	0.2583

a) 괄호안의 숫자는 가설 α=0에 대한 t 통계량을 표시한다.

b) 괄호안의 숫자는 가설 β=1에 대한 t 통계량을 표시한다.

## V. 結 論

재무관리의 이론과 실제에 있어서의 수익률 변동성 예측의 중요성에 비추어 실제변동성을 효율적으로 예측할 수 있는 예측모델의 중요성은 간과할 수 없다. 이러한 필요성에 대응하여 이 연구에서는 서로 다른 세 가지의 시계열예측모델이 이론적으로 도출되고 각각의 실제수익률의 변동성에 대한 예측력이 다양한 평가기준에 의해 검증·비교 되었다.

실증결과에 따르면 선택된 독립변수들에 근거한 ARMAX 예측치가 다른 예측치들 보다 모든 평가기준에서 우수한 예측력을 보였다. 앞서 기술한 바와 같이 검증대상 기간은 미국 주식시장이 급격한 수익률변동을 자주 시현했던 기간이었다. 그럼에도 불구하고 ARMAX 예측치가 전예측기간을 통하여 30개 표본주식에서 15개에 대하여 15% 이하의 평균절대비율을 보였다라는 것은 정교한 예측력을 보였다고 평가받을 만하다. 이러한 결과에 비추어 수익률변동성에 좀더 영향을 미치는 새로운 독립변수들이 추가되고 모델을 위한 時差母數(delay parameter)들이 세심하게 선택된다면 ARMAX 예측모델의 예측력은 더욱 제고될 것으로 기대된다. ARMAX 모델의 정확성을 높이기 위한 앞으로의 연구과제로 표본주식의 옵션으로부터 산출된 표준편차(implied standard deviation)를 독립변수로 사용하는 것이 고려되어야 할 것이다. ARMAX 예측치의 또 다른 이점은 한번 정확한 예측모델이 시계열분석에 의해 도출되면 새로운 시점에서의 예측을 위한 정기적인 모수변경은 투입되는 자료들만 간단히 바꾸어 줌으로써 용이하게 행해진다는 것이다. 즉, 모델을 위한 고정비용이 일단 투입된 후의 새로운 경제환경에 대응한 가변비용이 다른 어떤 시계열 예측모델에 비해 적다는 유용성을 가지고 있는 것이다.

GARCH 예측치는 기대와는 달리 만족스러운 예측력을 보여주지 못했다. 이것은 주로 모델의 모수추정에 쓰인 282개 주간의 수익률자료가 너무 긴 기간을 커버하여 주가수익률의 시계열에 景氣循環的(cyclical) 내지는 構造的(structural) 변동이 포함되어 있다는 것에 기인할 것이다. 이러한 변동은 GARCH의 예측력을 감소시키는 방향으로 작용하게 될 것이다. 또한, <표 6>의 제 5분기 결과에서 보듯 GARCH 모델의 속성상 급격한 수익률변동성의 움직임에 대응하는 모수들의 변화가 어렵다는 점이다. 따라서 GARCH 모델의 전반적인 정확성에도 불구하고 간헐적인 수익률 급변기의 좋지 않은 결과로 인하여 전반적인 예측력의 저하가 초래되는 경향이 있었다. 역사적 변동성은 기간에 따라 약간의 변화는 있었지만 전체적으로 만족할만한 예측력을 보여주지는 못했다. 이것은 Poterba와 Summers(1986), Franks와 Schwartz(1988)가 지적한 것처럼 변동성에 대한 충격의 영향이 다음 분기에 지속되기에는 너무나 빨리 소멸되고 있음을 반증한다.

본 연구의 실증부분은 충분한 표본들과 자료기간 그리고 기존의 연구와 비교해서 보다 정교한 여러 차원의 평가기준을 적용하여 각 모델의 예측력을 검증했기 때문에 표본주식의 구성과 자료기간의 변경 등에 의해서 연구결과가 영향받지는 않으리라고 예상된다. 표본주식으로는 거래량 상위 30개 주식을 사용했으며 예측력검증기간도 2년에 걸쳐 5개 분기에 대해 시행하였다. 각 분기마다 통계적 비교와 회귀분석을 동시에 시행하여 각 모델의 예측력순위를 확인했다. 또한, 자료상의 왜곡을 막기

위하여 평균에 대해 조정된 예측치들에 대하여 동일한 예측력검증절차를 거쳤으며 예측력차이의 유의성검증을 위해서도 t 검증과 확률지배기준을 거듭 적용함으로써 정확성을 기하려 했다. 약간의 예외는 있었지만 전예측기간과 5개 분기에 걸쳐 각 평가기준에 의한 대상모델들의 예측력순위는 거의 변동이 없었다. 본 연구의 실증 결과에는 명시되지 않았지만 대상기간동안 다른 표본주식들에 비해 변동성의 극심한 변동을 보였던 일부 주식들을 제외하고 동일한 예측력검증을 실시한 결과도 각 평가기준에 따라 대부분 동일한 실증결과를 보였다.

