財務管理研究 第九卷 第一號(1992.6)

추계적 利子率下에서 옵션評價를 위한 單純接近法*

金 仁 俊**

〈요 약〉

이 논문에서는 주식의 수익률 대신 超過收益率에 초점을 맞추므로서 기존의 옵션評價模型들의 제약점들을 극복하여 추계적 利子率下에서 株式옵션에 대한 간단한 評價式을 유도하였다. 이 논문에서 제시하는 모형은 표면적으로는 Merton의 모형과 유사하지만 경제학적 및 실증적 의미에는 중요한 차이가 있으며, 株式收益率의 瞬間的 標準偏差가 이자율에 따라서 변하므로 이자율의 불확실성이 옵션가격결정에 중요한 역할을 할 수 있음을 보여준다. 옵션가격으로부터 구한 주식수익률의 암묵적 표준편차와 주식가격으로부터 구한 주식수익률의 표준편차 사이의 관계에 대한 상충되는 실증적 결과는 利子率의 不確實性을 옵션評價模型에 반영하지 못한데 기인한다고 할 수 있다.

I. 序 論

옵션評價模型은 최근의 재무관련 연구중에서 가장 중요한 발전을 이루고 있는 분야의 하나이다. Black과 Scholes(1973)는 유럽형 買入權附 옵션의 閉型解(closed-form solution)를 처음으로 유도하였다. Black과 Scholes의 모형은 원래 이자율이 일정하다는 가정하에서 유도되었는데, 그 후 추계적 이자율의 적용에로 일반화 되었다. Merton(1973)은 옵션과 같은 날짜에 만기가 되는 無危險債券(default-free bond)의 가격 변화에 대하여 時間-同次(time-homogeneous)의 추계적 과정을 가정하고, 추계적 이자율하에서의 옵션평가모형을 개발하였다. Brenner, Courtadon 그리고 Subrahmanyam(1987)은 추계적 이자율하에서의 주가지수옵션의 평가모형을 제시하고 이것을 검증하였다. 그들은 이자율의 변화가 이자율의 수준에 비례하는 標準偏差(volatility)로 平均-復歸(mean-reverting)하는 추계적 과정에 지배되는 것으로 가정하였다. 그들의 모형에서는 이자율이 상태변수로 추가되어, 옵션함수를 얻기 위하여는 두 개의

---

* 이 논문은 1992년도 韓國財務管理會 春季硏究發表會에서 발표한 것임.

** 韓國科學技術院 經營政策學科 助敎授

상태변수로 이루어진 편미분방정식을 풀어야 한다. 이 경우 폐형해는 구할 수 없었으며, 옵션평가식을 풀기 위하여 差分(finite-difference)방법이 이용되었다. 최근에 Rabinovitch(1989)는 이자율이 평균-복귀 Ornstein-Uhlenbeck 과정을 따른다는 가정하에서 Merton의 접근법을 이용하여, 주식의 매입권부를 위한 폐형 평가식을 유도하였다.

지금까지 개발된 추계적 利子率下에서의 옵션評價模型들은 이자율 또는 무위험채권가치의 움직임을 지배하는 추계적 과정에 대한 제한적 가정을 하고 있다. 이 논문의 목적은 Merton의 접근법을 일반화하여 이자율 또는 무위험채권 가치의 변화에 대한 제한적 가정이 없이 추계적 이자율하에서의 주식옵션에 대한 평가식을 單純接近法을 이용하여 유도하려는 것이다. 이 논문에서는 무위험 단위할인채권이 交換의 基本單位(numeraire)로 이용되는 경제체제에서 옵션평가를 분석함으로써 현존하는 모형들이 요구하는 것보다 약한 가정하에서 閉型解를 유도할 수 있다.

자본시장이 발달된 미국의 조직화된 거래소에서는 대부분 만기가 두 달 미만인 옵션을 거래하고 있다. Rabinovitch가 지적했듯이, 만약 이자율의 표준편차가 주식수익률의 표준편차보다 현저하게 작다면 (그것은 간단한 관찰로도 알 수 있다), 만기일이 가까운 옵션에 대하여는 그의 모형에서 얻어진 이론적 옵션가치가 Black과 Scholes의 모형에서 얻어지는 것과 크게 다르지 않을 것이다. 다시 말해서 추계적 이자율이 옵션가치에 미치는 영향은 투자자들의 지대한 관심을 끌만한 정도가 되지 못한다는 것이다. 이것이 옵션의 실증적 문헌에서 추계적 이자율이 관심을 받지 못한 이유이다. 그러나 이 논문에서 제시하는 모형에서는 株式收益率의 瞬間的 標準偏差가 이자율에 의존하기 때문에 利子率의 不確實性이 옵션가격에 적지않은 영향을 줄 수 있다. 장기옵션의 평가에 있어서는 본 모형의 유용성이 더욱 두드러지게 나타나리라는 것을 쉽게 추측할 수 있다. 이러한 점에 비추어 Black과 Scholes의 모형을 이 논문의 모형과 비교하여 실증적 의미를 검토함으로써 옵션평가모형에 대한 우리의 이해를 더욱 증진시킬 수 있다.

