한국수학교육학회지 <수학교육>
1991. 12. 제 30 권 제 3 호 71-89

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1991 : Vol. 30, No. 3 71-89

수학적 지식의 교수학적 변환

강 완 (서울대학교 사범대학 교육연구소)

이 글은 필자의 박사학위 논문 *Didactic transposition of mathematical knowledge in textbooks* (1990, The University of Georgia)의 일부를 요약한 것으로서 제 8 회 수학교육학세미나 (1991. 5, 인천교육대학)에서 발표된 것이다.

인식론적 모델로서의 지식의 교수학적 변환론

오늘날에는 배워 안다는 것이 자신의 주변으로부터 이미 만들어진 내용을 수동적으로 받아들이기만 하는 것일 뿐이라고 믿는 사람들은 드물다. 이런한 신념에 대한 부정은 인지과학자 cognitive scientist 와 교육학자 들의 思潮에 주된 영향을 미치고 있는 구성주의 constructivism 의 기본 가설이기도 하다. 한편 구성주의자들이라고 해서 지식의 객관성을 받아들이는 본체론적 ontological 입장과 그것을 거부하는 현상학적 입장 사이의 뿌리깊은 논쟁에 대해 일치된 견해를 보이는 것은 아니다. 즉, 급진적 radical 구성주의자들은 지식의 객관성을 際主觀性 intersubjectivity 으로 과감히 바꿔놓음으로써 회의론 skeptics 에 의해 제기된 전통적인 인식론적 逆說로부터 스스로 자유로와지는 반면, 평범한 trivial 구성주의자들은 인지적 구성 과정만을 고려하고 인식론적 역설은 심각하게 여기지 않는다 (von Glasersfeld, 1985).

사실, 인식론적 역설 그 자체는 이미 본체론과 현상학 양쪽에 모두 걸리는

올가미이다. 아무 댓가없이 이 딜렘마로부터 빠져나갈 길은 없다. 급진적 구성주의가 제시하는 해결책은 논의되는 지식을 특정한 종류로 한정한다는 댓가를 치룬 한 방법일 뿐이다. 즉 급진적 구성주의자들에 의한 지식의 객관성에 대한 부정은 신념이나 독단 dogma 과는 구별되는 경험에 의한 지식 knowledge that it fits observations 에 대해 말할 때에만 설득력이 있다 (von Glasersfeld, 1987, p. 5). 이는 지식과 그 주체 knower 라는 이원적 관계를 고려한 결과이다.

그러나 가르친다는 말의 일상적 용법은 '누가, 누구에게, 무엇을' 이라는 삼원적 관계를 가정하고 있다. 더구나 학교에서 가르치는 지식은 그것이 경험에 의한 것이라는 점 외에도 많은 속성을 가지고 있다. 학교수학에 속한 지식의 대부분이 경험에 의한 것에 덧붙여 우리 사회의 가치관, 교육적 의도, 수학적 기능 등의 복합체라는 점을 인정한다면 이에 걸맞는 인식론적 대안이 필요할 것이다. "구성주의자들은 그들의 본체론적 관련성을 명료히하고 발전시킬 필요가 있다. . . . 우리에게는 본체론을 고려한 인식론이 필요하다." (Kilpatrick, 1987, p. 19) 구성주의자들의 주장에 크게 위배되지 않으면서도 최소한 지식이 주체 외부에 "마치" 독립적으로 존재하는 양 지식을 다룰 수 있게 허용하는 인식론을 구성할 수 있을 것인가? 이에 긍정적인 답을 주는 인식론적 모델을 쉐바야르 Chevallard (1985, 1988: see also Balacheff, 1990)의 지식의 **교수학적 변환론** didactic transposition theory 에서 찾아볼 수 있는 바, 쉐바야르는 이 개념을 1980년대에 프랑스에서 몇 차례의 글을 통해 발전시켜왔다.

교수학적 변환론은 지식의 대부분이 가르치기 위해서가 아니라 사용하기 위해서 고안된 것이라는 주장에 근거한다. 지식의 교수학적 변환이란 쓰여질 도구로써의 지식으로부터 가르치고 배울 지식으로의 변환을 말한다 (Chevallard, 1988, p. 7). 따라서 교육적 의도를 가진 지식의 변형은 어느 것이나 교수학적 변환이라고 할 수 있다. 사용할 지식과 가르칠 지식의 차이는, 어떤 일을 위해 지식을 사용하는 한 그 행위에 사회적 의미를 부여하기 위해 지식을 정당화하거나 주장할 필요조

차 없는 반면, 가르치는 행위는 가르칠 지식의 사회적 승인과 정당화를 요구한다는 점에 있다.

어떤 지식을 가르칠 수 있는 것으로 만드는 첫 단계는 그것을 어느 정도 통합된 전체로 조직하는 데 있다. 이를 위한 한 방법으로, 가르칠 지식 taught body of knowledge 을 그에 대응하는 학문적 지식 scholarly body of knowledge 으로부터 끌어내어왔다. 학문적 지식이란 새로운 지식을 산출하고 그 산출된 지식을 응집된 이론적 조립체로 조직하기 위한 사용할 지식일 뿐이다. 한편, 교수학적 변환의 메카니즘은 교육체계 내에 잠재적이며 쉽게 노출되지 않는다. 이 메카니즘을 밝힘으로써 우리 사회의 가장 도움이 될 교수학적 변환을 산출해낼 수 있도록 하는 것이 바로 교수학적 변환론의 과제이다.

