

# 非線形解析에 의한 不等間隔의 土工量計算에 관한 研究

## A Study on the Earthwork Calculation on Unequal Intervals by Nonlinear Analysis

朴 雲 龍\* 文 斗 烈\*\*  
Park Woon-Yong Mun Du-Yeoul  
車 星 烈\*\*\*  
Cha Sung-Yeoul

### 要 旨

본 연구는 토공량 결정에 있어 비선형 해석에 의한 부등 간격의 토공량 계산을 하는데 그 목적이 있다. 여기서는 수치 해석에 의해 유도된 식과 선형과 비선형 점고법을 비교 연구하였다. 그 결과 유도된 식의 알고리즘은 기존의 선형과 비선형 점고법보다 더 정확하였다. 각 방법들에 대한 실제적용을 위해 세가지의 모형 실험을 하였다.

### ABSTRACT

The purpose of this paper is to calculate the excavation volume of unequal interval grid using nonlinear boundary in earthwork volume determination.

The formulas by unmerical annlysis in this paper is compared with linear and nonlinear spot level method of unequal interval grid.

As a result algorithm of derived formula by numerical analysis should provide a better accuracy than the linear and unlinear spot level method currently in use. Practical application of each method is illustrated by three model test.

### I. 序 論

건설공사에서 상당한 비중을 차지하는 토공량의 계산은 1958년 미국의 Miller, C와 Laflame에 의해 도로 설계시 비교노선과 토공량 산정을 하면서 시작된 최초의 수치지형 모형의 연구가 시작된 이래로 많은 연구가 있었다.

그러나 지금까지의 토공량 계산에서는 대부분 그 경계를 선형으로 가정하여 구하였으나 실제로 불규칙한 지형을 선형으로 가정한다는 것은 매우 불합리하다.

1987년 M. EL Hassan은 심프슨 3/8 법에 의해 비선형 경계의 면적을 구하였고(1987. 10

ASCE),<sup>1)</sup> 1988년 Easa는 심프슨 1/3, 3/8 법칙을 이용하여 비선형 부등간격의 면적을 산정하고, 또한 비선형 등간격의 체적 계산을 연구하여 발표하였으며(1988.5 ASCE),<sup>2)</sup> 1989년 D. W Chambers는 비선형 부등간격의 체적 계산을(1989.11 ASCE) 연구하여 발표하였다.<sup>3)</sup>

그러나 실제 지형의 측량에서 등간격으로 표고를 구한다는 것은 상당히 어려운 문제가 있으며, 심프슨 3/8 법칙에서의 지거의 경계지역에 있어서 오차를 적게하기 위하여 본 논문에서는 3차 곡선식의 최대, 최소점을 이용한 비선형 부등간격에 의한 다항식의 중간구간의 면적을 결정하는 방법을 연구하였다. 또한 토공량 계산에서 흔히 사용하는 심프슨 법칙을 이용한 선형 등간격 점고법과 비선형 등간격 점고법 그리고 본 논문에서 연구한 3차곡선식의 최대, 최소점을 이용한 비선형 부등간격 점고법을 비교, 분석하

\* 東亞大學校 土木工學科 教授  
\*\* 東義大學校 土木工學科 副教授  
\*\*\* 東亞大學校 土木工學科 博士課程

여 고찰하였다.

## II. 非線形, 等間隔土工量計算

### 1. 비선형, 등간격 면적계산(1988. Easa)

Fig. 1 과 같이 불규칙한 경계선을 부분적으로 직선화하여 다각형으로 만들어 삼각법이나 다각형 면적계산식으로 직선부내의 면적을 계산하고, 나머지 굴곡부의 면적은 굴곡 경계선과 직선부 사이의 지거를 측정하여 사다리꼴 공식이나 심프슨 법칙을 이용하여 결정한다.

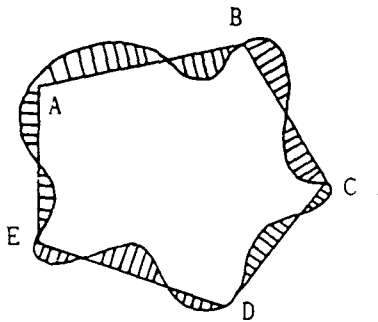


Fig. 1. Offset method.

Fig. 2 와 같이 등간격으로 지거를 나누었을 때 심프슨 1 법칙은 2구간을 1조로 하여 단면적을 계산한다.

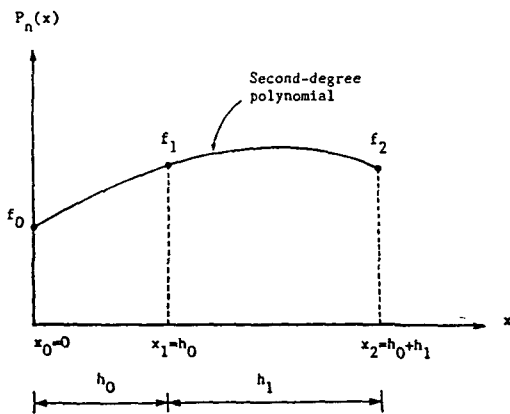


Fig. 2. Area calculation by 1/3 Simpson formula.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \dots\dots(2-1)$$

심프슨 1/3 식은 식 (2-1)의 다항식 아래의 면적을 계산하므로써 유도할 수 있다.

$$A_1 = \int_0^b (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx \quad \dots\dots(2-2)$$

이며, 다항식의 계수  $a_0, a_1, a_2$ 는 세 점의 좌표를 대입하므로써 구해진다.

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{1}{b} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) \quad \dots\dots(2-3)$$

$$a_2 = \frac{1}{b^2} (2f_0 - 4f_1 + 2f_2)$$

식 (2-3)의  $a_0, a_1, a_2$ 를 식 (2-2)에 대입하고  $b=2h$ 이면 아래와 같이 심프슨 1/3 공식을 얻을 수 있다.

$$A = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) \quad \dots\dots(2-4)$$

식 (2-4)은 3개의 연속점을 지나는 2차 다항식이며, 간격이 많을때 반드시 짝수이어야 한다.

