財務管理硏究 第九卷 第二號(1992.12)

離散的 時間下의 옵션價格決定模型에 관한 小考

金 圭 泳*

〈요 약〉

본 논문에서는 離散的 時間下의 옵션價格決定模型이 市場均衡概念과 一貫性을 갖지 않을 수 있다고 주장된다.

구체적으로, 이 모형의 유도에 필수불가결한 이변량 자연대수 정규분포의 기본가정이 경제의 市場清算條件들과 상충될 수 있음이 보여진다.

따라서, 이산적 시간하의 옵션가격결정모형은 다음과 같이 아주 제약적인 가정하에서만 유도될 수 있을 것이다.

즉, 基礎資産이 總體的 富(aggregate wealth)의 유일한 구성요소이거나, 혹은 옵션이 總體的 富에 대해서 발행되는 것으로 가정하는 것이다.

I. 序 論

Black과 Scholes(1973, B-S)에 의해 옵션價格決定模型이 개발된 이래, 옵션가격결정이론은 재무론분야의 가장 중요한 연구과제들중의 하나로 간주되어 왔다. B-S는 옵션의 상대가격이 균형상태에서는 재정이익이 존재하지 않는다는 조건(no arbitrage condition)으로부터 오직 잠재적으로 관찰가능한 변수들로 표시될 수 있음을 다음 몇가지 가정들하에서 連續的 時間模型(continuous time trading model)을 이용하여 보이고 있다. 즉, 기초자산인 주식의 수익률이 이토의 確率過程(Ito Stochastic Process)을 따르고, 자본시장은 마찰이 없으며(frictionless), 그리고 투자자의 한계효용이 양의 값을 갖는다는 가정등이 그것이다.

한편, Rubinstein(1974)은 B-S옵션가격결정모형이 투자자들의 위험중립성을 가정하면 용이하게 유도될 수 있다는 점에 착안하여, B-S모형이 離散的 時間模型(discrete time trading model)하에서도 성립할 수 있는 몇가지 충분조건들을 제시하였다. 이는 대표적 투자자가 一定相對危險回避(constant relative risk aversion ; CRRA)의 효용

---

* 朝鮮大學校 經營學科 助教授

함수를 갖고, 기초자산인 주식과 總體的 富(aggregate wealth)의 수익률들이 결합 자연대수 정규분포(joint lognormal distribution)를 따른다는 것 등이다.

Brennan(1979)은 총화문제(aggregation problem)가 해결된 단순경제에서 Rubinstein의 결과들을 일반화시켰으며, 이를 위험중립적 가치평가관계식(risk neutral valuation relationships ; RNVRs)이라고 부르고 있다.[1] RNVRs는 Stapleton과 Subrahmanyam(1984) 그리고 VanKudre(1984)등에 의해 총체적 부와 주식의 수익률에 관한 대체적 가정들[2]의 개발을 통해 더욱 확장되었다.

본 논문에서는 Brennan-Rubinstein(B-R)의 접근방법은 시장균형개념과 상충될 수 있다고 주장된다. 구체적으로, 이변량 자연대수 정규분포의 가정은 총화문제가 해결된 경제에서의 市場淸算條件(market clearing conditions)들을 사실상 위배하고 있음이 보여진다. 따라서, RNVRs는 기초자산인 주식이 총체적 부의 유일한 구성요소라는 가정하에서만 유효하다는 것이 본 논문의 결론이라고 할 수 있다.

이러한 결론은 자연대수 정규분포 확률변수들의 선형결합은 일반적으로 자연대수 정규분포 확률변수가 될 수 없다는 잘 알려진 통계적 사실(well-known statistical fact)에만 의존하는 것은 아니다. 본 논문에서 보다 강조되는 바는 RNVRs의 이변량분포의 가정에 있어서 정규분포, 자연대수 정규분포 그리고 이항분포를 막론하고 기초자산의 수익률과 총체적 부가 완전 양의 상관관계에 있다는 자의적인 설정이 이산적 옵션가격결정모형의 원초적 한계를 내포하고 있다는 것이다.

II. 主要結果

Brennan(1979)을 따라, 총화문제가 해결된 단일기간 경제를 고려하자. 代表的 投資者(representative investor)의 소비 및 포트폴리오 결정문제는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\underset{\{C_0, X_j\}}{\mathrm{Max}}[\,U(C_0 + E[V(\tilde{W}_1)]]$$

---

1) 총화(aggregation)의 필요충분조건들에 대해서는 Rubinstein(1974)과 Brennan-Kraus(1978)를 참조할 것.

