

광학렌즈 설계 및 평가

—육군사관학교 교수 흥경희 박사—

제 3 장 유한광선추적 및 성능평가

3.1 일반적인 유한광선추적

1. 序 論

광선으로 빛의 進行過程을 설명하는 분야가 幾何光學이며 광선추적은 기하광학의 기본이다. 특히 광학설계를 위해서는 광선추적이 필수적인 도구가 된다. 광선추적에도 近軸光의 경우는 近似的인 방법으로서 Gauss 광선추적을 이용하고 있으며 보다 정확한 광선추적을 위하여 유한광선추적을 실시한다.

대체로 대칭형 二次曲面에 대한 광선추적은 많은 문헌에 소개되어 있으며 비대칭형에 대하여도 부분적으로 소개되어 있다. 여기서는 热像裝備의 走査裝置와 같은 광학계에서 많이 사용되는 비대칭형 광학계의 유한광선추적 방법을 제시하고자 한다. 먼저 대칭형 二次曲面에 의한 유한광선추적 방법을 소개하고 이를 母體로 하는 非球面系의 광선추적을 알-

아본다. 대칭형 2차곡면에는 구면, 포물면, 쌍곡면, 타원체면이 포함된다. 다음은 비대칭형 광학계로서, 원통형면, toric surface, 원추면의 광선추적방법을 소개하고, 마지막으로는 광축에 대하여 회전되거나 기울어진 광학계의 광선추적방법을 제시한다.

2. 대칭형 2차곡면의 광선 추적

1) 2차곡면의 광선추적

광선추적의 기본이 되는 법

칙은 반사와 굴절법칙으로서 Snell의 법칙을 이용한다. Fig. 1에서와 같이 굴절률이 n 인 물질을 통하여 단위 vector r 방향으로 입사하는 광선이 曲面函數가 $f(X, Y, Z)$ 이고 굴절률이 n' 인 2차곡면을 P점에서 교차하고 굴절하여 r' 의 방향으로 진행하는 경우를 생각하여 보자. 2차곡면상의 P점을 지나는 法線과 반대방향의 단위 vector를 a 라 할 때, Snell의 법칙을 vector형으로 표현하면

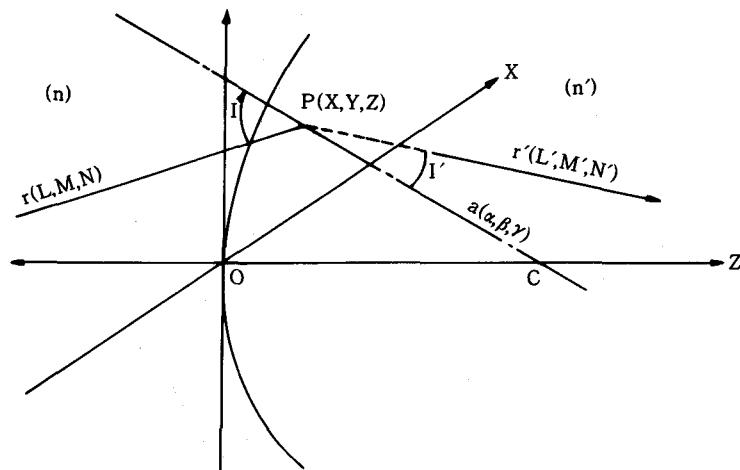


Fig.1 Refraction at a surface

$$n'(r' \times a) = n(r \times a) \dots (1)$$

으로 쓸수 있고 이식에서 兩邊에 $a \cdot r$ 를 취하여 移項整理하면

$$n' \cdot r' = n \cdot r + a(n'a \cdot r - na \cdot r) \dots (2)$$

이 된다. 여기서, X, Y, 및 Z축 방향의 단위 vector를 U_x, U_y 및 U_z 이라 할 때

$$r = LU_x + MU_y + NU_z$$

$$a = iU_x + jU_y + kU_z, \dots (3)$$

$$r' = L'U_x + M'U_y + N'U_z,$$

이며 入射角이 I , 屈折角이 I' 일 때

$$a \cdot r = \cos I \text{이고 } a \cdot r' = \cos I' \text{이다. 따라서}$$

$$\cos I = Li + Mj + NK,$$

$$n'L' = nL + i(n'\cos I - n\cos I)$$

$$n'M' = nM + j(n'\cos I' - n\cos I) \dots (4)$$

$$nN' = nN + k(n'\cos I' - n\cos I)$$

$$\cos I = \frac{1}{n'} [(n'^2 - n^2) + (n \cos I)^2]^{1/2}$$

와 같이 굴절후의 광선의 진행 방향 r' 을 구할 수 있다.