Fig. 3 와 같이 등간격으로 支距를 나누었을 때 심프슨 제 2 法則은 3 區間을 1 組로 하여 斷面積을 計算한다.

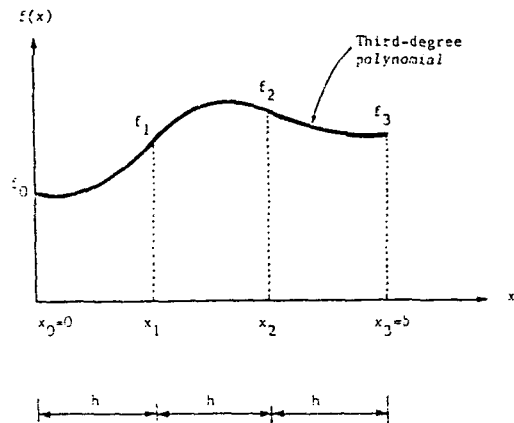


Fig. 3. Area calculation by 3/8 Simpson formula.

Fig. 3에서  $a_0, a_1, a_2, a_3$ 의 不規則한 境界는 다음과 같이 3次 多項式 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \dots\dots(2-5)$$

심프슨 3/8 식은 식 (2-5)의 다항식 아래의 면적을 계산하므로써 유도할 수 있다.

$$A_2 = \int_0^b (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx \quad \dots\dots(2-6)$$

식 (2-6)에서 이들 支距의 多項式의 係數  $a_0, a_1, a_2, a_3$ 가 다음과 같이 구해진다.

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{1}{2b}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3)$$

$$a_2 = \frac{9}{2b^2}(2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3) \quad \dots\dots(2-7)$$

$$a_3 = \frac{9}{2b^3}(-f_0 + 3f_1 - 3f_2 + f_3)$$

곡선과 기선 사이의 面積은 y의 함수를 적분하고 식 (2-7)의 계수값을 대입하므로써 결정된다.

$$A_1 = \int_0^{3x_1} (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx$$

$$= \left( \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + e \right)_0^{3x_1}$$

$$= \left( \frac{81ax_1^4}{4} + \frac{27bx_1^3}{3} + \frac{9cx_1^2}{2} + 3dx_1 \right) \quad \dots\dots(2-8)$$

식 (2-8)에 多項式 係數값을 대입하고 정리하면 다음과 같이 심프슨 3/8法則에 의해 斷面積이 결정된다.

$$A_2 = \frac{3}{8}x_1(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4) \quad \dots\dots(2-9)$$

식 (2-9)를 일반식의 형태로 쓰면,

$$A_2' = \frac{3}{8}x_1 \left[ y_1 + y_n - \sum_{i=1}^{(n-7)/3} y_{4+i} + 3 \sum_{i=2}^{i=0} y_i \right] \quad \dots\dots(2-10)$$

이 된다.

## 2. 비선형, 등간격체적계산(Easa 方法)

Fig. 4에서 간격이 m과 n이고 절토고는 f(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)이며, 단위격자의 면적은 h<sup>2</sup>이다.

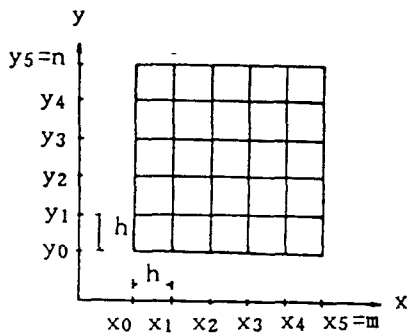


Fig. 4. Rectangular grid equal intervals.

1) m=2, n=2 일 경우

$$V = \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} f(x, y) dy dx$$

y에 대한 적분은 심프슨 제 1/3법칙으로 하면

$$V = \frac{h}{3} \left[ \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0) dx + 4 \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_2) dx \right] \quad \dots\dots(2-11)$$

이 되고 x에 대한 적분을 다시 심프슨 1/3법칙으로 하면

$$V = \frac{h^2}{9} \left[ f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0) + 4f(x_0, y_1) + 16f(x_1, y_1) + 4f(x_2, y_1) + f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2) \right] \quad \dots\dots(2-12)$$

이 된다.

식 (2-11), (2-12)을 하나로 다시 정리하면 식 (2-13)와 같다.

$$V = \frac{h^2}{9} \left[ (f_{00} + f_{20} + f_{02} + f_{22}) + 4(f_{10} + f_{01} + f_{21} + f_{12}) + 16f_{11} \right] \quad \dots\dots(2-13)$$

식 (2-13)를 일반식으로 나타내면 식 (2-14)와 같다.

$$V = \frac{h^2}{9} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 M_{ij} f_{ij} \quad \dots\dots(2-14)$$

여기서 M<sub>ij</sub>행렬은 아래와 같다.

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

## Ⅲ. 非線形 不等間隔 土工量計算

### 1. 비선형 부등간격 면적계산(1989. Chambers)

심프슨 제 1, 2법칙으로 면적을 구할 때는 지거의 간격이 반드시 등간격이어야 하므로 곡선 경계의 주된점인 지거의 최대, 최소 편차점 및 곡물의 변곡점, 일정한 기울기 간격을 선택할 수 없으며, 가정한 포물선의 불연속성이 실제 지형과 맞지 않는 경우가 생길 수 있고 분할 영역이 2혹은 3의 배수가 아닐때는 이 식을 적용

하기가 어렵게 된다. 부등간격의 면적계산에는 Lagrange 보간다항식에 의한 수치적분이 이용된다. Fig. 5 와 같은  $n+1$  개 점을 지나는 다항식 함수  $P_n(x)$ 는 다음과 같이 된다.

$$P_n(X) = f_k, \quad k=0, 1, 2, \dots, n \quad \dots(3-1)$$

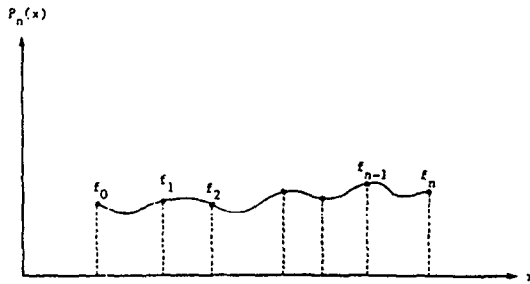


Fig. 5. Lagrange interpolating polynomial.