지식의 두 상태

수학적 지식과 관련하여 많은 사람들은 이분법을 사용하여왔다. 예를 들어, 폴리아 Polya (1957)는 "발생 상태 그대로"의 수학과 "엄밀한 과학"으로서의 수학을 강조했다. 라일 Ryle (1969)의 "방법적 지식과 명제적 지식"은 널리 인용되어 왔다. 히에버트 Hiebert (1986)는 수학에 있어서의 "개념적 지식과 절차적 지식"을 개념화한 바 있다. 네이슨 Nason 과 쿠퍼 Cooper (1988)는 변증법적 과정을 통하여 "사적" private 지식이 "공적" public 지식으로 진화됨을 주장한다. 이러한 인식론적 이분법은 대개 지식에 인간적 속성을 복원시키고자 한 결과이다. 특히, 지식과 인간존재의 관계를 강조하고자 한다면, 마틴 부버 Martin Buber의 "나와 너" I and Thou 의 철학에 따라 지식의 이분법을 재조명해보는 일은 가치가 있다.

부버에 따르면, 나는 사람이나 사물과 상호작용할 때 '나-너' I-You 와 '나-그것' I-It 이라는 두 가지 상태 중 하나에 따르게 된다. 나-너의 상태에서는, '나'와 '너'가 순수한 인식의 상대로 만난다. 나-너는 관계맺음의 기본어귀이며, 나-그것은 경험과 사용의 기본어귀이다. 나-그것의 상태에서는, '나'가 '그것'을

나의 목적에 따라 사용한다. 내가 무엇인가를 깊숙히 회상하고 있을 때 조차도 내 기억 속에서 만나고 있는 것은 나-그것 상태의 '그것'이다. '너'는 결코 형태 속에 머물지 않는다. 부버(1970)의 말로 하면, "'그것'은 번데기요, '너'는 나비이다" (p. 69).

순수한 인식은 결코 오래 가지 않는다. 한 순간 나-너 관계의 '너'는 그다음 순간 '그것'이 되고, 또 계속 그렇게 반복되어야만 한다. 즉, 나-너 관계는 일상적 상태인 나-그것으로 전락을 거듭하고 있는 것이다 (Kneller, 1984, p. 47). 역으로, 나는 나-그것 상태에서 나-너 상태로 다시 들어갈 수도 있다. 사실, 인간은 '그것'의 세계에서 지속적인 삶을 보장받기도 하지만, 그 세계에서만 산다면 그는 인간이 아니다 (Friedman, 1965, p. 13).

이러한 상호작용의 두 상태에 따라 지식의·의미를 고찰해볼 수 있다. 인간의 상호작용으로서 앎은 두 양상을 띈다: 나는 무언가를 '너' 또는 '그것'의 어느 하나로 안다. 그리고 나는 이 두 상태 사이를 오간다. 예를 들면, 나는 무언가를 알게 (발견하게, 발명하게, 구성하게) 된다: 그것은 삼각형에 관한 기하학적 사실일 수도 있고, 한 무리의 수에 나타난 대수적 패턴일 수도 있고, 알려진 답에 대한 해결 경로일 수도 있다. 이제 나는 그것을 알게 되었지만, 그에 대해 모르고 있었으므로 내가 바로 그것을 찾으려고 했던 것은 아니다: 그것은 내가 알기 바로 전 나의 세계가 아닌 다른 세계에 존재했었다고 할 수도 있다. 따라서 이러한 의미의 앎은 단순히 기억함과는 다르다. 이 순간의 앎은 나-너 상태의 상호작용인 것이다.

나-너 상태의 지식은 언제나 나-그것 상태의 지식으로 되려는 경향이 있다. 나는 그것을 다른 일에 사용해야만 하기 때문이다: 다른 사람에게 표현하던가, 적어놓던가, 최소한 기억이라도 해두어야만 한다. 그것을 간직하기 위해서 나는 형식을 부여한다. 그 형식이란 간단한 말이거나 상형문자적 표현이거나 엄밀한 수식일 수도 있다. 때로는 내 개인적 취향에 따른 형식을 부여할 수도 있다. 암기법이 사용될 수도 있다. 또는 보다 효과적으로, 다른 여러 수학적 사실에 관련시켜서 조정될

수도 있다. 이제 나는 그것을 안다. 그것을 간직하고 있기 때문이다. 나는 안다. 그것을 사용하기 때문이다. 이 단계의 앎이 나-그것 상태의 상호작용이다.

나-너 상태의 앎은 나-그것 상태에서 여러 가지 표현으로 나타날 수 있다. 일단 나-그것 상태로 표현된 지식은 나-너 상태의 앎으로 회복되기도 하고 그렇지 않을 수도 있다. 그러나, 나-그것에서 나-너로 지식의 상태를 뒤집는 것은 나-너에서 나-그것으로의 前 과정에 대한 역순이 아니다. 단지 나와 지식 사이의 나-너 관계를 활성화시키는 것일 뿐이다. 지식이 의미있게 되기 위해서는 나-너 관계의 활성화가 핵심적이다. 나-그것 상태의 지식은 나-너 관계의 활성화에 도움이 될 수도, 안 될 수도 있다. 즉, 회상에 도움을 주어 내가 다시 나-너 관계에 몰입할 수 있게도 하지만, 나를 경직시켜 mental set 방해할 수도 있다. 지식의 두 상태는 보완적이다. 나-너보다 나-그것 상태가 우세할 때에는 지식의 의미가 덜 강조되지만 지식은 상대적으로 안정된 표현형태 form 를 갖춘다. 어떤 지식의 의미를 강조하려할 때에는 나-너 상태가 지배적이고 지식의 표현형태는 불안정하게 된다.