法線 a 를 구하려면 광선과 2차곡면의 交點 $P(X, Y, Z)$ 의 座標를 구해야 한다. 이를 위해서는 먼저 2차곡면과, 광축인 Z -축과의 교점인 정점에서 接平面을 생각하고 접평면과 광선의 교점좌표를 (X_0, Y_0, Z_0) 이라 하자. 또한 접평면상의 교점으로부터 2차곡면상의 교점까지의

거리를 D 라 하면

$$X = X_T + LD, Y = Y_T + MD, Z = ND \dots (5)$$

가된다. 그리고 대칭형 2차곡면의 $f(X, Y, Z)$ 는

$$f(X, Y, Z) = C[X^2 + Y^2 + (1+Q)Z^2] - 2z = 0 \dots (6)$$

으로 쓸수 있다. 여기서 Q 는 異心率로서 $Q < -1$ 인 경우는 쌍곡면, $Q = -1$ 이면 포물면, $-1 < Q < 0$ 이면 長軸에 대한 타원체면, $Q = 0$ 이면 구면, 그리고 $Q > 0$ 인 경우는 短軸에 대한 타원체면이다. (5)식을 (6)식에 대입하여 풀면

$$(1+QN^2)D^2 - 2GD + F = 0 \dots (7)$$

이 되고 여기서

$$F = C(X_T^2 + Y_T^2)$$

$$G = N - C(LX_T + MY_T) \text{이다.}$$

D 에 대하여 2차방정식을 풀면

$$D = \frac{G \pm \sqrt{G^2 - C(1+QN^2)F}}{C(1+QN^2)} \dots (8)$$

의 두 根을 얻지만 더 작은 값을 취해야 하므로 -부호를 택한다.

따라서 D 는

$$D = \frac{F}{G + \sqrt{G^2 - (1+QN^2)CF}} \dots (9)$$

이다. 2차곡면상의 교점 $P(X, Y, Z)$ 는 (5)식으로부터 구할 수 있다.

한편 법선 vector a 는 f 의 방향임으로 단위 vector이므로 이를 계산하여 각 성분별로 타나내면

$$\alpha = -CX, \beta = -CY, r = 1 -$$

$$(1+Q)CZ$$

$$i = \alpha/S, j = \beta/S, K = r/S, \text{ 단, } S = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + r^2} \dots (10)$$

이 된다.

앞면상의 교점좌표를 $P_{-1}(X_{-1}, Y_{-1}, Z_{-1})$ 이라 하고, 앞면으로부터 현재의 2차곡면까지의 거리가 d_{-1} 이고 앞면상의 교점 P_{-1} 로부터 접평면까지의 거리가 A 라고 하면

$$A = (d_{-1} - Z_{-1})/N$$

$$X_T = X_{-1} + AL \dots (11)$$

$$Y_T = Y_{-1} + AM$$

의 관계식을 얻어 현재의 2차곡면의 접평면과 광선의 교점 (X_T, Y_T, Z) 을 구하여 식(5)로부터 광선과 2차곡면의 교점 $P(X, Y, Z)$ 를 구할 수 있다.

2) 非球面으로의 轉換

대칭적인 2차곡면면의 곡면 함수를 Z 에 대하여 표현하면

$$Z = \frac{C\rho^2}{1 + 1 - (1+Q)C^2\rho^2}$$

$$\text{단 } \rho^2 = X^2 + Y^2 \dots (12)$$

으로 표현되면 이를 모체로 하여 비구면을 생각하면 비구면의 함수는 $Z(\rho)$ 는

$$Z(\rho) = \frac{C\rho^2}{1 + 1 - (1+Q)C^2\rho^2} + A_4P^2 + A_6P^3 + A_8P^4 + A_{10}P^5, \dots (13)$$

$$\text{단, } P = (\rho^2 / \rho_{\max}^2)^{1/2} \text{이다}$$

Fig.2에서 보는 바와 같이 母體인 2차곡면상 P_0 에서 광선이 만나서 비구면상에는 점 P 에서 만나는 경우를 생각해 보자. 그림과 같이 점 $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ 를 지나는 광