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n L_k(X) f_k \quad \dots(3-2)$$

여기서,  $L_k(X)$ 는 보간계수로 다음과 같이 된다.

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(X - X_j)}{(X_k - X_j)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n \quad \dots(3-3)$$

따라서, 식 (3-2)를 적분하면 다항곡선 아래의 면적이 구해진다.

$$A_L = \int_{x_0}^{x_n} \sum_{k=0}^n f_k L_k(X) dx = \sum_{k=0}^n a_k f_k \quad \dots(3-4)$$

여기서,  $a_k$ 는  $K$ 점의 수치계수로서,

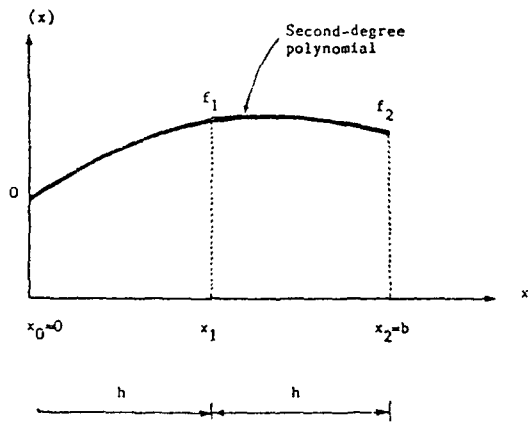


Fig. 6. Generalized Simpson 1/3 formula.

$$a_k = \int_{x_0}^{x_n} L_k(X) dx \quad \dots(3-5)$$

이 된다.

Fig. 6과 같이 3 연속점  $f_0, f_1, f_2$ 를 지나는 2차 다항식의 간격은 각각  $h_0$ 와  $h_1$ 로 일정하지 않은 단면의 면적은,

$$A = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 \quad \dots(3-6)$$

이 되며 여기서,  $a_0, a_1, a_2$ 는 식 (3-5)에 의해  $x_0=0, x_1=h_0, x_2=h_0+h_1$ 을 대입하면 각 계수는 다음과 같이 된다.

$$a_0 = \int_0^{h_0+h_1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{(h_0+h_1)(2h_0-h_1)}{6h_0}$$

$$a_1 = \int_0^{h_0+h_1} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = \frac{(h_0+h_1)^3}{6h_0h_1} \quad \dots(3-7)$$

$$a_2 = \int_0^{h_0+h_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx = \frac{(h_0+h_1)(2h_1-h_0)}{6h_1}$$

따라서, 식 (3-7)을 식 (3-4)에 대입하면 다음과 같이 비등간격의 면적결정식이 유도된다.

$$A = \frac{(h_0+h_1)}{6} \left[ \frac{(2h_0-h_1)}{h_0} f_0 + \frac{(h_0+h_1)^2}{h_0h_1} f_1 + \frac{(2h_1-h_0)}{h_1} f_2 \right] \quad \dots(3-8)$$

또한, 자료구간  $n$ 이 짝수일때 단면적은 식 (3-8)에 의해 전체 면적은 다음과 같이 결정된다.

$$A_e = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \text{odd}}}^{n-2} \frac{(h_i+h_{i+1})}{6} \left[ \frac{(2h_i-h_{i+1})}{h_i} f_i + \frac{(h_i+h_{i+1})^2}{h_ih_{i+1}} f_{i+1} + \frac{(2h_{i+1}-h_i)}{h_{i+1}} f_{i+2} \right] \quad \dots(3-9)$$

## 2. 비선형 부등간격체적계산

$(n+1)$ 개의 각점  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 이  $x$ 축에, 이에 상응하는  $(n+1)$ 개의  $y$ 좌표  $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ 이 주어졌을때  $P_n(X) = f_k$ 라그랑제 보간 다항식이라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n L_k(X) f_k \quad \dots(3-10)$$

여기서,  $L_k(X)$ 는 보간계수로 다음과 같이 된다.

$$L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(X-x_i)}{(x_k-x_i)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots(3-11)$$

만약  $f(x)$ 가  $(x_k, f_k)$ 를 통과하는  $n$ 차 다항식이며,  $[x_0, x_n]$ 에서  $f(x) = P_n(x)$ 의  $x$ 축과  $y$ 축 아래의 면적은 다음과 같다.

$$A = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \sum_{k=0}^n f_k L_k(X) dx = \sum_{k=0}^n r_k f_k \quad \dots\dots(3-12)$$

여기서,

$$r_k = \int_{x_0}^{x_n} L_k(X) dx \quad \dots\dots(3-13)$$

Easa는 점  $(x_k, y_k)$ 를 지나는 다항식으로 가정하여 아래와 같은 Simpson 1/3 공식을 구하였고, 여기서  $x_1=0, x_2=h_0+h_1$ 이고,  $x_3=h_0+h_1$ 이며 식 (3-14)와 같다.

$$A = \frac{(h_0+h_1)}{6} \left[ \frac{(2h_0-h_1)}{h_0} f_0 + \frac{(h_0+h_1)^2}{h_0 h_1} f_1 + \frac{(2h_1-h_0)}{h_1} f_2 \right] \quad \dots\dots(3-14)$$