2) Stapleton-Subrahmanyam(1984)은 기초자산인 주식과 총체적 부의 수익률들이 결합 이항분포(joint multiplicative or additive binomial distribution)를 따른다고 가정한다. Vankudre(1984)는 $W_1 = \tilde{P}_1^a \cdot \tilde{e}$ 또는 $\tilde{W}_1 = a\tilde{P}_1 + \tilde{e}$($\tilde{W}_1$과 $\tilde{P}_1$은 총체적 부와 기초자산의 수익률, a는 임의의 상수, 그리고 $\tilde{e}$는 $\tilde{P}_1$과 독립적인 확률변수)라고 가정한다.

$$\text{s. t. } \tilde{W}_1 = (W_0 - C_0)r_f + \sum_{j=1}^{n} X_j(\tilde{P}_j - P_{jo}r_f)$$

여기서 W_0 = 대표적 투자자의 최초의 부
$\tilde{W}_1$ = 대표적 투자자의 최종의 부
C_0 = 대표적 투자자의 최초의 소비
$U(\cdot)$ = C_0에 대해 정의되는 효용함수, $U'>0$, $U''>0$
$V(\cdot)$ = $\tilde{W}_1$에 대해 정의되는 효용함수, $V'>0$, $V''<0$
r_f = 1+무위험이자율
$\tilde{P}_j$ = 위험자산 j의 기말가격(j=1, 2, … , n)
P_{jo} = 위험자산 j의 기초가격
X_j = 위험자산 j의 매입 단위수
$E[\cdot]$ = 기대치의 연산

(C_0^i, X_j^i)를 투자자 i의 최적선택이라고 하자. 그러면 시장청산조건들[3]에 의해 $\sum_{i=1}^{m} C_0^i = C_0$ 그리고 $\sum_{j=1}^{m} X_j = \bar{X}_j$ (j=1, 2, …, n), 여기에서 $\bar{X}_j$=위험자산 j의 기발행 단위수 이다.

무위험 자산의 總體的 供給(aggregate supply)이 0이라고 하면, 균형상태에서[4] $\tilde{W}_1 = \sum_{i=1}^{m} \tilde{W}_1^i = \sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j \tilde{P}_j$임을 쉽게 보일 수 있다. 그러므로 이 경제에서는 총체적인 최종의 부는 모든 위험자산의 기말가격들의 선형결합이다. 그러나, 기초자산인 주식의 가격과 총체적인 부에 관한 이변량분포의 가정이 B-R접근방법에서의 기초자산과 옵션의 가격결정에 핵심적인 역할을 수행하고 있음에 주목하여야 한다.

기본적으로, 균형개념이 의미를 갖기 위해서는 어떤 확률분포의 가정이든지 한 경제의 시장청산조건들과 일관성을 유지하여야 할 것이다. 이제, 이변량분포의 가정이 과연 시장청산조건들과 일관성을 갖는가를 검토하기로 한다.

---

3) 이 경제에는 (n+1)개의 자산시장(하나의 무위험자산시장과 n개의 위험자산시장)이 존재한다. 무위험자산시장은 항상 청산조건을 만족하고 n개의 위험자산시장의 청산조건은

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = \bar{x}_j, \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$ 이다.

4) 이 균형조건은 Rubinstein(1976)의 조건, 즉 (3)'과 동일하다.

1. 二變量 正規分布

二變量 正規分布(bivariate normal distribution)보다 약한 조건은 $\tilde{W}_1 = a\tilde{P}_1 + \tilde{e}$, 여기에서 a는 임의의 상수이고 $\tilde{P}_1$와 $\tilde{e}$는 임의의 확률분포를 갖는다.

Brennan(1979)의 이변량 정규분포의 가정과 Stapleton과 Subrahmanyam(1984)의 가산적 이변량 이항분포의 가정은 이러한 조건의 특수한 경우라고 할 수 있다.

이변량 정규분포의 가정을 한 경제의 시장청산조건들과 비교해 보면, 다음과 같은 사실들을 관찰할 수 있다.

첫째, 모든 위험자산의 기말가격의 선형결합은 정규분포를 따라야 한다.

둘째, 정규분포를 따르는 확률변수들의 선형결합은 또한 정규분포를 가지므로, 이변량 정규분포의 가정은 이산적 시간하의 옵션가격결정모형에서 시장균형개념과 일관성을 갖는다. 따라서, 다음의 정리가 성립한다.

정리 1 : 총화문제가 해결되고 모든 위험자산들의 최초의 가격들이 내생적으로 결정되는 Brennan-Rubinstein경제를 고려하자. 총체적인 부와 기초자산인 주식의 가격이 이변량 정규분포를 따른다는 가정은 이 경제의 시장청산조건들과 일관성을 갖는다.

