

대류확산문제의 유한요소해석을 위한 Line-by-Line 해법

A Line-by-Line Technique for Convection-diffusion Problem Implementing Finite Element Method

유 재 석*
Jaisuk Yoo

ABSTRACT

Finite element method has been developed recently for the solution of the convection-diffusion problems. Finite element method has several advantages over finite difference method, but its requirement of the larger memory size of the computer has prevented from wide application.

In the present study, line-by-line technique has been implemented to finite element method to overcome this disadvantage. Two dimensional laminar natural convection in square cavity was chosen as an example in this study. The numerical result shows good agreement with bench mark solution and the size of the coefficient matrix has been reduced drastically.

기 호 설 명

<p>f : 체적력</p> <p>g : 중력</p> <p>h : 요소크기</p> <p>L : 정사각형 밀폐공간의 길이</p> <p>Nu_{max} : $x_1=0$ 경계면에서의 최대 국소 Nusselt 수</p> <p>Nu_{min} : $x_1=0$ 경계면에서의 최소 국소 Nusselt 수</p> <p>Nu_o : $x_1=0$ 경계면에서의 평균 Nusselt 수</p> <p>p : 압력</p> <p>Pr : Prandtl 수</p> <p>Ra : Rayleigh 수</p> <p>S : 영역 Ω의 경계</p>	<p>T : 온도</p> <p>u : 속도</p> <p>u_{1max} : 밀폐공간내의 수직방향 중심면에서의 최대 수평방향 속도</p> <p>u_{2max} : 밀폐공간내의 수평방향 중심면에서의 최대 수직방향 속도</p> <p>W : Weighting 함수 (그리이스문자)</p> <p>α : 열확산계수</p> <p>β : 열팽창계수</p> <p>θ : 무차원 온도</p> <p>λ : penalty 상수</p> <p>ν : 동점성계수</p> <p>ρ : 밀도</p> <p>Ω : 영역</p>
--	---

* 정회원, 아주대학교 기계공학과

<상첨자>

* : 차원을 갖는 양

<하첨자>

c : 냉각면

h : 가열면

1, 2 : 수평 및 수직방향

1. 서론

대류확산 현상은 거의 모든 대부분의 열전달 문제에 포함되며, 이 문제의 해석을 위한 수치적 연구가 지속적으로 수행되어 왔으며, 수치적방법은 크게 유한차분법과 유한요소법으로 구별할 수 있다.^{1~5)} 유한차분법을 적용한 수치해법은 비교적 잘 정립되어 있다고 할 수 있다.^{1,2)} 유한차분법에서는 경계조건을 적용하는데 있어서 많은 어려움이 따르게 되며, 또한 영역의 기하학적 형상이 복잡한 경우 boundary-fitted 좌표계로 변환하여 해석하여야 하는 불편도 있다. 이에 비해 유한요소법을 적용하면 영역의 기하학적 형상이 복잡한 경우에도 좌표변환을 하지 않고도 해석할 수 있으며, 경계조건을 적용하는데 따른 어려움을 극복할 수 있으며, 또한 원래의 종속변수(primitive variable)의 형태를 유지한 채해를 구할 수 있다. 또한 “penalty function” 유한요소법을 적용하면 압력항을 지배방정식의 종속변수로부터 소거함과 동시에 연속방정식도 근사적으로 만족시킬 수 있으므로, 연속방정식을 직접 풀 필요가 없어져서 지배방정식의 수도 줄일 수 있다.^{3,4)} 그러나 유한요소법을 적용한 경우, 각 요소의 요소식을 전 영역에 걸쳐 조합한 계수행렬식의 크기가 유한차분법을 적용한 경우에 비하여 대단히 크므로, 기억용량이 큰 전산기가 요구되는 단점이 있다.

본 연구에서는 위에서 지적한 유한요소법의 단점을 보완할 수 있는 line-by-line 해법을 비교적 잘 정립되어 있는 정사각형 밀폐공간 내의 2차원 층류자연대류 문제의 해석을 통하여 제시하고, 이 해법의 타당성을 입증하고자 한다.

2. 지배방정식 및 유한요소화

Boussinesq 근사가 성립한다고 가정하여 층류자연대류에 의한 유동을 고려할 때, 연속방정식, 운동방정식 및 에너지방정식을 무차원 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + \text{Pr} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \text{Pr Ra } \theta f_i \dots\dots\dots (2)$$

$$u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \dots\dots\dots (3)$$

식 (1)~(3)에서 사용된 변수는 다음과 같다.