II. 評價模型

행사가격이 $K이며, 시각 T에 만기가 되는 주식에 발행된 買入權附 옵션을 평가하여 보자. 시장은 완전하고 거래는 연속적으로 발생한다고 가정한다. 매입권부의 만기까지의 시간을 $\tau=T-t$로, 시각 T에서 $1이 지급되는 無危險 單位割引債券의

시각 t에서의 가격을 $B(\tau)$로 표시하자. $B(\tau)$의 변화는 擴散過程(diffusion process)을 따른다고 가정한다.

$$dB/B = \alpha(B,\tau)dt + \delta(B,\tau)dz_1 \tag{1}$$

여기서 $\alpha(B,\tau)$는 무위험 할인채권의 순간적 기대수익률이고, $\delta(B,\tau)$는 무위험채권 수익률의 순간적 표준편차이며, dz_1은 표준 Wiener 과정이다. 무위험채권 가격은 만기 시점에서 1로 수렴해야 하므로, 추계적 과정 (1)에서 $\delta(1,0)=0$의 제약이 필요하다. 그러나 $\alpha(B,\tau)$와 $\delta(B,\tau)$의 함수형태는 사전에 제한할 필요가 없다.

Rabinovitch는 기초주식의 가격과 이자율에 대한 추계적 과정들을 가정하여 옵션 평가 문제를 분석하였다. 그의 모형에서 추계적 이자율이 옵션가치에 별로 영향을 미치는 않는 것은 주식수익률의 표준편차가 이자율과 무관하다는 가정에 기인한다. 이러한 점을 고려하여 Brenner, Courtadon 그리고 Subrahmanyam은 주식수익률의 표준편차가 이자율의 함수라는 가정을 도입하여 옵션평가 문제를 다루었다. 그러나 이러한 접근법은 주식수익률의 표준편차와 이자율의 함수관계를 사전에 알아야 한다는 어려움이 따른다. 본 논문에서는 주식의 超過收益率에 초점을 맞추므로서 이러한 제약점들을 극복하였다.

기초주식의 가격을 S라 표시하고 기초주식은 매입권부의 만기까지 어떠한 배당도 하지 않는다고 가정한다. 무위험채권을 기본단위로 하여 표시한 주식의 가격을 $P=S/B(\tau)$로 정의하자. 변수 P는 주식과 무위험채권의 가격을 관찰함으로써 쉽게 계산될 수 있다. 그리고 그것의 수익률은 주식수익률과 무위험수익률의 차이, 즉 超過收益率(excess rate of return)로 설명될 수 있다. P에 대한 추계적 과정은 時間-同次(time-homogeneous) 擴散過程으로 가정한다.

$$dP/P = \mu(P,\tau)dt + \sigma(\tau)dz_2 \tag{2}$$

여기서 $\mu(P,\tau)$는 주식의 순간적 기대초과수익률이며, $\sigma(\tau)$는 초과주식수익률의 순간적 표준편차, dz_2는 표준 Wiener 과정이다. 원칙적으로 추계적과정 (2)의 母數(parameters)들은 초과주식수익률의 과거의 자료로부터 계산될 수 있다. 여기서 초과주식수익률의 순간적 표준편차는 만기까지의 시간에만 의존하는 確定的(deterministic) 函수라고 가정한다. 이 가정은 간단한 폐형해를 구하기 위하여 필요하나, 무위험채권 수익률과 주식수익률의 순간적 표준편차가 만기까지의 시간에만 의존하는 확정적 함수라는 Merton과 Rabinovitch의 가정보다 더 제약적일 것은 없다. $C(S,B(\tau),\tau)$는 시각

t에서 기존주식가격, 무위험채권의 가격 그리고 만기까지의 시간으로 결정되는 매입권부의 가격이라고 하자. 시각 t에서 무위험 단위할인채권을 기본단위로 하는 매입권부의 가격을 $V(P,\tau)=C/B(\tau)$로 정의하자. (본 모형에서는 모든 가격이 무위험 단위할인채권을 交換의 基本單位(numeraire)로 사용하여 표현된다.) 그러면 $V(P,\tau)$는 다음의 편미분방정식에 지배된다.[1)]

$$1/2\sigma^2(\tau)P^2V_{pp} = V_\tau \tag{3}$$

매입권부 가격을 P의 함수로 정의하였으므로, $V(P,\tau)$를 결정하기 위하여는 S 대신에 P로써 買入權附의 成果(payoff)를 정의할 필요가 있다. 만기시점에서는 $P=S$ 이므로, 만기조건을 P로 표현할 수 있다.