가르치는 쪽에서 보면, 가르칠 지식은 '그것'으로 표현된다. 그러나 배우는 쪽에서 보면, 깨닫는 순간의 지식은 '너'이다. 교사는 지식의 상태를 안정된 형태로 표현된 '그것'에서 학생의 마음 속의 '너'로 바꾸어 주는 특수한 사명을 가지고 있다--특히 수학적 지식의 경우, 오랜 역사와 다양한 문화 속에서 지식은 몹시 견고한 표현형태를 취해올 수 밖에 없었다. 이 특수한 사명은 교사와 학생 사이의 지식의 전달 communication 또는 나눔 sharing 이라고 할 수 있다.

지식의 변형 과정

지식의 전달 또는 나눔의 과정은 다음과 같이 정리될 수 있다. 최초의 사고자는 그 자신의 개인적 배경 속에서 수학적인 무엇인가를 알게 된다. 즉, 특정한 배경 context 속에서 개인적인 personal 방법으로 그것을 이해하게 된다. 따라서, 이 단계의 그의 수학적 지식은 개인화 personalized 되고 배경화 contextualized 된

것이라고 말할 수 있다. 지식은 언제나 나-너 상태로 시작되므로 이 개인화와 배경화의 과정에서는 나-너 상태가 핵심적이다.

지식의 개인화와 배경화는 지식의 활성화 activation 로 요약될 수 있다. 장비에 Janvier (1990)도 유사한 관점으로 지식의 배경화에 대하여 논한 바 있다. 한편 개인화는 배경화에 포함되는 것이라고 말할 수도 있다. 또는, 배경화와 개인화는 동시적이라고 하여도 좋을 것이다. 개인화의 개념은 인식론적 모델을 용이하게 활용하기 위해서 배경화의 개념으로부터 구분되었을 뿐이다. 즉, 개인화는 지식을 인지하고 조직하는 개인적 방법에 관련된다.

그러나, 지식은 전달되기 위해서 조직되고 형태가 주어져야 한다. 대부분의 경우, 최초의 사고자는 그의 성공에 기여한 개인적 조건이나 실수와 같은 것을 숨겨야만 할지도 모른다. 지식의 나-너 상태는 쇠퇴하기 시작하고, 나-그것 상태가 핵심적인 탈개인화 depersonalization 와 탈배경화 decontextualization 의 과정이 시작되는 것이다.

개인화와 배경화의 과정은 깨닫는 과정에 있는 '나'에 의한 인식론적 투자 epistemological investment 라고 할 수 있다. 탈개인화와 탈배경화의 과정은 깨달은 지식을 표현하고자 하는 '나'에 의한 또 다른 인식론적 투자이다. 그러나 이 경우는 표현자로서의 '나' representor 가 그 앞의 깨닫는 순간의 '나' knower 의 투자를 거부한 후에만 일어난다. 요컨데, 지식이 전달될 때에는 인식론적 거부 epistemological rejection 가 항상 새로운 인식론적 투자에 先行된다.

예를 들어 어떤 한 건의 지식이 타인에게 전달되기 위하여 탈개인화되고 탈배경화되었다고 하자. 그러나, 그 지식이 다른 사람의 상황 속에서 의미를 가지려면 생산자가 조직한 지식의 표현형태는 곧 깨어지게 되는데, 이는 피전달자의 쪽에서 정보가 나-너 상태로 활성화되면서 다시 개인화되고 배경화되기 때문이다. 따라서 최초의 사고자의 탈개인화와 탈배경화는 지식의 최종 상태가 아니다. 피전달자에 의해서 다시 거부되어야 하기 때문이다. 이제 피전달자가 자신이 이해한 지식에

대해 반응하려 한다면 동일한 과정이 반복된다: 이해를 위한 개인화되고 배경화된 여러 노력은 거부되고 자신이 이해한 것을 조직하고 표현하려는 새로운 인식론적 노력이 투자되는 것이다. 따라서, 지식의 전달 과정은 인식론적 투자와 거부의 반복적 순환인 것이다.

인식론적 투자와 거부의 순환은 지식의 나-그것 상태가 한 개인의 마음 안에서는 물론 한 집단 내에서 다양한 표현형태를 취하게 된다는 것을 의미한다. 즉, 지식은 전달되는 동안 변형된다. 어떤 변형은 지식의 전달에 아주 효과적이어서 상당히 항구적인 상태로 고정되어 남기도 한다. 그러한 여러 변형은 집단 전체이건 한 개인이건 변형자가 무슨 목적으로 지식을 변형하였는가에 따라 분류될 수 있다.

지식의 전형적인 변형은 학문적 목적에 의한 것이다. 이 때, 직관적이고 단순한 지식은 보다 논리적이고 형식적인 근거에 병합되고 다소 조건문(가정-결론)적인 형태로 재조직된다. 이러한 변형들이 축적되어 지식의 여러 학문적 덩어리가 형성되는 것이다. 한편, 지식은 어떤 일의 효율성을 제고하기 위하여 변형되고 응용될 수 있다. 이 경우, 지식의 논리적인 고리보다는 효율적 공식이 더 選好된다. 항해술, 측량술 등은 수학적 지식의 실용적 변형의 예라고 할 수 있다. 그 외에도 다른 여러 목적에 의해 지식이 변형되어짐은 물론이다. 수학교육에 관계된 사람들은 교육적 목적에 의한 변형, 즉 수학적 지식의 교수학적 변환에 가장 관심을 갖게 된다. 이 경우, 교수학적 변환은 주로 학문적 목적에 의해 이미 변형된 지식의 덩어리를 본따게 된다.