앞서 지적한 대로 Black과 Scholes(1972)는 좀 더 정확한 수익률변동성 예측치가 옵션가격결정모형의 성과를 유의하게 제고시킴을 보여주었다. 또한, 여러 옵션가격결정모형들의 이론가격과 시장가격과의 괴리의 가장 중요한 요인중의 하나로 잘못 예측된 변동성예측치의 모델에의 투입이 지적되고 있다. 이러한 점에 비추어 보다 정확한 옵션의 이론가격을 도출하기 위해 본 연구에서 예측력이 실증된 ARMAX 예측치를 여러 옵션가격결정모형의 변동성투입요소로 사용하는 것이 바람직할 것이다. 본 연구는 옵션시장의 효율성 검증에도 시사하는 바가 크다. 보다 정확한 변동성예측치를 이론가격의 도출에 사용함으로써 옵션시장에서 비정상적 초과이익의 창출이 가능한지를 결정하는 데 본 연구의 결과는 적지 않은 공헌을 할 것으로 기대된다.

## 참 고 문 헌

- Akgiray, V., "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns : Evidence and Forecasts," *Journal of Business* 62, No.1 (1982), 55-80.
- Beckers, S., "Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability," *Journal of Banking and Finance* 5 (1981), 363-381.
- Berndt, E. K., B. H. Hall, R. E. Hall, and J. A. Hausman, "Estimation Inference in Nonlinear Structural Models," *Annals of Economics and Social Measurement*, No. 4, 653-665.
- Black, F., "Studies of Stock Price Volatility Changes," Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistical Section, August 1976a, 177-181.
- Black, F., "One Way to Estimate Volatility," *Fisher Black on Options*, Vol. 1, No. 8 (May 1976b.)
- Black, F. and M. Scholes, "The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency," *Journal of Finance* (1972), 399-417.
- Blattberg, R. C. and N. J. Gonedes, "A Comparison of the Stable and Student Distribution of Statistical Models for Stock Prices," *Journal of Business* 47 (April 1974), 244-280.
- Bollerslev, T., "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return," *The Review of Economics and Statistics* (1987), 542-547.
- Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31 (1986), 307-327.
- Box, G. E. P. and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Holden-Day, 1976.
- Chiras, D. P. and S. Manaster, "The Information Content of Option Prices and A Test of Market Efficiency," *Journal of Financial Economics* 6 (1978), 213-234.
- Christie, A. A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances : Value, Leverage and Interest Rate Effects," *Journal of Financial Economics* 10 (1982), 407-432.

- Engle, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica* 50, No.4 (July 1982), 987-1007.
- Engle, R. F. and D. Kraft, Multiperiod Forecast Error Variances of Inflation Estimated from ARCH Models, in : A. Zellner, ed., *Applied Time Series Analysis of Economic Data* (Bureau of the Census, Washington, DC), 1983, 293-302.
- Fama, E. F., "Efficient Capital Markets, A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance* 25 (May 1970), 383-417.
- Fama, E. F., "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business* 38 (January 1965), 34-105.
- Franks, J. R. and E. S. Schwartz, "The Stochastic Behaviour of Market Variance Implied in the Prices of Index Options : Evidence on Leverage, Volume and Other Effects," Working Paper, UCLA, 1988.
- French, K. R., G. W. Schwert, and R. F. Stambaugh, "Expected Stock Returns and Volatility," *Journal of Financial Economics* 19 (1987), 3-29.
- Latane, H. A. and R. J. Rendleman, "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices," *Journal of Finance* (May 1976), 369-381.
- Macbeth, J. D. and L. J. Merville, "Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models," *Journal of Finance* (May 1980), 285-303.
- Merton, R. C., "On Estimating the Expected Return on the Market : An Explanatory Investigation," *Journal of Financial Economics* 8 (1980), 323-361.
- Merville, L. J. and D. R. Pieptea, "Stock-Price Volatility, Mean-Reverting Diffusion, and Noise," *Journal of Financial Economics* 24 (1989), 193-214.
- Park, T. K., "An Empirical Study of Volatility Estimation for the Black-Scholes Option Pricing Model," Research Paper at Indiana University, 1987.
- Poterba, J. M. and L. H. Summers, "The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations," *American Economic Review* 76, No.5 (December 1986), 1142-1151.
- Rosenberg, B., "The Behavior of Random Variable with Nonstationary Variance and the Distribution of Security Prices," Working Paper, December 1972.
- Schmalensee, R. and R. R. Trippi, "Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia," *Journal of Finance* 33 (1978), 129-147.



Theil, H., Applied Economic Forecasting, Amsterdam : North Holland Publishing Co.,  
1966.