또한 식 (3-12)에서 심프슨 3/8 법칙을 유도하고, Fig. 8에서  $f(x)$ 에서의 다항식 아래의 면적을 구하면,

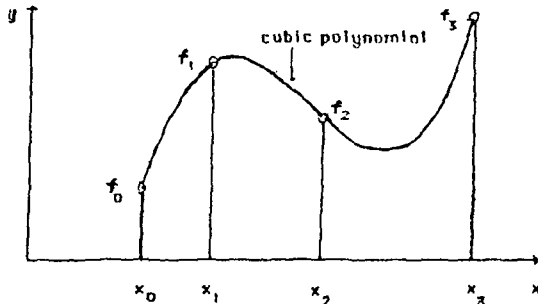


Fig. 7. Generalized Simpson 3/8 Formular.

$$A = \sum_{k=0}^3 r_k f_k \quad \dots\dots(3-15)$$

이다. 여기서

$$r_0 = \int_0^{h_0+h_1+h_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} dx \quad \dots\dots(3-16)$$

이 되고, (3-16)을 적분하여,  $x_0, x_1, x_2, x_3$ 를 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r_0 = \frac{(h_0+h_1+h_2)}{12h_0(h_1+h_2)} (3h_0^2-h_1^2+h_2^2 + 2h_0h_1-2h_0h_2)$$

위와 같은 방법으로 계산하여  $r_1, r_2, r_3$ 를 구할 수 있다.

$$r_1 = \frac{(h_0+h_1+h_2)^3}{12h_0(h_1+h_2)} (h_0+h_1-h_2)$$

$$r_2 = \frac{(h_0+h_1+h_2)^3}{12h_0(h_0+h_1)} (h_1+h_2-h_0)$$

$$r_3 = \frac{(h_0+h_1+h_2)}{12h_2(h_1+h_2)} (h_0^2-h_1^2 + 3h_2^2-2h_0h_2-2h_1h_2)$$

식 (3-12)으로부터 심프슨 3/8 식을 구할 수 있다.

$$A = \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{(h_0+h_1+h_2)}{12} \left[ \frac{3h_0^2-h_1^2+h_2^2+2h_0h_1-2h_0h_2}{h_0(h_0+h_1)} f_0 + \frac{(h_0+h_1+h_2)^2(h_0+h_1-h_2)}{h_0h_1(h_1+h_2)} f_1 + \frac{(h_0+h_1+h_2)^2(h_1+h_2-h_0)}{h_1h_2(h_0+h_1)} f_2 + \frac{h_0^2-h_1^2+3h_2^2-2h_0h_2+2h_1h_2}{h_2(h_1+h_2)} f_3 \right]$$

만약 간격들이 길이  $h$ 와 같다면 면적은  $A = 3/8h[f_0+3f_1+3f_2+f_3]$ 로 되며, 또한 심프슨 3/8 법칙은 부등간격 면적을 추정하는데 이용될 수 있음을 알 수 있다.

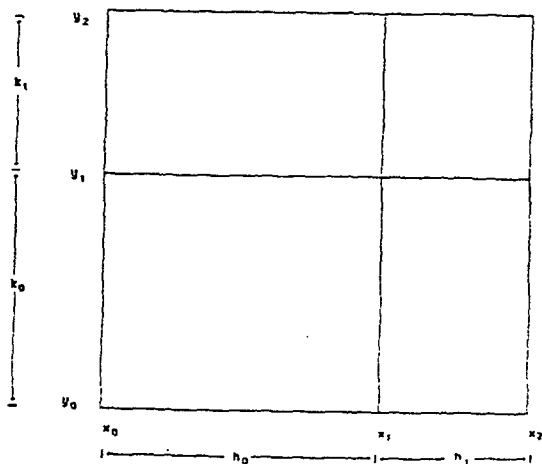


Fig. 8. 2x2 Grid Unit, Unequal Intervals.

Fig. 8에서 2x2 단위의 토공량을 계산하면,

$$V = \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} f(x, y) dx dy \quad \dots\dots(3-17)$$

식 (3-15)와 같이 심프슨 1/3 법칙으로 y에 대해서 적분하면

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(k_0+k_1)}{6} \left[ \frac{(2k_0-k_1)}{k_0} f(x_0, y_0) + \frac{(k_0+k_1)^2}{k_0 k_1} f(x, y_1) + \frac{(2k_1-k_0)}{k_1} f(x, y_2) \right] dx$$

이코, 다시 y에 대해서 적분하면,

$$V = \frac{(k_0+k_1)}{6} \frac{(h_0+h_1)}{6} \left\{ \frac{(2k_0-k_1)}{k_0} \left[ \frac{(2h_0-h_1)}{h_0} f_{00} + \frac{(h_0+h_1)^2}{h_0 h_1} f_{10} + \frac{(2h_1-h_0)}{h_1} f_{20} \right] + \frac{(k_0+k_1)^2}{k_0 k_1} \left[ \frac{(2h_0-h_1)}{h_0} f_{01} + \frac{(h_0+h_1)^2}{h_0 h_1} f_{11} + \frac{(2h_1-h_0)}{h_1} f_{21} \right] + \frac{(2k_1-k_0)}{k_1} \left[ \frac{(2h_0-h_1)}{h_0} f_{02} + \frac{(h_0+h_1)^2}{h_0 h_1} f_{12} + \frac{(2h_1-h_0)}{h_1} f_{22} \right] \right\}$$

일반식으로 다시 쓰면,

$$V = \frac{(k_0+k_1)}{6} \frac{(h_0+h_1)}{6} \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 a_i c_j f_{ij}$$

여기서,

$$a_0 = \frac{(2h_0-h_1)}{h_0}, \quad a_1 = \frac{(h_0+h_1)^2}{h_0 h_1},$$

$$a_2 = \frac{(2h_1-h_0)}{h_1}$$

이코,

$$c_0 = \frac{(2k_0-k_1)}{k_0}, \quad c_1 = \frac{(k_0+k_1)^2}{k_0 k_1},$$

$$c_2 = \frac{(2k_1-k_0)}{k_1}$$

이다.