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Ra} = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu\alpha}, \quad u_i = \frac{u_i^* L}{\alpha},$$

$$x_i = \frac{x_i^*}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad p = \frac{p^* - \rho g f_i x_i^*}{\rho \alpha^2 / L^2}$$

여기서 *는 차원을 갖는 양을 나타낸다. 또한 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = 0, \theta = 1.0 & \quad \text{at } x_1 = 0 \\ u_1 = u_2 = 0, \theta = 0.0 & \quad \text{at } x_1 = 1 \\ u_1 = u_2 = 0, \partial\theta/\partial x_2 = 0 & \quad \text{at } x_2 = 0 \\ u_1 = u_2 = 0, \partial\theta/\partial x_2 = 0 & \quad \text{at } x_2 = 1 \dots\dots (4) \end{aligned}$$

식 (1)~(3)의 weak form을 구한 후, penalty parameter λ 를 도입하면, 연속방정식이 소거되어 다음과 같은 식으로 표시된다(자세한 과정은 참고문헌 3, 4 참조).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[W_1 \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \text{Pr Ra } \theta f_i \right) + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right. \\ \left. + \text{Pr} \frac{\partial W_1}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\ = - \int_S W_1 t_i ds \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \left[W_2(u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{\partial W_2}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}) \right] d\Omega$$

$$= - \int_S W_2 q_n ds \dots\dots\dots (6)$$

식 (4)와 (5)에서 사용된 t_i 와 q_n 은 다음과 같다.

$$t_i = \left[-p \delta_{ij} + Pr \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j \dots\dots (7)$$

$$q_n = - \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_j$$

여기서 n_j 는 경계면 S 의 법선방향의 단위 벡터 성분을 표시한다. Basis function과 test function은 동일한 function으로 선택하였으며, 편의상 속도 및 온도의 basis function도 동일한 function을 취하였다. 즉 biquadratic interpolation function을 basis function으로 취하였으며, 이를 위하여 기본 요소로 9 node 사각형 요소를 기본요소로 하였다.

3. Line-by-line 해법

각 요소에서 계산된 요소식을 전 영역에 걸쳐 조합한 계수행렬식의 해를 구하는 경우 기억용량이 대단히 큰 전자계산기의 사용이 요구되므로, 여기서는 적은 기억용량의 전자계산기에도 적용 가능한 line-by-line 해법을 적용한다.

Line-by-line 해법에서는 먼저 우선적용 방향을 결정하여야 한다. 즉 Fig.1에 나타낸 2차원 요소점 및 요소의 경우, i 나 j 방향 중 택일하여야 하는데, 여기서는 i 방향을 택하였고 가정하여 계산과정을 설명하고자 한다.

(1) m 번째 열의 요소점은 $i-1$ 및 i 번째 열의 요소의 요소점이 되므로, $i-1$ 및 i 번째 열의 요소에 관하여 요소식을 계산한다. 이 때 m 번째 열의 요소점을 제외한 요소점에서의 종속변수의 값은 가장 최근에 구한 값으로 취한다. 즉 $m-1$ 번째 열까지는 현 측차(iteration) 스텝에서 이미 구한 종속변수의 값으로, $m+1$ 번째 이후의 열에서는 전 측차 스텝에서의 값

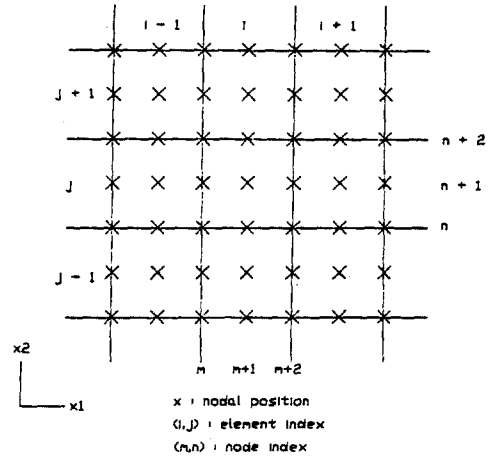


Fig.1 Node and element representation

으로 한다. 따라서 m 번째 열의 요소점의 종속변수만이 미지수가 된다.

(2) $m+1$ 번째 열의 요소점은 i 번째 열의 요소에서만 요소점이므로 i 번째 열의 요소에 관하여 (1)에서와 같이 요소식의 계산을 수행한다.

(3) 위의 과정을 $m=1$ 부터 i 방향의 모든 요소열에 대하여 적용, 계산을 수행한다.

(4) j 방향에 대하여 위의 과정을 반복 수행한다.

(5) (1)~(4) 과정을 수렴조건을 만족할 때까지 반복 수행한다.

위와 같이 수치 계산을 수행할 경우, 최종 계수행렬식(global coefficient matrix)의 bandwidth는 9node 요소의 경우 5이며, 4node 요소를 사용하는 경우 3이 되므로, 전자계산기의 기억용량만을 크게 줄일 수 있다.