증명 : 단순화를 위하여, 하나의 무위험자산과 세개의 위험자산을 고려하고, $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2 = \tilde{X}_3 = 1$이라고 가정하자.[5)]

시장청산조건들로 부터 $\tilde{W}_1 = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 + \tilde{P}_3$, 그리고 이변량 정규분포의 가정으로부터 $\tilde{W}_1 = \tilde{P}_1 + \tilde{e}$, 여기에서 $\tilde{P}_1$와 $\tilde{e}$는 임의의 정규분포를 따른다. $\tilde{e} = \tilde{P}_2 + \tilde{P}_3$로 정의하면, 이변량 정규분포의 가정이 시장청산조건들과 일관성이 있음을 알 수 있다. 二變量 正規分布의 假定[6)]은 비록 주식의 有限責任問題(limited liability problem)에 위배되기는 하지만, 한 경제의 시장청산조건들의 맥락에서 매우 잘 합리화된다.

Q.E.D

---

5) 이러한 단순화는 결론의 일반성에 영향을 미치지 않는다. x_j는 대표적 투자자가 균형상태에서 보유하는 위험자산들의 지분으로 해석된다.

6) Brennan(1979)의 정리 5와 Stapleton-Subrahmanyam(1984)의 명제 II는 위험자산이 하나인 경우에만 성립함을 주목하라. 왜냐하면, $\tilde{W}_1$과 $\tilde{P}_1$의 완전 양의 상관관계는 단일변량 정규분포를 함축하기 때문이다. 따라서, 이변량 정규분포하의 이산적 옵션가격결정모형은 사실상 위험자산이 2개이상 존재하는 경우로 확장될 수 없다.

2. 二變量 自然代數 正規分布

이변량 자연대수 정규분포(bivariate lognormal distribution)의 가정은 대표적 투자자가 CRRA 효용함수를 갖는다는 가정[7]과 더불어 연속적 시간하의 B-S옵션가격결정모형을 이산적 시간하의 옵션가격결정모형으로 일반화하는데 있어서 핵심을 이루는데, 이는 시장청산조건들과 일관성이 없음이 증명될 수 있다.

이변량 정규분포의 가정보다 약한 조건은 $\tilde{W}_1=\tilde{P}_1^a\cdot\tilde{e}$, 여기에서 a는 임의의 상수, $\tilde{P}_1$과 $\tilde{e}$는 임의의 확률분포를 갖는다.

Rubinstein(1974)과 Brennan(1979)의 이변량 자연대수 정규분포의 가정이나 Stapleton-Subrahmanyam(1984)의 곱의 이변량 이항분포의 가정은 이러한 조건의 특수한 경우로 볼 수 있다.

정리 2 : $\tilde{W}_1$과 $\tilde{P}_1$에 관한 이변량 자연대수 정규분포의 가정은 Rubinstein-Brennan경제에서의 시장청산조건들에 위배된다.

즉, $\tilde{W}_1=\sum_{j=1}^{n}\tilde{X}_j\tilde{P}_j$의 관계식이 성립하지 않는다.

증명 : 단순화를 위하여, 하나의 무위험자산과 두개의 위험자산이 존재하고, $\tilde{X}_1=\tilde{X}_2=1$이라고 가정한다. 시장청산조건들로부터 $\tilde{W}_1=\tilde{P}_1+\tilde{P}_2$, 그리고 이변량 자연대수 정규분포의 가정으로 부터 $\ln\tilde{W}_1=a\ln\tilde{P}_1+\ln\tilde{e}$, 여기에서 a는 임의의 상수, 그리고 $\tilde{P}_1$과 $\tilde{e}$는 임의의 자연대수 정규분포를 따르는 확률변수이다.

이변량 자연대수 정규분포의 가정이 시장청산조건들과 일관성을 갖는다고 하자. 그러면 이는 자연대수 정규확률변수들의 선형결합은 또한 자연대수 정규확률변수라고 하는 것이 된다. 이러한 경우는 $\tilde{P}_2=b\tilde{P}_1$(b는 임의의 상수)가 성립할 때에만 발생할 수 있다. 그러나, 이것은 두개의 위험자산이 존재한다는 것에 모순이 된다.

Q.E.D.

혹자는 이변량 정규분포의 가정에 의해서 $\tilde{P}_2$가 자연대수 정규분포를 따르도록 요구되는 것은 아니라고 주장할 것이다. 이러한 주장에 대해서는 다음 세가지 사실들이 제시될 수 있을 것이다.