Fig. 9에서 3×2 단위의 격자망의 체적을 구하면,

$$V = \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} f(x, y) dx dy \quad \dots\dots(3-18)$$

심프슨 1/3 법칙에 의하여 적분하면,

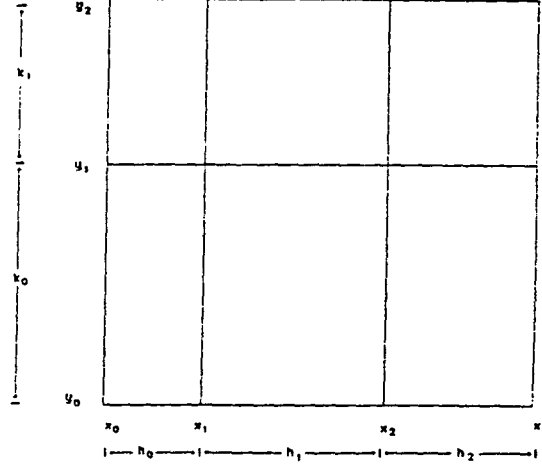


Fig. 9. 3×2 Grid Unit, Unequal intervals.

y에 대하여 적분하면,

$$V = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(k_0+k_1)}{6} \left[ \frac{(2k_0-k_1)}{k_0} f(x_0, y_0) + \frac{(k_0+k_1)^2}{k_0 k_1} f(x, y_1) + \frac{(2k_1-k_0)}{k_1} f(x, y_2) \right] dx$$

x에 대하여 적분하면,

$$V = \frac{(k_0+k_1)}{6} \frac{(h_0+h_1+h_2)}{12} \left\{ \frac{(2k_0-k_1)}{k_0} \left[ \frac{(3h_0^2-h_1^2+h_2^2+2h_0h_1-2h_0h_2)}{h_0} f_{00} + \frac{(h_0+h_1+h_2)^2(h_0-h_1-h_2)}{h_0 h_1 (h_1+h_2)} f_{10} + \frac{(h_0+h_1+h_2)^2(h_0+h_1-h_2)}{h_1 h_2 (h_0+h_1)} f_{20} + \frac{(h_0^2-h_1^2+3h_2^2-2h_0h_1+2h_1h_2)}{h_2 (h_1+h_2)} \right] + \frac{(k_0+k_1)^2}{k_0 k_1} \left[ \frac{(3h_0^2-h_1^2+h_2^2+2h_0h_1-2h_0h_2)}{h_0 (h_0+h_1)} f_{01} + \frac{(h_0+h_1+h_2)^2(h_0+h_1-h_2)}{h_0 h_1 (h_1+h_2)} f_{11} + \frac{(h_0+h_1+h_2)^2(h_1+h_2-h_0)}{h_1 h_2 (h_0+h_1)} f_{21} + \frac{(h_0^2-h_1^2+3h_2^2-2h_0h_1+2h_1h_2)}{h_2 (h_1+h_2)} f_{31} \right] + \frac{(2k_1-k_0)}{k_1} \right\}$$

$$\left[ \begin{aligned} & \frac{(3h_0^2 - h_1^2 + h_2^2 + 2h_0h_1 - 2h_0h_2)}{h_0(h_0 + h_1)} f_{02} \\ & + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_0 + h_1 - h_2)}{h_0h_1(h_1 + h_2)} f_{12} \\ & + \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_1 + h_2 - h_0)}{h_1h_2(h_0 + h_1)} f_{22} \\ & + \frac{(h_0^2 - h_1^2 + 3h_2^2 - 2h_0h_1 + 2h_1h_2)}{h_2(h_1 + h_2)} f_{32} \end{aligned} \right]$$

일반식으로 나타내면,

$$V = \frac{(k_0 + k_1)(h_0 + h_1 + h_2)}{72} \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^3 b_i c_j f_{ij}$$

이고, 여기서  $c_j$ 는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{(3h_0^2 - h_1^2 + h_2^2 + 2h_0h_1 - 2h_0h_2)}{h_0(h_0 + h_1)}, \\ b_1 &= \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_0 + h_1 - h_2)}{h_0h_1(h_1 + h_2)}, \\ b_2 &= \frac{(h_0 + h_1 + h_2)^2 (h_1 + h_2 - h_0)}{h_1h_2(h_0 + h_1)}, \\ b_3 &= \frac{(h_0^2 - h_1^2 + 3h_2^2 - 2h_0h_1 + 2h_1h_2)}{h_2(h_1 + h_2)} \end{aligned}$$

Fig. 10에서  $2 \times 3$  단위의 격자망의 체적을 심프슨 1/3과 심프슨 3/8에 의하여 구하면

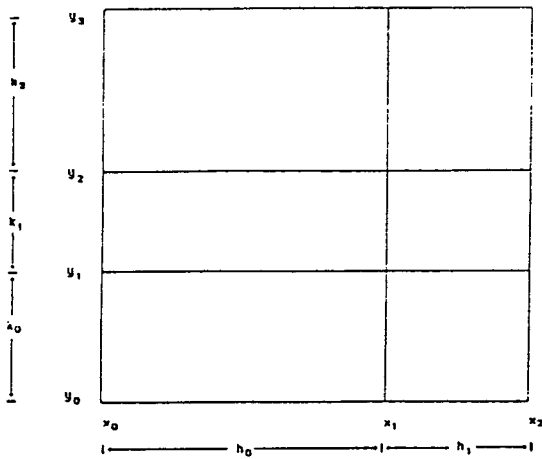


Fig. 10.  $2 \times 3$  Grid Unit, Unequal Intervals.

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_3} f(x, y) dy dx \quad \dots\dots(3-19)$$

$$V = \frac{(k_0 + k_1 + k_2)(h_0 + h_2)}{72} \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 a_i d_j f_{ij}$$

여기서,

$$d_0 = \frac{(3k_0^2 - k_1^2 + k_2^2 + 2k_0k_1 - 2k_0k_2)}{k_0(k_0 + k_1)},$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{(k_0 - k_1 + 2)^2 (k_0 - k_1 - k_2)}{k_0k_1(k_0 + k_2)}, \\ d_2 &= \frac{(k_0 - k_1 + k_2)^2 (k_0 - k_1 - k_2)}{k_1k_2(k_0 + k_1)}, \\ d_3 &= \frac{(k_2^2 - k_1^2 + 3k_2^2 + 2k_0k_2 - 2k_1k_2)}{k_2(k_1 + k_2)} \end{aligned}$$

이다.