지식의 파손성

지식의 나-그것 상태가 나-너 상태의 활성화를 돕기도 하고 방해하기도 하는 것처럼, 지식의 변형도 필수적이면서 동시에 결함을 지닌다. 지식의 변형은 생각을 비교적 안정된 형태로 유지시키고 전달하는데 도움이 될 수 있지만, 초기의 발상을 망칠 수도 있다. 이러한 의미에서 지식은 매우 깨지기 쉽다는 성질 (지식의

파손성 fragility of knowledge)을 지닌다. 즉, 지식의 전달이 거듭되는 동안 지식은 초기의 표현형식과 의미를 고스란히 간직하게 되기가 점점 어려워지는 것이다. 어떤 지식은 잘못되고 무의미한 표현형식과 함께 사라지기도 한다. 어떤 것은 풍부한 의미와 더 좋은 표현형태를 가지고 확장되기도 한다. 어떤 것은 초기의 것과는 매우 다른 의미를 가진 것으로 변질되기도 한다.

지식의 파손성은 불변의 표현형태가 불변의 의미를 보장하지 못한다는 역설적 측면을 갖는다. 특정한 표현형태에 집착하면 할수록 그 형태에 담겼던 초기의 의미를 잃게 된다. 이러한 역설은 교실 수업의 비재생성 irreproducibility 에서 잘 볼 수 있다:

> 교사는 비록 새로운 학생들을 데리고 수업을 한다 해도 똑 같은 수업을 다시 해내기가 어렵다는 것을 알게 된다: 전 시간에 말하고 행한 것을 정확히 재생해도 효과가 다르고 종종 그 결과가 더 나빠지기도 한다. 오히려 교사는, 아마도 그 결과, 같은 말이나 행동을 반복할 때 입이 무거워지고 신중해짐을 느끼기까지 한다. 그는 최소한 그의 표현이나 지시 방식, 예시, 연습, 그리고 가능하다면 수업 그 자체의 구조까지도 바꾸었으면 하는 매우 강한 충동을 느낀다. 이러한 특징은 수업의 재생 횟수와 함께 늘어나고 교사와 학생 사이의 상호작용이 빈번한 수업일수록 강화된다: 설명과 연습만이 주된 수업이나 간단한 지시 후에 교사는 별로 간섭할 일이 없는 간단한 적용만 하게 하는 수업 등은 꽤 오래 반복 재생될 수 있다. (Brousseau, 1986, p. 13)

초기의 의미를 가능한 한 오래 간직하기 위해 요구되는 것은 지식의 명시적 형태의 재생이 아니라 지식에 대한 인식론적 경각심 epistemological vigilance (Brousseau, 1986, p. 32)이다. 교수학적으로 변환되는 지식과 그 파손성을 다룸에 있어서, 인식론적 경각심은 지식의 의미를 지속시켜가는데 필수적인 반면, 많은 사람들은 지식을 책 속에 기록하는 것이 지식을 전수시키는 가장 효과적인 방법이라고 생각하고 있다.

교수학적 변환과 수학교과서

수학교과서는 학교수학이라는 변형된 지식을 담아 간직하는 전형적 방법의 하나이다. 따라서, 교과서는 교수학적 변환에 따라 학교수학에 이르는 지식의 변형 경로에 놓인 요충이다. 그것은 교수학적 변환의 실제 모습을 조사해 볼 수 있는 원천을 제공한다. 예를 들어, 미국의 많은 기하교과서는 진술 statements 과 이유 reasons 라는 2단 형식으로 수학적 증명을 지도하는데, 이러한 형식은 대수교과서에서는 찾아보기 어렵다. 기하교과서에서 주로 볼 수 있는 그러한 증명에 대한 표현이나 설명 방식은 수학적 증명에 관한 추상적 지식으로부터의 교수학적 변환임에 틀림없다. 그것은 또한 학생이 수학적 증명의 기법을 숙지하고 난 후에는 버려질 형식이기도 하다. 교수학적 변환의 산물로서의 2단 증명 tow-column proof 은 학교수학이 교수학적 변환을 통해 과도적 형태로 표현되려는 경향을 가졌을 것이라는 가설을 암시한다. 그러한 여러 가설을 조사해봄으로써 우리는 교수학적 변환에 대한 이해의 폭을 늘려갈 수 있다. 그러한 폭 넓은 이해는 학교수학을 통해 지식을 다루어 가는 방법을 개선하는데 도움이 될 것이다.

수학교과서가 교수학적 변환의 여러 면을 관찰할 수 있는 원천이기는 하지만 교과서에 나타난 교수학적 변환은 어떤 한계를 지닐 수 있다. 킬패트릭 Kilpatrick (1980)이 미국 전국수학교사연합회 제58차 연례대회에서 "문제해결은 冊化 bookable 할 수 있는가?"라고 한 질문은 일차원적이고 정적인 교과서 안에 문제해결의 고차원적이며 동적인 과정을 실을 수 있는지를 묻는 것이었다. 가장 명백한 어려움은 교과서에 문제의 답이 실려있을 경우 풀이에 막힌 학생이 답을 미리 보는 일을 막을 길이 없다는 점이다. 다른 어려움도 많다. 막다른 길, 틀린 풀이, 문제의 재구성, 힌트 등을 어떻게 책에 실을 것인가? 수학적 문제해결은 수학적 활동의 핵심이므로, 킬패트릭의 질문은 "수학적 지식은 冊化할 수 있는가?"라고 확대 제기될 수도 있다. 이 확대된 질문은 수학교과서에 나타난 교수학적 변환의 제한점을 포함한 여러 특성을 명료히 할 것을 요구하고 있다.