첫째, Brennan-Rubinstein모형이 기초자산의 선택에 관계없이 성립할 수 있으려면 $\tilde{P}_2$은 자연대수 정규분포를 따라야만 할 것이다.

7) 이변량 정규분포의 가정하에서 Brennan(1979)의 결과가 모든 CRRA효용함수에 대하여 성립하는 것은 결코 아니다.

둘째, $\hat{P}_2 = W_1 - \hat{P}_1$가 성립하는 임의의 확률변수를 $\hat{P}_2$로 정의한다는 주장은 설득력이 없다. 왜냐하면, 그렇게 정의되는 확률변수 $\hat{P}_2$가 존재한다면 이는 아주 기괴한 분포가 될 것이기 때문이다.

셋째, RNVRs의 유도에 필수불가결한 이변량 자연대수 정규분포의 가정은 사실상 단일변량 자연대수 정규분포의 가정과 다르지 않다[8]라는 사실이 지적될 수 있다.

III. 結 論

본 논문에서는 離散的 時間下의 옵션價格決定模型을 도출하는 데 있어서 핵심을 이루는 기본가정, 즉 總體的 富와 기초자산의 가격분포에 관한 가정이 한 경제의 市場淸算條件들과 一貫性을 갖지 않을 수 있음을 밝혔다. 이변량 정규분포의 가정은 시장균형개념과 상충되지 않으나[9], 이변량 자연대수 정규분포의 가정은 총화문제가 해결된 경제에서의 시장청산조건들과 상충될 수 있는 것이다.

혹자는 이변량 자연대수 정규분포의 가정은, 다른 위험자산들의 확률분포에 대해서는 언급하고 있지 않으므로, 이산적 시간하의 옵션가격결정모형은 여전히 유효하다고 주장할지도 모른다. 그러나 이러한 주장은 이산적 시간하의 옵션가격결정모형이 連續的 時間下의 옵션가격모형을 시장균형모형의 관점에서 일반화시킨 취지에 비추어 볼 때 설득력이 없다고 할 수 있다. 자산가격의 확률분포에 관한 가정은 반드시 시장청산조건들을 위반하지 않는 범위내에서 이루어져야 한다는 것이 본 논문의 결론이다.

연속적 시간하의 옵션가격결정모형의 주요 경쟁파라다임으로서 이산적 시간접근방법은 기초자산이 총체적 자산의 유일한 구성요소라는 가정하[10]에서 유효하다고 생각된다. 이러한 관점에서 Merton(1973)의 통찰력[11]은 균형옵션가격결정모형이 잘 일반화될 수 없음을 함축하고 있다.

---

8) Brennan(1979)의 정리 2와 Stapleton-Subrahmanyam(1984)의 명제 I에서 가정된 $\ln W_1$과 $\ln P_1$간의 완전 양의 상관관계를 주목하라.

9) 각주 6)에서 언급한 바와 같이 이것이 바로 이산적 옵션가격결정모형이 2개 이상의 위험자산이 존재하는 경우에 성립한다는 것을 보장하지는 않는다.

10) 이는 Breeden-Litzenberger(1978)의 정리 3에 의하여 지지될 수 있다.

11) Merton(1973)은 B-S옵션가격결정모형이 이산적 시간하의 균형모형이 될 수 있는 조건들로 첫째, 주식수익률이 자연대수 정규분포를 따르고 둘째, 투자자의 효용함수가 CRRA형태이며 셋째, 옵션과 무위험채권의 총체적 공급이 0이다 등을 제시하고 있다.

참 고 문 헌

Aitchison, J. and Brown, J. M. C., The Lognormal Distribution, Cambridge University Press, Cambridge, 1963.

Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81 (1973), 634-654.

Breeden, D. T. and P. H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business* 57 (1978), 621-652.

Brennan, M. J., "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models.", *Journal of Finance* 34 (1979), 53-68.

Brennan, M. J., and A. Kraus, "Necessary Conditions for Aggregation in Securities Markets," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (September 1978), 407-418.

Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1973), 141-183.

Rubinstein, M. E., "An Aggregation Theorem for Securities Markets," *Journal of Financial Economics* 1 (1974), 225-224.

Rubinstein, M. E., "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *The Bell Journal of Economics* 7 (Autumn 1976), 407－425.

Stapleton, R. C. and M. G. Subrahmanyam, "The Valuation of Options When Asset Returns are Generated by a Binomial Process," *Journal of Finance* 39 (1984), 1525-1539.

VanKudre, P., "The Pricing of Options in Discrete Time," Unpublished Manuscript, The University of Pennsylvania, 1984.