#### IV. 點高法

두 連續點  $f_0$ 와  $f_1$ 을 지나는 1次多項式의 面積은,

$$A = \frac{h}{2} (f_0 + f_1)$$

이며,  $f_0$ 와  $f_1$ 은 切土高이며  $h$ 는 두 점 사이의 거리이다.

단위격자의 切土량을 계산하기 위해 積分하면 식 (4-1)과 같다.

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(X, Y) dy dx \quad \dots\dots(4-1)$$

格子間隔이  $m$ 과  $n$ 일때 全體體積  $V$ 는

$$V = \frac{h^2}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} f_{ij}$$

여기서  $a_{ij}$ 는 아래의 行列과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

#### V. 本論文에서의 提案方法

임의의 모든 지형은 그 단면에 있어서 곡선을 이루고 있다. 그러나 지금까지는 계산상의 편리와 적당한 계산방법의 부재로 인하여, 선형에 의한 등간격 프로그램이 아직까지 사용되고 있다. 또한 최근에는 비선형을 가미한 여러가지 해석 방법이 나오고 있으나, 아직까지는 심프슨 법칙에 의한 블록처리를 요구하고 있으며, 일정한 형식에 의한 데이터의 등간격 입력으로 인하여 실제 측량에서의 어려움이 많으며, 원하는 간격만큼의 자유로운 성·절토량의 계산, 실제 지형의 높이 추정 등의 많은 난점을 내포하고 있

으면서도, 또한 그 정확성에 대하여서는 아직은 신뢰할 수 없다.

그리하여 일정 지형 데이터의 선형 및 블록 처리에서 완전히 탈피하여, 방정식에 의한 지형의 직접 처리 및 적분에 입각한 체적의 계산은 위의 여러가지 문제점의 해결을 위해서는 필수적이라 할 것이다.

### 1. 방정식의 채택

#### 1) 비 등간격의 채택

등간격의 최대의 문제점은 실제로 측량한 등간격의 데이터로는 인간이 판단하더라도 그 지형의 모양을 유추하기 힘들고, 특히 최대점 최소점을 구해내기란 거의 불가능한 것이다.

가장 이상적인 방법은 각측점을 비등간격으로 하여 최소의 지점 측량으로 최대의 효과를 얻을 수 있어야 한다. 즉 최대점 최소점의 자유로운 측량, 특이간격의 집중적인 측량 등으로 '최소의 노력으로 최대의 효과'를 노리기 위하여, 이 프로그램은 지금까지 나온 그 어떤 토공량 계산 방법보다 효과적인 지점 선택의 자유를 허락한다.

#### 2) 3차 방정식의 채택

심프슨 법칙의 기본은 각각 2차, 3차의 방정식에 그 근거를 두고 있고 실제로 그 이상의 고차 방정식의 해석은 너무 기울기가 크므로, 일반적인 지형에 적용하기가 어려우므로 여기서는 논의로 한다.

그러면 2차, 3차방정식 중에서 효과적인 방식은 무엇일까가 남았는데 실제 면적의 적분 값을 취해보면, 2차 방정식과 3차 방정식은 거의 유사한 오차를 나타내고 있지만 각 구간별로 나누어서 실제 지형과 비교해 보면, 3차 방정식으로 해석한 3개의 구간중에서 유독 그 중간값만은 상당한 정도(최대 5%)를 가지고 있었다. 그 외의 구간은 2차, 3차 방정식 동일하게 상당한 오차를 포함하고 있었다.(최대 30%)

여기에 대하여 굳이 그 이유를 설명하자면, 어느 일정 구간에 대한 곡선의 형태는 그 주변의 곡선의 영향을 받게 되는 것이 일반적이지만 2차 방정식은 두개의 구간을 단독으로 해석함으

로써 각구간에 대한 한쪽의 곡선의 영향만을 받고 있으며, 3차 방정식에 의한 구간의 해석도 그 양편의 값은 마찬가지로므로 효과적인 지형을 추측할 수 없는데 기인하지 않을까 한다.

이러한 이유로 인하여 3차 방정식을 채택하였으며, 특히 해석한 3개의 구간중에서 그 중간 구간만을 채택하는 방식으로 최대의 정확성을 갖도록 이 프로그램은 설계되었다.

#### 3) 방정식의 해석 방식

3차 방정식의 해법으로는 가장 일반적이고, 그 프로그래밍이 간편한 가우스 소거법을 썼으며, 계산 변수로는 '2배수 실수'를 쓰므로 인하여 대단히 많은 반복 계산에서 올 수 있는 계산상의 누적 오차를 최대한 줄일 수 있도록 하였다.

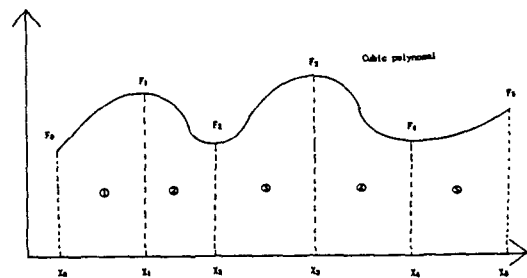


Fig. 11. Finite element method by cubic polynomial.

Fig 3에서 경계식은 3次式으로 하였고 면적 계산은 ①②③에서 ①과 ②를 ②③④에서 ③의 면적만을 그리고 ③④⑤에서 ④와 ⑤의 면적을 계산하였다. 그리고  $F_0, F_1, \dots, F_5$ 는 가우스 소거법으로 각 係數를 구하였다.