로

$$A(P) = A_4 P^2 + A_6 P^4 + A_8 P^6 + A_{10} P^8$$

$$A' = \frac{\partial A(P)}{\partial P} = 2A_4 P + A_6 P^2 + A_8 P^3 + A_{10} P^4$$

이라 할 때,

$$\alpha = -\left(C + \frac{2r}{\rho_{\max}} \frac{\partial A}{\partial P}\right) X \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$\beta = -\left(C + \frac{2r}{\rho_{\max}} \frac{\partial A}{\partial P}\right) Y$$

$$r = 1 - (1+Q)C [Z - A(P)]$$

가 되며 이를 規格化하면

$$i = \alpha / S, j = \beta / S, k = r / S, \quad \dots \dots \dots (18)$$

$$\text{단, } S = \alpha^2 + \beta^2 + r^2$$

3. 비대칭형 2차곡면의 광선 추적

1) Toric면 광선추적

Fig. 3과 같은 Toric면의 곡면함수 $f(X, Y, Z)$ 는 曲率

$$C_1 = 1/r_1, C_2 = 1/r_2 \text{ 라 하면}$$

$$C_1 C_2 (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2C_1 C_2 + 2(C_1 - C_2) - 2(C_1 - C_2) \sqrt{(1 - C_2 Z)^2 + (C_2 X)^2} = 0$$

$$\dots \dots \dots (19)$$

으로 표현할 수 있다. 여기서 r_1 과 r_2 의 비에 toric면의 모양이 달라지며, 도너스, 사과 또는 레몬형의 곡면이 된다. 한편 $C_1 = 0$ 이면 원기둥면이 된다. $C_2 = 0$ 이면 식(19)을 사용할 수 없다. 식(5)를 식(19)에 대입하여 D 에 대하여 풀면

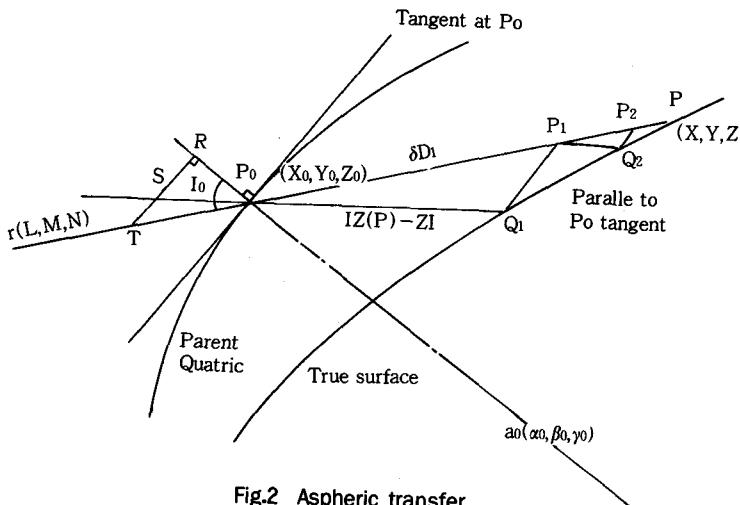
$$F_1 = C_1, C_2^2,$$


Fig. 2 Aspheric transfer

축에 평행한 직선이 비구면과 만나는 점을 Q_1 이라 하고, 또한 점 Q_1 에서 점 P_0 을 지나는 접선과 평행한 직선이 광선과 만나는 점을 $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 이라 하자. 이와 같이 계속하면 점 $P(X, Y, Z)$ 에 도달할 수가 있다. 직각삼각형 TRP_0 에서 선분 TR 의 길이를 1.0이 되도록 하면 線分 RP_0 의 길이는 $\cos I_0$ 가 되며, 선분 SP_0 의 길이를 Z_a 라 하면 직각삼각형 SRP_0 에서 법선의 Z -축에 대한 방향여현이 K_0 이므로 $K_0 = \cos I_0$ 의 관계가 된다. (Fig. 2) 따라서