4. 수치해석

Line-by-line 방법을 이용하여 수치해석을 수행할 때, 기억용량의 필요량을 최소화하기 위하여 요소점의 각 열에서 속도성분 및 온도를 모두 분리하여 u_1, u_2, θ 의 순으로 계산을 수행하였으며, x_1 방향으로 먼저 계산을 수행한 후 x_2 의 방향에 대하여 계산을 행하였다. Bench mark solution⁷⁾과 비교하기 위하여

Prandtl 수는 0.71로 하였으며, Rayleigh 수 10,000과 100,000에 대하여 해석하였다. 한편 Penalty parameter λ 의 값은 여러가지 값을 취하여 수렴 정도 및 해의 정밀도를 검토한 후 1,000으로 결정하였다. 전 영역은 100개의 요소로 분할하였으며, 수직벽면에서의 경계층의 형성을 효과적으로 처리하기 위하여 벽면 근처에서는 요소의 크기가 적게 되도록 하였다. 이 때 요소점 간의 최소간격은 1/64, 최대간격은 1/8이다.

한편 수렴속도를 조절하기 위하여 속도성분에 대하여 over-relaxation을 행하였으며, 이 때 over-relaxation factor는 1.1로 하였다. 해의 수렴여부는 바로 전 측차 및 현재 측차에서의 모든 종속변수의 차가 1% 미만인 경우로 하였다.

5. 결과 및 검토

Table 1에는 $Ra = 10,000$ 인 경우에 대한 수치해석 결과를 bench mark solution 및 종래의 유한요소법에 의한 해와 비교 수록하였다. 여기서 종래의 유한요소법이란 line-by-line해법이 아닌 전 영역에서의 요소식을 모두 조합한 계수방정식을 푸는 전형적인 해석방법을 뜻하며, bench mark solution은 De Vahl Davis의 논문⁶⁾에서 인용하였다. Table 3에는 본 연구의 결과와 bench mark solution과의 오차를 표시하였다. Table 3에서 알 수 있듯이 대체로 1% 이내에서 bench mark solution과 일치하는 것을 알 수 있다. Table 1에서 최대최소점이 다른 것은 bench mark solution에서는 격자점의 값을 보간하여 최대최소값을 구하였으나, 본 연구에서는 각 요소점의 값만을 비교하여 최대최소치를 취하였으므로 그 값에 차이가 있게 되었다. Table 3의 결과에 나타나 있듯이 종래의 방법에 의한 해석결과가 본 연구의 수치결과보다 오차가 더 적은 것을 알 수 있다. 그러나 종래의 방법에 의한 해석의 경우 계수행렬식의 크기가 $1,323 \times 137$ 인 반면 line-by-line해법을 적용한 경우 이 크기가 21×5 가 되어 대단히 많은 기

Table 1 Comparison of the solutions for $Ra = 10^4$

	Present study	Bench mark solution	Traditional method solution
$u_{1 \max}$	16.14	16.178	16.16
x_2	0.8125	0.823	0.8125
$u_{2 \max}$	19.67	19.617	19.64
x_1	0.1250	0.119	0.1250
Nu_0	2.243	2.238	2.243
Nu_{\max}	3.520	3.528	3.523
x_2	0.1250	0.143	0.1250
Nu_{\min}	0.589	0.586	0.586
x_2	1.0	1.0	1.0

Table 2 Comparison of the solutions for $Ra = 10^5$

	Present study	Bench mark solution	Solution using equal-size-element
$u_{1 \max}$	34.30	34.73	35.23
x_2	0.8750	0.855	0.850
$u_{2 \max}$	68.65	68.59	65.55
x_1	0.0625	0.066	0.0500
Nu_0	4.491	4.509	4.333
Nu_{\max}	7.648	7.717	7.126
x_2	0.0937	0.081	0.1000
Nu_{\min}	0.755	0.729	0.746
x_2	1.0	1.0	1.0

Table 3 Error(%) of solutions of the present study compared with the bench mark solution

	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$
$u_{2 \max}$	-0.23	-1.24
$u_{2 \max}$	0.27	0.09
Nu_0	0.22	-0.40
Nu_{\max}	-0.23	-0.89
Nu_{\min}	0.51	3.57

Table 4 Error (%) of the original solutions by De Vahl Davis for $Ra=10^5$ ⁶⁾

h	$u_{1\max}$	$u_{2\max}$	Nu_o	Total nodes
0.1	17.77	-12.95	5.72	11×11
0.05	4.98	-8.46	4.59	21×21
0.025	0.98	-2.71	1.22	41×41
0.0125	0.23	-0.54	0.31	81×81
present	-1.24	0.09	-0.40	21×21