### 2. 프로그래밍 방법

#### 1) 데이터의 입력

각 지점의 비등간격 측량으로 인하여, 행의 총 갯수, 각 열의 지반고, 각 열의 지점에 대한 간격, 각 행사이의 간격 등의 데이터가 주어져야 하며, 이를 하나의 데이터 파일로 작성되어야 한다.

#### 2) 계산 순서

(1) 데이터 파일의 오픈 및 입력



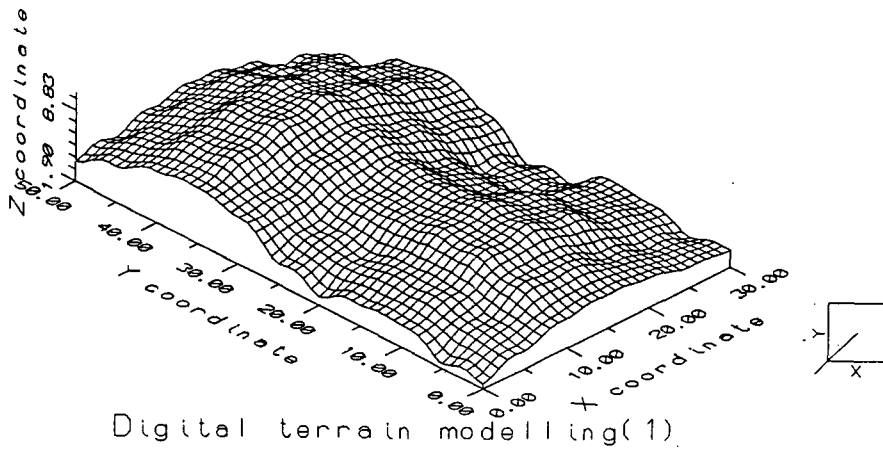
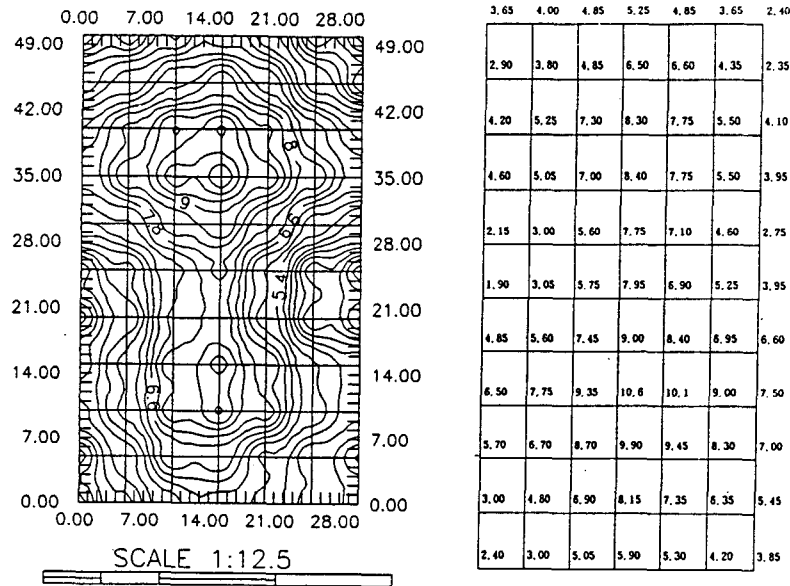
- (2) 각 열의 중복 해석
- (3) 해석된 방정식으로 각 열의 delta D 만큼씩의 높이를 구함.
- (4) (3)의 결과치를 가지고 첫번 행의 중복 해석
- (5) 위의 결과를 가지고 delta D 만큼씩의 지반고 해석—A line
- (6) 다음 행으로 지반고 해석—B line

- (7) 두 행을 가지고 각 등간격이 구해졌으므로, 선형에 의한 체적 해석
- (8) B line을 A line으로 옮기고, 다음 행으로 (5)번부터 반복 해석
- (9) 결과치 출력

**3. 이 프로그램의 장점**

- 1) 지형 측량의 비 등간격을 허용함으로써,

지형 1 (비선형 등간격)



실제 작업이 대단히 편리하다.

2) 원하는 간격 만큼의 지형을 추정함으로써, 실제 지형의 데이터를 얻을 수 있으며, 세세한 부분까지의 절토량·성토량이 구해진다.

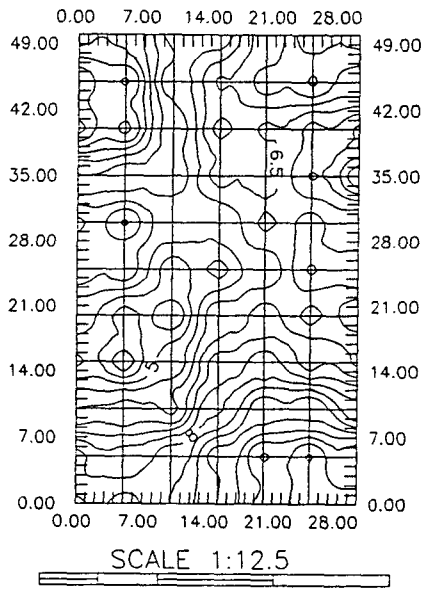
3) 계획고를 허용함으로써 기준고에 의한 데이터를 수정없이 사용할 수 있으며, 또한 이를 적당히 응용한다면 임의 지형의 성토·절토량을 토사의 반출입 없이 개립하였을때 그 높이를 추

정할 수 있게 되었다.