$$\lim_{\tau\to 0} V(P,\tau) = \max[P-K,\ 0] \tag{3a}$$

추가적으로, 解의 單獨性(uniqueness)을 보장하기 위한 定則性 條件(regularity condition)이 필요하다.

$$\lim_{P\to\infty} \frac{\partial V}{\partial P} = 1 \tag{3b}$$

이 조건은 기준주식가격이 무한히 증가하면 만기에 매입권부를 행사할 가능성이 100%가 됨을 의미한다. Merton(1973)의 결과를 응용하면 (3a)와 (3b)의 조건하에 편미분방정식 (3)의 解를 바로 유도할 수 있다.

$$V(P,\tau) = P\chi(d_1) - K\chi(d_2) \tag{4}$$

여기서 $\chi(\cdot)$가 단위정규분포 함수이고

$$d_1 = \frac{\ln(P/K)+½\theta^2}{\theta},\ d_2 = d_1-\theta,\ \theta^2 = \int_0^\tau \sigma^2(s)ds$$

이다. 식 (4)의 우변항에서 $P=S/B(\tau)$를 대입하고 좌변항에서 $V=C/B(\tau)$를 이용하면,

1) 참고 Merton(1973)

S와 B(τ)로 표현되는 買入權附 價格函數를 얻는다.

$$C(S,\tau) = S\chi(d_1) - K\ B(\tau)\ \chi(d_2) \tag{5}$$

여기서

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) - \ln B(\tau) + ½\theta^2}{\theta},\quad d_2 = d_1 - \theta$$

이다. 표면적으로는 식 (5)가 Merton의 모형과 동일하지만, Merton의 모형과 식 (5)의 사이에는 중요한 차이가 존재한다. Merton의 모형에서는 무위험채권 수익률과 주식수익률의 순간적 표준편차가 만기까지의 시간의 확정적 함수라는 가정으로부터 σ(s)가 내생적으로 결정되지만 식 (5)을 도출하기 위해서는 외생적으로 지정된다. 다음 절에서 언급하듯이 주식수익률의 순간적 표준편차는 이자율의 함수라는 가정이 본 모형에는 내포되어 있다. 본 모형은 σ(s)의 지정에 融通性(flexibility)이 있으므로 실증적 측면에서 볼 때 Merton의 모형보다 유리하다. 식 (5)는 또한 옵션평가시 적용되는 이자율이 최단기 이자율이 아니라 옵션과 만기가 같은 무위험채권의 수익률이라는 점을 우리에게 확실히 보여준다.

III. 實證的 意味

만약 초과주식수익률의 순간적 표준편차가 상수 (σ(s)=σ)라면, 식 (5)는 $e^{-r\tau}$가 B(τ)로 대치된 점을 제외하면 Black과 Scholes의 모형으로 귀착된다. 그러나 이 경우에 식 (5)는 Black과 Scholes의 모형과는 실증적 의미가 다르다. 식 (5)에서는, σ가 株式收益率 그 자체가 아닌 超過株式收益率의 표준편차를 나타냄을 주시하여야 한다. 만약 P가 식 (1)의 확산과정을 따른다면, 주식수익률의 순간적 표준편차는 만기까지 시간의 확정적 함수가 아니다.

Ito의 보조정리(lemma)를 이용하면 추계적 과정 (1)과 (2)로부터 S에 대한 추계적 과정을 구할수 있다.

$$ds/s = [\mu(P,\tau) + \alpha(B,t) + (B/B_\tau)]dt + \delta(B,t)dz_1 + \sigma(\tau)dz_2 \tag{6}$$

두 표준 Wiener과정 dz_1 과 dz_2 사이의 순간적 상관계수를 ρ라 할 때, 주식수익률의 瞬間的 分散(variance)은 $[\delta^2(B,\tau)+\sigma^2(\tau)+2\rho\delta(B,\tau)\sigma(\tau)]$로 나타난다. 무위험채권 수익률의 순간적 표준편차가 무위험채권가격의 함수이므로, 본 모형에서는 株式收益率의 瞬間的 標準偏差가 이자율에 의존한다. 따라서 무위험채권 수익률 즉, 利子率의 不確實性은 본 모형에서 옵션가격에 중요한 영향을 준다. 이것이 본 모형과 Merton의 모형과의 중요한 차이점이다. Brenner, Courtadon 그리고 Subrahmanyam이 지적한 바와 같이 만약 주식수익률의 순간적 표준편차가 이자율 수준과 독립적이면 이자율의 불확실성은 옵션가격의 결정에 별로 중요한 역할을 하지 못하게 된다.