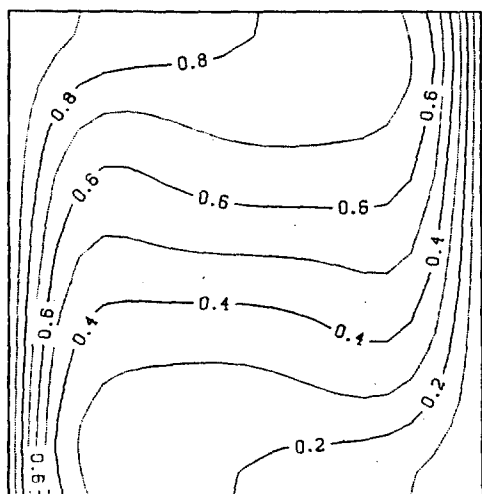


Fig.2 Isothermal lines for $Ra=10^5$

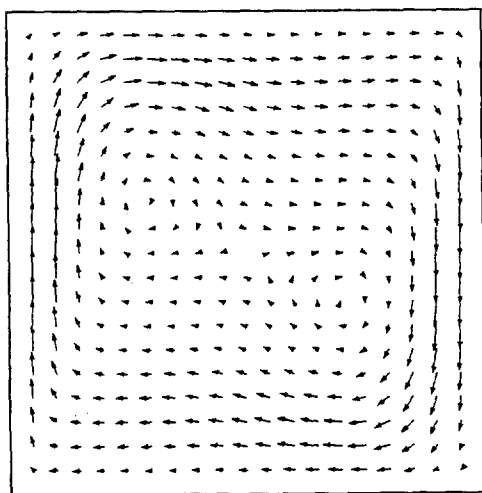


Fig.3 Velocity vectors for $Ra=10^5$

역용량을 줄일 수 있으며, 또한 Table 3의 결과에 나타내었듯이 충분히 정확한 해도 동시에 구할 수 있다.

Table 2에는 $Ra=100,000$ 인 경우에 대한 수치해석 결과를 bench mark solution 및 등간격분할요소계에 대한 해석결과를 비교 수록하였다. 등간격분할요소계에서 분할한 요소의 수는 비등간격분할요소계의 요소의 갯수와 동일하게 하였다. Bench mark solution과의 차이가 $Ra=10,000$ 인 경우보다 큰 것은, bench mark solution의 해를 81×81 개의 격자로 영역을 분할하여 구하였기 때문이다. 그러나 이 경우에도 최소 Nu수를 제외하고는 1.25% 이내에서 일치함을 알 수 있다. 등간격분할요소의 경우, 비등간격분할요소계의 경우보다 오차가 커지게 되는데 이는 벽면에서의 요소의 크기가 비교적 커서 경계층 형성에 따른 영향을 충분히 고려할 수 없었기 때문이다. Table 4에는 De Vahl Davis⁶⁾의 해중 $Ra=100,000$ 인 경우 격자점 간의 거리에 따른 bench mark solution과의 오차를 인용 수록하였으며, 또한 line-by-line해법에 의한 오차도 표시하였다. 동일 수의 요소점(격자점)을 배치한 경우, 본 연구의 결과가 De Vahl Davis의 결과보다 우수한 것을 알 수 있다. 참고로 Fig. 2와 3에는 $Ra=100,000$ 인 경우에 대하여 등온선 분포와 속도 벡터를 각각 표시하였다.

6. 결 론

본 연구에서는 line-by-line해법을 정사각형 단면을 갖는 밀폐공간내의 2차원 층류자연대류 문제의 해석을 통하여 제시하고, 그 타당성을 조사하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) Bench mark solution과 비교한 결과 충분히 정확한 해를 구할 수 있었으며, 동일한 수의 격자점을 갖는 De Vahl Davis의 해보다 더 적은 오차를 나타내었다.

(2) Line-by-line해법을 이용함으로써 계수행렬식의 크기를 크게 줄일 수 있으므로 유한요소법의 단점인 큰 기억용량을 갖는 전산기 사용의 필요성을 제거할 수 있었다.

후 기

본 연구를 가능케 해주신 과학재단(해외연수)과 해외연수시 편의를 제공해 주신 미국 Rutgers 대학의 Jaluria 교수께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Jaluria, Y., 1988, "Computer methods for engineers", Ally and Bacon, Inc., Boston, MA.
2. Patankar, S.V., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere, Washington, D.C.
3. Huebner, K.H. and Thornton, E.A., 1982, "The finite element method for engineers", 2nd ed., John Wiley & Sons., N.Y., N.Y..
4. Marshall, R.S., Heinrich, H.C., and Zienkiewicz, O.Z., 1978, "Natural convection in a square enclosure by a finite-element, penalty function method using primitive fluid variables", Numerical Heat Trans., Vol. 1, pp. 315-330.
5. Baliga, B.R. and Patankar, S.V., 1980, "A new finite element formulation for convection-diffusion problems", Numerical Heat Trans., Vol. 3, pp. 393-409.
6. De Vahl Davis, G., 1983, "Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution", Int. J. Num. Methods in Fluids, Vol. 3, pp. 249-264.