대수교과서에 나타난 몇 가지 특징은 강 완 (Kang, 1990)에 의해 조사된 바 있다. 그는 교과서가 설명-연습의 절차에 따라 수학적 지식이 지도, 학습된다는 가정 하에 쓰여지고 있다고 주장한다. 그는 3종의 대수교과서를 조사하여 그에 나타난 교수학적 변환을 네 가지로 분류하였다: 이들은 수학적 개념의 국소화, 수학적 개념에 대한 실세계 모델, 유형화된 문장제, 수학 외적 지식 등이다. 그는 또한 교과서의 교수학적 변환에 의한 지식의 표현형태는 불안정한 것임을 지적하고 있다. 즉, 학교수학이 다음에 설명할 정적인 면을 지니고 있음에도 불구하고, 수학교과서의 지식은 불안정하고 역동적으로 계속 확인되는 수학적 사실에 관련되어 있다는 점이다.

교수학적 변환의 宣言性과 환경 再造成

지식은 대체로 사용되기 위하여 변형된다. 그 유의미성은 그 결과에서 유래되고 실용적 기준에 따라 판단된다. 그러나 교수학적 변환은 지식이 사용되어지기 위해서가 아니라 가르쳐지기 위해서 변형된다는 의미에서 다른 지식의 변형과 구별된다.

쉐바야르(1988)는 사용할 지식과 가르칠 지식의 차이를 지식의 사회적 측면에 비추어 설명한다. 사용할 지식에 있어서 적절성은 가장 결정적인 요소이다. 쓸모없는 지식은 버려지게 된다. 그러나 가르칠 지식에서는 적절성이 그다지 중요한 것이 아니다:

> 어떤 지식을 가르쳐야 할 지는 그 가르칠 지식이 이러저러한 사회적 활동에 쓸모있는가 하는 기준에 따라서만 판정될 수는 없다. 직업교육의 경우조차 배움, 또는 심지어 쓰기 위한 배움과 실제 씀과의 간격은 메꿀 수 없이 벌어져있다. 어떤 의미에서, 가르칠 지식은 스스로 명백해야 하며 다름아닌 오직 그 지식을 알기 위함이라는 목표만을 위한 수단으로서 사회에 드러나야 한다. (Chevallard, 1988, p. 9)

지식이 가르쳐지기 위해서는 그것이 실제에 유용하건 아니건 먼저 사회적으로 인정되어야 한다. 따라서 가르칠 지식에 있어서 중요한 것은 사회적 인정과 정당화이다. 사용할 지식으로부터 가르칠 지식으로 옮겨가면서 적절성은 정당성에 그 자리를 양보한다. 따라서 교수학적 변환이란 사용할 지식에 사회적 인정과 정당성을 부여하는 과정이다. 사회적 인정을 받기 위해서 지식은 무엇보다도 먼저 宣言되어야 한다. 선언됨 being declared 은 가르칠 수 있음 teachability 의 일부이다.

선언성에 덧붙여 교수학적 변환을 다른 지식의 변형으로부터 구별하는 또 하나의 속성이 있다. 대체로 사용할 지식은 특정한 환경에서 발생하는데, 그 안에서는 여러 상황이 임의로 결합될 수 있다. 주어진 상황에 따라 적절한 지식이 쓰여진다: 사용할 지식은 환경에 의존한다. 그러나 교수학적 변환에서는 가르칠 지식의 출현이 교수학적 의도에 의존한다. 따라서 가르칠 지식을 둘러싼 교수학적 환경은 처음부터 바꾸어지거나 재조성되어야 한다. 쉐바야르는 이러한 교수학적 환경의 재조성을 가르칠 지식의 생태학 ecology of taught knowledge 이라 불렀으며 이를 지배하는 어떤 법칙이 있으리라고 가정하였다:

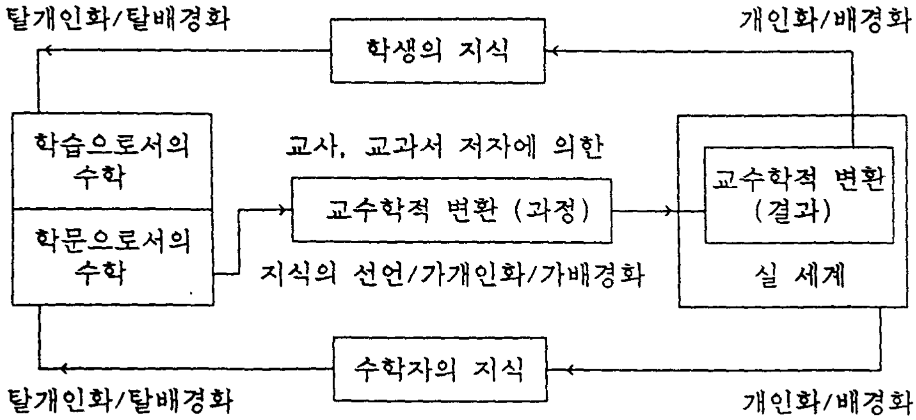
> 가르칠 지식의 생태학은 특수한 법칙에 의해 지배되는데, 이는 그것이 교수학적 관계에 고유한 조건과 속박에 의해 다듬어지기 때문이며, 이를 밝혀내는 것이 교수학 이론의 과제이다. (Chevallard, 1988, p. 10)

교수학적 환경 재조성을 지배하는 특수한 법칙은 지식의 두 상태 (나-너와 나-그것)를 가정한 인식론적 조망에 따라 개념화될 수도 있다. 지식은 인식론적 투자와 거부의 순환을 통해 전달되고 구성되므로, 배워야 할 지식에 대한 학습자의 인식론적 투자와 거부를 용이하게 해주는 것은 교수학적 변환에 있어서 환경 재조성의 기본 원칙이다. 따라서 교사의 주된 일은 가르칠 지식을 둘러싼 환경이 학생의 상황에 들어맞도록 지식을 재배경화하고 재개인화하는 것이다. 그러나 이러한 재배경화와 재개인화는 일시적이고 가설적인 것이다. 특히 교과서에서는 가상적인 학생, 교사, 교실 등을 가정하고 있다. 이러한 의미에서 교과서 안의 교수학적 변환은 지

식의 가배경화 pseudo-contextualization 와 가개인화 pseudo-personalization 의 과정 또는 그 결과이다.