Christie(1982)는 주식수익률의 순간적 표준편차가 이자율과 양의 방향으로 관계가 있다는 증거를 제시했다. 본 모형에서는, $\delta(B,\tau)$과 ρ가 어떻게 주어지느냐에 따라서 주식수익률의 순간적 표준편차와 이자율 사이에 正의 연관을 갖는 것이 가능하다. 주식가격과 무위험채권의 가격은 같은 방향으로 변하는 경향이 있으므로 dz_1 과 dz_2 사이의 순간적 상관계수는 양수로 주어질 것으로 예측된다. 무위험채권 가격은 1을 초과할 수 없으므로 무위험채권 가격이 1에 접근하면 무위험채권 수익률의 순간적 표준편차는 작아지게 된다. 따라서 무위험채권 수익률의 순간적 표준편차는 무위험채권가격의 減少函數일 가능성이 높다. 이 경우 이자율의 증가는 주식수익률의 순간적 표준편차의 증가를 의미한다.

Latane과 Rendlman(1976) 그리고 Chiras와 Manaster(1978)는 暗默的 標準偏差(implied volatility)와 과거의 標準偏差(historical volatility)사이에는 완전하지는 않으나 강한 연관을 가리키는 증거를 제시했다. 이러한 결과에도 불구하고, 재무분야의 전문가들 사이에는 암묵적 표준편차가 과거의 표준편차보다 시장의 표준편차 예측의 더 좋은 추정치로 여겨지고 있다. Becker(1981)는 이 論題(issue)를 검증하여 암묵적 표준편차와 과거의 표준편차 사이의 관계는 미약함을 발견하고 "옵션시장 효율성을 의심할만한 증거"가 있다고 결론지었다. 최근에 Canina와 Figlewski(1990)는 Becker의 결론을 확인하는 증거를 제시했다. 그들은 암묵적 표준편차와 미래에 實現된(subsequently realized) 標準偏差의 연관은 매우 약하며, 암묵적 표준편차는 미래 표준편차의 비효율적이고 편중된 예측임을 보였다. Beckers 그리고 Canina와 Figlewski가 얻은 결과는 식 (5)를 이용하여 설명할 수 있다. 이러한 실증적 연구들에서 얻어진 암묵적 표준편차는 超過株式收益率의 표준편차의 추정치로 볼 수 있으며, 이것은 주식수익률의 표준편차와 상당히 다를 수 있다. 다른 말로 하면, 超過株式收益率의 암묵적 표준편차는 실증적 연구들에서 주식수익률의 과거 또는 미래 표준편차와 비교됨으로써 그들 사이의 관계가 미약한 것으로 나타나게 되었다고 볼 수 있다. Beckers 그리고 Canina와 Figlewski가 입증한 과거 또는 미래 표준편차와 암묵적 표준편차 사이의

약한 연관은 이자율의 불확실성을 옵션평가모형에 반영하지 못한데 기인한다고 할 수 있다. 이자율의 변화가 큰 시기에 超過株式收益率의 표준편차와 주식수익률의 표준편차가 상당한 차이를 나타냈다는 것은 무리가 아니라고 할 수 있다. 주식수익률 대신 초과주식수익률의 과거 표준편차를 이용하여 이러한 실증적 연구들을 반복하면 암묵적 표준편차와 어느 정도의 연관을 얻을 수 있는지는 흥미있는 일이다.