$$Z_a = \frac{\cos I_0}{K_0} \quad \dots \dots \dots (14)$$

이 된다. 선분 TR 가 P_0 의 접선에 평행하므로 삼각형 TSP_0 와 삼각형 P_1, Q_1, P_0 은 서로 짙

은 꼴이므로

$$\delta D_1 = k_0 [Z(\rho) - Z] / \cos I_0 \quad \dots \dots \dots (15)$$

이 되고, 접평면상의 교점으로부터 점 P_1 까지의 접평면상의 교점으로부터 점 P_0 까지의 거리 D_0 와 δD_1 의 합이 된다. 즉,

$$D = D_0 + \delta D_1$$

$$X_1 = X_0 + LD$$

$$Y_1 = Y_0 + MD \quad \dots \dots \dots (16)$$

$$Z_1 = Z_0 + ND$$

같은 방법으로 $\delta D_2, \delta D_3, \dots, \delta D_n$ 을 구하면 δD_i 이 매우 작은 값으로 될때까지 반복하여, 이에 따라 X_2, X_3, \dots, X_n 을 구하여 최종 $P(X, Y, Z)$ 점의 좌표를 구한다.

법선 vector a 는 $f(X, Y, Z)$ 의 規格化된 단위vector 이므로

으로 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} Y \\ X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos J & 0 & -\sin J \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin J & 0 & \cos J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \dots (33)$$

으로 쓸수 있다. 먼저 Fig.7 (c)와 같이 Y-축을 회전축으로 하여 J radian 회전하고 그 후 Fig. 7(b)와 같이 X-축을 회전축으로 하여 K radian 기울어진 경우에는 식(32)와 식(33)으로부터 다음과 같이 좌표변환이 가능하다.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos J & 0 & -\sin J \\ -\sin K \sin J & \cos K & -\sin K \cos J \\ \cos K \sin J & \sin K & \cos K \cos J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \dots (34)$$

이와같이 座標變換하여 유한 광선추적을 실시한후 다른 광학계와 계속 연결하여 광선추적을 하려면, 굴절인 경우에는 원래의 좌표로還元해 주어야 한다. 이를 위해 식(34)의 逆變還하여야 하며 행렬식으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos J & -\sin J \sin K & \sin J \cos K \\ 0 & \cos K & \sin K \\ \sin J & -\cos J \sin K & \cos J \cos K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \dots (35)$$

으로 된다. 이때 방향여현도 위치와 꼭 같은 관계이다. 따라서 식(34)와 식(35)에서 (X, Y, Z) ,

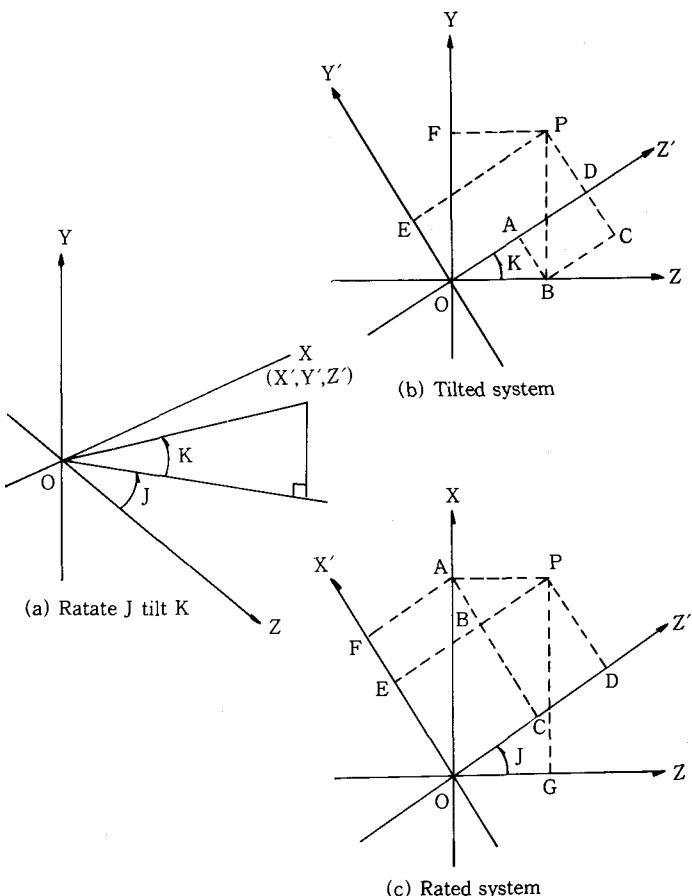


Fig.7. Ratated and tilted system

Z , (X', Y', Z') 대신에 (L, M, N) , (L', M', N') 만 대입하면 쉽게 좌표변환관계식을 얻을 수 있다.