교수학적 변환의 도식

인간은 인식론적 투자와 거부의 순환 과정을 통해 지식을 형성해간다. 각각의 순환에서 수학자는 그의 주위 세계를 개인화, 배경화하고 난 후, 그 자신의 고유의 지식을 학문적 지식으로 탈개인화, 탈배경화한다. 교수학적 변환은 이미 형성된 지식의 사회적 배경과 가상적 학생의 개인적 배경의 간격을 이어주려 지식을 변형시키는 노력이다. 대체로 수학의 학문적 지식이 교실에서 가르칠 지식으로 변환된다. 교과서 또는 교사에 의해 표현된 지식은 다시 학생 자신에 의해 변형되어야 한다. 즉, 학생에게서도 인식론적 투자와 거부의 순환 과정이 일어나는 것이다. 먼저, 이해하여 받아들인다는 의미에서, 학생은 교육가 특히 교사에 의해 변형되어진 지식을 개인화하고 배경화할 필요가 있다. 다음으로, 그가 이해한 것을 교사 앞에 표현해야 한다는 의미에서, 그는 그의 지식을 탈개인화, 탈배경화시켜야 한다. 따라서, 지식이 이러한 여러 변환을 따라 흐른다고 가정하면, 교수학적 변환을 둘러싼 수학적 지식의 흐름은 다음 그림과 같이 도식화될 수 있다.



교수학적 현상

쉽게 예상할 수 있는 바와 같이 교수학적 변환의 실제적인 문제는 어떻게 교실에서 지식을 효율적으로 학습하도록 변형하는가 하는 것이다. 그러한 노력에 있어서의 어려움은 학생의 인식론적 두 과정, 즉 개인화/배경화와 탈개인화/탈배경화의 과정을 어떻게 균형있게 조화시켜 지식의 파손성을 조절해나가는 가에 있다. 이에 따라, 교수학적 변환을 고안하거나 관찰할 때에 언제나 신중히 고려하여야 할 현상을 네 가지로 분류할 수 있다.

먼저, 개인화/배경화의 과정과 관련하여 두 가지의 극단적 현상을 고려할 수 있는데 메타-認知的 이동 meta-cognitive shift 과 形式的 固着 formal abidance 이 그것이다. 메타-인지적 이동은 가상적 학생의 개인화/배경화의 과정을 지나치게 강조한 결과이고, 형식적 고착은 그 중요성을 과소평가한 결과이다. 학생의 탈개인화/탈배경화와 관련하여 고려하여야 할 두 가지 극단적 현상은 토파즈 효과 Topaze effect 와 죠르단 효과 Jourdain effect 이다. 토파즈 효과는 학생의 탈개인화/탈배경화의 과정을 간과한 방편적 조치의 결과이고, 죠르단 효과는 그 과정을 과대평가한 결과이다.

메타-인지적 이동 메타-인지적 이동이란 교사의 교수학적 노력의 촛점이 수학적 지식 그 자체로부터 그가 만든 교수학적 고안으로 이동한 것을 말한다. 브루소 Brousseau (1984, p. 117)가 보여준 예는 이 현상의 전형적인 것으로서, 1960년대에 구조를 가르치기 위해 집합을 타원으로 나타내는 것과 같은 그래프의 사용인데, 이 방법은 파피 G. Papy 와 관련이 있다. 미국의 종합 학교수학 프로그램 Comprehensive School Mathematics Program (CSMP) (Howson, Keitel, & Kilpatrick, 1981, pp. 154-159 참조)에 나오는 코끼리 엘리 Eli 의 이야기에서는, 교사의 교수학적 관심이 수학적 지식 (음의 정수의 개념)으로부터 교수학적 고안 ("마술 콩"을 나타내는 기호 "^", 음의 정수를 나타내기 위함)으로 이동되었다. 즉, 음의 정수의

개념을 도입하기 위하여, 가상적 상황 ("마술 콩이 보통 콩을 만나면 둘 다 사라진다")이 소개되고, "5 + ˉ5 = 0" 또는 "7 + ˉ4 = 3"과 같은 표기 방법에 대해 연습하게 된다. 전문적 용어인 '음의 정수'는 전혀 사용되지 않는다. 메타-인지적 이동은 학생의 개인화/배경화의 과정을 용이하게 하는 데 유리한 반면, 학생의 수학을 수학자의 수학과는 사뭇 다른 형태로 이끌 수도 있다.