MacBeth와 Mervile(1979), Whaley(1982) 그리고 Rubinstein(1985)은 Black과 Scholes의 모형을 이용하여 계산된 암묵적 표준편차의 행태(behavior)를 분석하여, Black과 Scholes의 모형으로부터 나타나는 체계적 偏倚(biases)를 지적했다. 그러한 편의는 행사 가격, 만기까지의 시간 그리고 표준편차에 관련됨을 보였다. 행사가격과 관련된 편의가 식 (5)로 설명될 수는 없지만, 만기까지의 시간과 관련된 편의는 利子率의 期間構造(term structure)와 식 (5)에 나타난 $\sigma(s)$의 함수형태에 의하여 설명될 수 있다. Black과 Scholes의 모형에서 주식수익률의 표준편차는 기준주식의 모수이므로 옵션의 만기와는 무관해야한다. 그러나 실증적 연구들에서 옵션의 만기가 멀수록 암묵적 표준편차가 작은 것이 관찰되었다. 본 모형에 비추어 보면 Black과 Scholes의 모형으로부터 얻어진 암묵적 표준편차의 이러한 행태는 債券收益率 曲線效果(yield curve effect)와 $\sigma(s)$의 함수형태에 기인한다고 할 수 있다.

추계적 이자율하의 옵션평가모형을 이용하여 실증연구를 하거나 투자분석을 하기 위하여는 이자율과정과 연관된 모수의 추정을 요구하는데 그것은 단순작업이 아니다. 식 (5)는 이자율과정에 대한 모수가 없으므로 사용하기가 편리하다. 그러나, $\sigma(s)$의 함수형태를 결정할 필요가 있다. 이것은 여러 개의 만기까지가 다른 옵션가격으로부터의 기간구조를 추정함으로써 이루어질 수 있다. 실질적 목적을 위하여는 주식에 대한 超過收益率이 일정한 표준편차($\sigma(s)=\sigma$)를 가진다는 단순한 가정을 출발점으로 할 수도 있다.

Ⅳ. 結　　論

이 논문은 이자율 또는 무위험채권가격의 변화에 대한 특별한 가정에 의존하지 않고, 추계적 이자율하에서 옵션의 간단하고 명료한 평가모형을 제시한다. 이 논문에서 도출한 평가모형은 옵션의 가격을 결정하는데 있어서 주식수익률 대신 초과주식수익률의 순간적 표준편차가 중요한 역할을 차지함을 보여주었다. 기존의 모형들보다

간단한 결과가 가능한 것은 超過株式收益率의 순간적 표준편차에 대한 간단한 가정에 기인한다.

본 모형으로부터 얻어진 이론적 옵션가격은 Black과 Scholes의 모형과는 상당히 다를 수 있는데, 그 이유는 株式收益率의 瞬間的 標準偏差가 이자율 수준에 의존하기 때문이다. 요즈음 중요성이 증가하고 있는 장기옵션의 평가에 利子率의 不確實性이 지대한 영향을 주리라는 것을 고려할때, 이러한 옵션평가모형의 도출은 의미가 크다고 할 수 있다. 본 모형은 추계적 이자율이 옵션가치에 미치는 영향을 실증적으로 연구하는 이론적 근거를 제공하여 줄 수 있다. 옵션가격으로부터 구한 주식수익률의 암묵적 표준편차와 주식가격으로부터 구한 주식수익률의 표준편차 사이의 관계에 대한 상충되는 실증적 결과를 본 모형에 비추어 볼때, 앞으로의 연구에서는 암묵적 표준편차가 超過株式收益率의 표준편차와 어떠한 관계가 있는지 실증적으로 검증하는 것이 필요할 것이다.

참 고 문 헌

Beckers, S., "Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability," Journal of Banking and Finance 5 (1981) 363－381.

Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy 81 (January/March 1973) 637－659.

Brenner, M. J., G. R. Courtadon and M. G. Subrahmanyam, "The Valuation of Options on Stock Index," New York University Working Paper (March 1987).

Canina, L. and S. Figlewski, "Informational Content of Implied Volatility," New York University Working Paper (November 1990).

Chiras, D. P. and S. Manaster, "The Informational Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency," Journal of Financial Economics 6 (1978) 213－234.

Christie, A. A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances : Value, Leverage and Interest Rate Effects," Journal of Financial Economics 10 (December 1982) 407－432.

Latane, H. A. and R. J. Rendlman, "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Optimal Prices," Journal of Finance 31 (1976) 369－381.

MacBeth, J. D. and L. J. Merville, "An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model," Journal of Finance 34 (1979) 1173－1186.

Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1973) 141－183.

Rabinovitch, R., "Pricing Stock and Bond Options When the Default-Free Rate is Stochastic," Journal of Financial and Quantitative Analysis 24 (December 1989) 447－457.

Rubinstein, M., "Non-Parametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978," Journal of Finance 40 (1985) 455－480.

Whaley, R., "Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks, Empirical Tests," Journal of Financial Economics 10 (1982) 29－58. 참고 Merton(1973).