그러나 반사할 경우에는 좌표축이 원래상태로 환원되는 것 이 아니라 오히려 처음에 회전 및 기울어진 만큼 같은 방향으로 한번 더 회전 및 기울어진다. 따라서 반사할 경우에는 유한광

선추적후에 좌표를 환원할 때 식(35)를 사용하면 안되고 식(34)에 의해 변환시켜야 한다. 이점에 각별히 주의해야 한다.

5. 結論

비대칭인 경우와 이심계의 유한광선추적을 위한 일반적인 방법을 제시하였다. 이상에 나타나 있는 공식을 이용하면

熱像裝備의 走査裝置를 비롯한 일반적인 광학계의 설계를 위한 유한광선추적이 가능하다. 회절격자와 Fresnel렌즈의 경우에는 더 보완해야 하며 굴절률이 非均質인 경우도 곤란하다. 그러나 국내 광학산업분야에서는 많은 활용을 바란다.

3.2 성능평가

1. 광선수차(ray aberration)

광선수차는 상평면사이에서 이상적으로 형성되어야 하는 Gauss상점과 실제의 상점과의 차이를 거리로 나타내고 있다.

1) 구면수차(spherical aberration)

그림 8과 같이 근축광의 상점을 결정하여 광축과 수직한 Gauss상평면을 결정하고 기타의 광선을 추적하여 광축과 만나는 교점 및 Gauss상평면과 만나는 교점을 구한다. 광축상의 상점간의 거리차를 종구면수차(longitudinal spherical aberration)이라 하고 Gauss상평면상의 높이를 횡구면수차(transverse spherical aberration)이라 한다. 종구면수차의 계산은 임의 높이에서의 유한광선추적에 의한 뒷초점거리와 Gauss광선추적에 의한 뒷초점거리 차이이다. 즉

$$SIL = (-yN/M + Z) - bfl \quad (36)$$

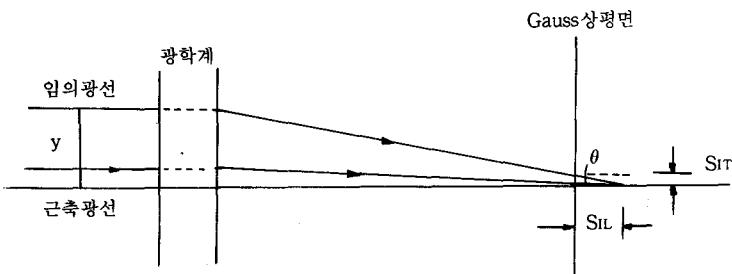


그림8. 구면수차 및 코마의 계산

이며 횡구면수차 SfT는 Gauss상평면 상에 도달한 광선의 높이 Y이다.

라서

$$S.C. = f' - y/M \dots\dots\dots (37)$$

으로 계산된다.

2) 코마(coma)

광학계의 정현조건(sine condition)을 계산하여 그 광학계의 코마수차를 대신한다. 그림 8과 같이 평행광선이 입사할 때의 정현조건 S.C.은 $S.C. = f' - y / \sin\theta$ 이며 여기서 f' 은 광학계의 제 2 유효초점거리이다. 따

3) 비점수차(astigmatism)

및 만곡수차(field curvature) 시계각 β 인 주광선을 먼저 추적하여 상면에서의 교점(X_P , Y_P)과 방향여현(L_P , M_P , N_P)을 구한다. 다음은 자오면(tangential plane)상에서 주광선과 매우 근접하여 평행하게 입사하