형식적 고착 형식적 고착은 공식화된 지식의 논리적 표현으로서, 메타-인지적 전략을 무시하고 지식의 은유적 사용을 억제하려는 시도이다. 이것은 브루소 (1986)에 의해 메타-수학적 이동 meta-mathematical slide 이라고도 불리워진 바 있는데, "수학적 문제해결을 논리적 논의로 대체하고 문제해결 실패의 모든 원인을 그것에 돌리는 것" (p. 32)을 말한다. 전형적 예는 유클리드 원본 *Elements* 이나 그와 유사한 것에서 볼 수 있는 수학적 지식의 연역적 표현이다. 19세기 미국에서 발행된 올네이 Olney 의 교과서에서는 일반적 법칙이 먼저 소개되고난 후 예제가 주어진다. 예를 들어, $(a + b)^m$에 대한 이항공식이 주어지고난 후 $(x + y)^5$이나 $(x + y)^{-4}$과 같은 특수한 경우의 전개 방법이 설명된다 (Rash, 1975, pp. 434-442). 즉, 이항공식을 이해한다는 것은 일반적 법칙을 특수한 경우에 논리적으로 적용한다는 것을 의미한다. 이러한 교과서에서 저자의 노력이란 곧 수학적 법칙이 적용되는 논리적 과정을 상세히하는 것이다.

현대의 예는 미국 일리노이 대학교 학교수학위원회 University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM) 에서 낸 교과서에서 볼 수 있는데, 이 위원회의 목표는 여러 대학의 편익을 위하여 학교수학과 대학수학의 간격을 좁히는데 도움이 되고 보다 우수한 수학자 세대를 확보하고자 대학 진학 준비 학생들의 수학교육을 개선하는 데 있었다 (Howson, Keitel, & Kilpatrick, 1981, pp. 132-138). UICSM의 교재의 한 곳에는 실수의 여러 원리가 축약된 이름과 각 원리의 패턴과 함께 나열된다. 몇 가지 예를 들면,

The Associative Principle for Addition [APA]

(_____ + _ _ _) + ... = _____ + (_ _ _ + ...)

The Twist Principle for Addition [TPA]

(_____ + _ _ _) + (..... + ~~~~~) = (_____ + ...) + (_ _ _ + ~~~~~)

The Left Distributive Principle for Multiplication over Addition [LDPMA]

..... · (_____ + _ _ _) = (..... · _____) + (..... · _ _ _)

The Principle for Multiplying by +1 [PM+1]

_ _ _ · +1 = _ _ _

즉, 각 원리들의 의미가 매우 형식적인 방법으로 압축되어 있음을 알 수 있다. 형식적 고착은 학생들로 하여금 수학적 활동이 가진 귀납적 성격을 이해하는 데 도움이 되지 않을 수 있으나, 탈개인화/탈배경화의 과정에서의 어려움을 줄여줄 수는 있다.

토파즈 효과　토파즈 효과는 소위 교수학적 계약 didactical contract (Brousseau, 1984)에 의한 압박에서 일어나는 전형적인 현상으로서, 교사가 학생의 행동의 의미를 다룸에 있어서 인지적 내용에 관한 학습 환경을 일소하게 되는 것을 말한다. 토파즈 효과란 이름은 브루소에 의해 마르셀 빠뇰 Marcel Pagnol 의 희곡 "토파즈"에서 본따 붙여졌다. 이 희곡의 첫 장에서 교사 토파즈는 佛語 받아쓰기를 하는 그의 12살 난 학생에게, "*des moutons étaient en sûreté dans un parc*" (양들은 공원에서 안전하였다)라는 구절에서 복수를 나타내는 묵음 "s"를 정확히 받아쓰도록 지도한다. 학생의 어깨 넘어로 잠시 들여다 본 후, 그는 계속해서 "des moutons," "des moutonss"이라고 불러주다가 마침내 "des moutonsse"라고 불러버리고 만다. 그는 결국, 몇 차례의 실패 끝에 약간의 양해를 구하면서 그것이 복수라는 명백한 힌트를 주고 만 것이다 (Brousseau, 1984, p. 110). 바우얼스펠트 Bauersfeld (1988, pp. 33-36)가 보여준 "상호작용의 깔때기 패턴" funnel pattern of interaction 도 이러한 현상의 한 예이다. 깔때기 패턴에서는 교사가 일련의 유도 질문을 통해 원하는 결과를 끌어낸다. 또 다른 예는 교과서에서 문제에 대한 답을 함께 제시하는 것인데, 앞에서 킬패트릭에 의해 지적 논의된 바 있다.

죠르단 효과 죠르단 효과는 토파즈 효과의 심각한 퇴행이다: 특정한 지식에 대해 학생과 토론하기도 어렵고 그렇다고 가르칠 수 없음을 인정하기도 어렵게 되자 그러한 곤란을 피하기 위하여, 교사는 마치 학생들의 행동이나 반응에서 [특정한] 과학적 지식이 형성되었음을 확인한 듯이 행동하게 되는데, 그 학생들의 반응이란 사실은 사소하거나 진부한 동기에서 비롯된 것일 뿐이다. 죠르단 효과란 이름은 몰리에르 Moliére 의 "The Would-be Gentleman (자칭 신사)"에 나오는 극중 인물 죠르단의 이름에서 따온 것으로, 철학자에게 철자법을 가르쳐 달라고 부탁한 죠르단은 철학자로부터 산문과 운문의 차이에 대해 설명을 듣고 나서 마침내 "이런! 사십년간이나 산문으로 말해왔으면서 그것도 모르고 있었다니, 아뭏든 가르쳐주셔서 대단해 고맙소"라고 외치게 된다. (Brousseau, 1984, pp. 115-116). 교실에서의 예로는, 여러 개의 작은 요구르트 병이나 색칠한 그림 등으로 약간 기이한 조작을 해낸 아동에게, "너는 방금 클라인 군 Kleinian group을 발견했어"라고 말해주는 경우이다. 다시 말해 죠르단 효과란 교사가 학생의 매우 사소하고 진부하기까지 한 반응을 특정한 과학적 지식의 표현으로 받아들이려고 하는 것을 말한다.

혹자는 이들 네 가지 현상이 어쩔 수 없는 극단적인 것들이라고 주장할 수도 있다. 사실은 극단적일 뿐만 아니라 각 현상의 정상적인 경우와 병적인 경우를 분명히 구별하기도 어렵다. 지식의 두 상태라는 관점에 비추어 보면, 이들 현상은 교사나 교과서 저자가 지식의 의미와 그 표현형식 양쪽을 고루 고려하고자 할 때 생기는 어려움을 나타낸다. 강 완 (Kang, 1990)의 관찰에 따르면, 극단적 교수학적 현상이 잠재해 있음에도 불구하고 학교수학의 교과서 저자들은 지식의 교수학적 변

환을 병적으로 사용한다고 보여지지 않았다. 그들은 교수학적 현상을 고려하여 중립적 입장을 견지했다. 한편, 그러한 태도는 교실에서 교과서를 사용하는 일이 제한적임을 나타내기도 한다. 예를 들어, 비록 지식을 극단적인 병적 형태로 변환시킬 수도 있겠지만, 교사는 교과서 저자보다 자유롭게 때로는 보다 효과적으로 직사각형의 그림 등을 사용해서 다항식의 전개공식을 설명할 수도 있다. 이러한 교과서 사용의 한계는 교과서에 이어 교실에서의 수학적 지식의 교수학적 변환에 대한 연구가 필요함을 말해 준다.

결언

교수학적 변환론은 지식의 본질에 관한 현상학이나 본체론적 관점의 어느 극단에도 치우치지 않는 인식론적 모델을 제공한다. 이 이론은 또한 지식의 두 상태에 관한 철학적 관점에 의해 보강되며, 학교수학의 교수 학습에 관한 여러 현상을 의미있게 해석하는 데 뒷받침된다. 지식은 본질적으로 거듭되는 전달 공유의 과정에서 깨지기 쉬운 fragile 것이다. 이 지식의 파손성을 다룸에 있어서 책에 지식을 기록하는 일은 지식의 의미를 변함없이 유지하기 위한 근본적 해결책이 아니다. 비록 학교수학이라는 지식의 덩어리가 사전에 선언되어야 한다는 정적인 면을 가지고 있지만, 교과서에 나타난 지식의 표현형태는 불안정하다. 교과서의 교수학적 변환의 과정은 가배경화 및 가개인화의 과정이라 불릴 수 있다. 네 가지 교수학적 현상은 교실에서 수학을 가르치거나 수학교과서를 쓸 때 지식을 변환하는 효과적인 방법과 밀접히 관련된다. 교실의 교사는 극단적인 교수학적 현상을 보이면서 수학적 지식을 변환할 수도 있는 반면, 교과서 저자들은 이들 현상에 관해 중립적 태도를 보인다. 따라서, 교실에서의 효과적인 교과서 사용은 수학교사 자신의 인식론적 경각심 epistemological vigilance 에 달려 있다.

참고 문헌

Balacheff, N. (1990). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 258-272.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In D. A. Grouws, T. J. Cooney, & D. Jones (Eds.), *Research agenda in mathematics education: Perspectives on research on effective mathematics teaching* (pp. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, & Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.-G. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education (TME)* (ICME 5--Topic Area and Miniconference: Adelaide, Australia, pp. 110-119). Bielefeld, F. R. Germany: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Brousseau, G. (1986, November). *Basic theory and methods in the didactics of mathematics.* Paper presented at the conference Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education, Lochem, The Netherlands.

Buber, M. (1970). *I and thou* (A new translation with a prologue "I and you" and notes by Walter Kaufmann). New York: Charles Scribner's Sons.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique* [The didactical transposition]. Grenoble, France: Le Pansée Sauvage.

Chevallard, Y. (1988, August). *On didactic transposition theory: Some introductory notes.* Paper presented at the International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, Czechoslovakia.

Friedman, M. (1965). Introductory essay. In M. Buber, *The knowledge of man: Selected essays* (pp. 11-58). New York: Harper & Row.

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Howson, G., Keitel, C., & Kilpatrick, J. (1982). *Curriculum development in mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Janvier, C. (1990). Contextualization and mathematics for all. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning in the 1990s* (1990 yearbook, pp. 183-193). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kang, W. (1990). *Didactic transposition of mathematical knowledge in textbooks* (Doctoral dissertation, University of Georgia). Being published.

Kilpatrick, J. (Speaker). (1980, April). *Curriculums of the 1980s* (Cassette Recording No. 206 at the 58th annual NCTM meeting in Seattle). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J. (1987, July). *What constructivism might be in mathematics education.* Paper presented at the 11th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Montreal, Canada.

Kneller, G. F. (1984). *Movements of thought in modern education.* New York: Wiley.

Nason, R., & Cooper, T. (1988). An information processing theory of mathematics education: A summary of central models and underlying theories. In H.-G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline mathematics education (didactics of mathematics): Proceedings of the Second TME-Conference*, (pp. 138-160). Bielefeld, F. R. Germany; & Antwerp, Belgium: Editors.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). New York: Doubleday.

Rash, A. M. (1975). Some topics in the mathematics curriculum since colonial days. *School Science and Mathematics*, *75*, 423-444.

Ryle, G. (1969). *The concept of mind.* London: Hutchinson.

Von Glasersfeld, E. (1985). Reconstructing the concept of knowledge. *Archives de Psychologie*, *53*, 91-101.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.