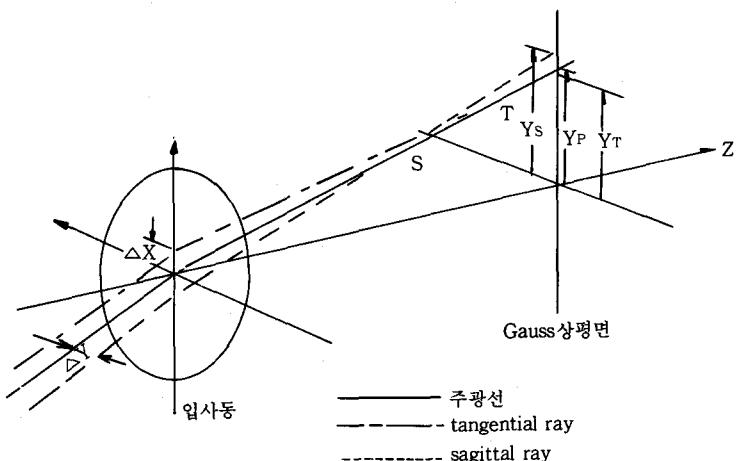


그림 9. 비점수차 및 상면만곡의 계산

는 광선을 추적하여 상면에서의 교점(X_t, Y_t)과 방향여현(L_t, M_t, N_t)을 구하고 같은 방법으로 구결면(sagittal plane)에서 주광선과 매우 근접하여 평행하게 입사하는 광선을 추적하여 상면상에서의 교점(X_s, Y_s) 및 방향여현(L_s, M_s, N_s)를 구한다. 상면만곡 T 는 Gauss상면에서 T 점까지의 거리이며 다음과 같이 계산된다.

$$T = \frac{(Y_t - Y_p) / M}{(M/N)_t - (M/N)_p} \quad \dots \dots \dots \quad (38)$$

또 한편 구결면상의 상점 S를
구하기 위해서는 근사적으로 아
래와 같이 계산할 수 있다.

$$S = \frac{\sqrt{1 - L_s^2}}{L_s} X_s \dots \dots \quad (39)$$

비점수차= $T - S$ 이다.

4) 의곡수차(distortion)

시계각 β 로 입사하는 주광선이 Gauss상면과의 교점 Y_p 와 Gauss상의 높이 Y_g 와의 차이가 의곡수차이며 Gauss상의 높이는 근축광의 상점의 높이를 입사고와 비례적으로 계산하여 결정한다. 보통 의곡수차는 백분율로 표시하며 아래와 같다.

$$\text{의곡수차} = \frac{Y_p - Y_g}{Y_g} \times 100(\%)$$

..... (40)

5) 색수차(chromatic aberration)

색수차는 파장에 따라서 굴절률이 다르기 때문에 나타나는 현상으로서 Fraunhofer c,d 및 F선에 대하여 굴절률이 n_c , n_d , n_F 로 되며 각 파장에 대하여 평행광선을 추적하여, 축상의 상점상의 거리차인 뒷초점거리 차를 계산한 것이 곧 종색수차 (longitudinal chromatic aberration)이고, 시계각에 따라서 파장별로 Gauss 상면상의 교점 높이의 차이를 계산하면 횡색수차(transverse chromatic aberration)이 된다.

2. 기타 성능평가

1) ray fan

광선수차는 각종의 수차로 나누어 계산하여 그 특성을 조사하고 있지만 이들을 실제 상평면상에서 어떠한 분포를 나타내는가 한눈에 보고 싶을 때 ray fan을 계산한다. 자오면상과 구결면상에 각각 수개의 광선을 서로 나란하게 추적하여 Gauss 상평면상에서의 교점을 구한 것이 ray-fan이다. 추적된 광선이 어느 평면상에 있었느냐에 따라서 X-ray fan 또는 Y-ray fan이라 한다.

2) spot diagram

광선수차나 ray fan은 수개의

광선을 추적하지만 보다 더 정확한 성능을 평가하고자 할 때에는 입사동(entrance pupil) 상에서 등간격으로 mesh를 나누어 수백개의 많은 광선을 추적한다. 이 광선들이 Gauss상 평면상에서 만나는 점을 그림으로 나타낸 것이 spot diagram이며 기하광학적인 point spread function $I(X_i, Y_i)$ 의 의미가 있다.

3) encircled energy,
기하광학적인 OTF

spot diagram으로 부터 Gauss상평면상에서 주어진 반경 내에 도달하는 광선수를 누적한 것이 기하광학적인 encircled energy $E(r)$ 이다. spot diagram으로 부터 X-축으로나 Y-축을 따라서 적분하면 edge scanned function $Es(X)$ 또는 $Es(y)$ 의 의미가 되며 이를 X 또는 Y에 대해 미분하면 line spread function, $L(x)$ 또는 $L(y)$ 이 된다. $L(x)$ 또는 $L(y)$ 를 Fourier변환하여 규격화하면 sagittal OTF 또는 tangential OTF가 된다. 회절효과를 고려하지 않았기 때문에 이 모든것을 기하광학적인 함수로 정의한다.