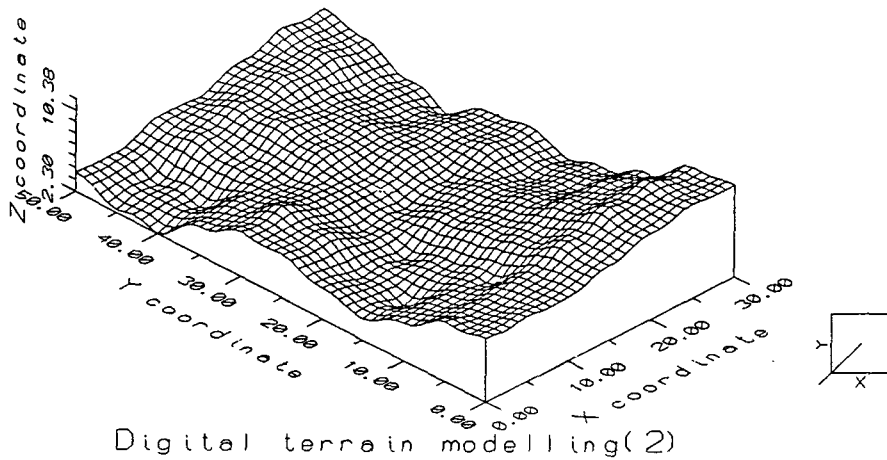
4) 지형이 완만하고 그 굴곡이 심하지 않을 경우, 약간만 혼란된 측량사라면 상당한 량의 데이터를 생략할 수 있으며, 여기에서 오는 시간과 경비 절감은 상당할 것이다.

5) 만일 어떤 지형이 대부분 완만한데, 어느 구간이 무시할 수 없는 오차를 가지고 굴곡이 심하다면, 이 부분만은 집중 측량하여 이를 어

지 형 2 (비선형 등간격)



	11.25	11.40	10.60	9.50	8.50	8.70	8.60
10.90	11.60	11.10	9.80	8.20	7.62	8.20	
8.00	9.40	9.30	7.65	5.80	6.10	6.00	
6.40	6.80	7.70	7.20	5.10	3.60	4.40	
5.50	5.80	6.70	6.40	4.00	4.30	5.30	
6.90	7.10	5.50	4.80	4.70	6.40	6.50	
6.30	6.70	6.60	5.60	5.80	7.10	6.60	
4.00	5.45	6.80	6.70	5.10	5.30	5.02	
5.40	5.85	6.40	7.20	5.20	2.80	2.30	
7.40	8.10	7.80	7.10	6.00	2.90	2.60	
8.30	8.50	7.20	5.60	5.70	4.10	4.20	



느 정도 믿을 수 있는 값으로 취할 수가 있게 되었다.

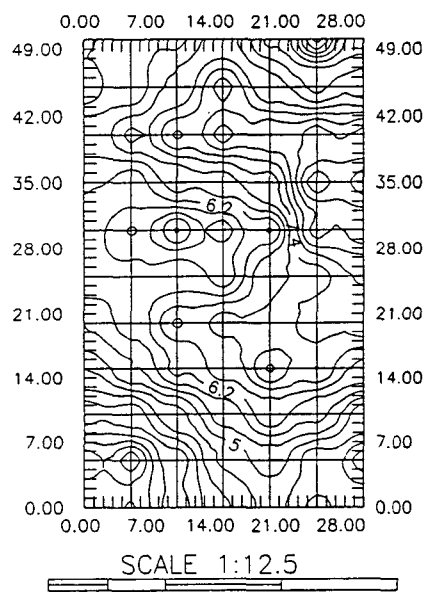
6) 약간만 혼련된 측량사라면 실제 지형에서 있을 수 있는, 암반 등의 돌출에 의한 수직 변형, 특이한 굴곡을 그리는 임의의 구간 등 거의 모든 불규칙 구간들을 실제와 유사하게 설계할 수 있는 효과적인 데이터의 입력을 할 수 있다.

## VI. 模型實驗 및 考察結論

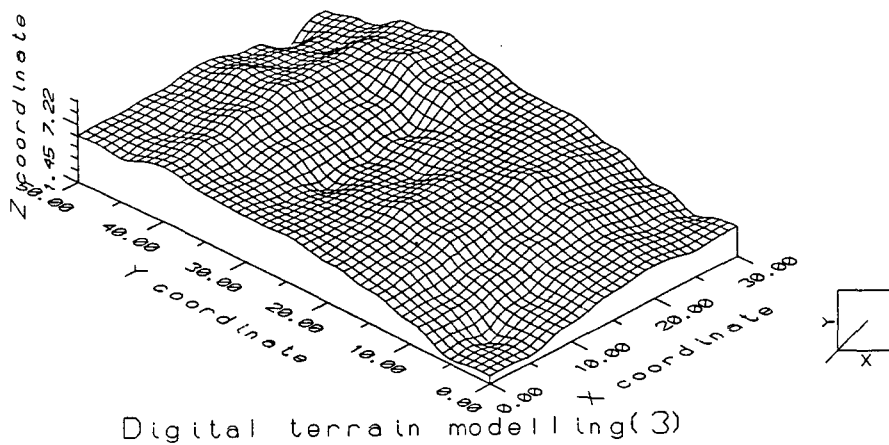
선형과 비선형 점고법과 본 논문에서 제시한 비선형 부등간격의 정확도를 구하기 위하여 30×50 cm의 수조판에 표준사 10,000 cm<sup>3</sup>을 넣고 지형 모델을 구성하였다.

지형 1은 블록한 지형을 택하였으며, 지형 2

지형 3 (비선형 등간격)



	2.25	2.15	3.20	4.15	4.70	4.05	4.45
1.90	1.45	3.15	4.66	5.25	4.30	3.50	
3.55	3.58	4.50	5.50	6.50	5.90	4.68	
4.60	5.40	6.35	6.79	7.90	7.42	6.50	
5.40	5.96	7.10	7.18	7.10	7.62	7.70	
6.10	5.92	6.15	5.52	6.9*	7.20	7.82	
6.00	5.35	4.52	5.15	5.72	8.80	8.90	
6.23	5.88	6.75	6.86	7.20	9.75	9.65	
6.95	7.55	8.30	8.85	8.62	8.85	8.75	
5.80	6.22	7.00	8.42	7.10	6.46	6.74	
6.15	6.22	6.48	7.15	6.10	4.00	5.95	



는 오목한 지형을, 지형 3은 굴곡이 별로 없는 지역을 택하여 모형 실험을 실시하였다.

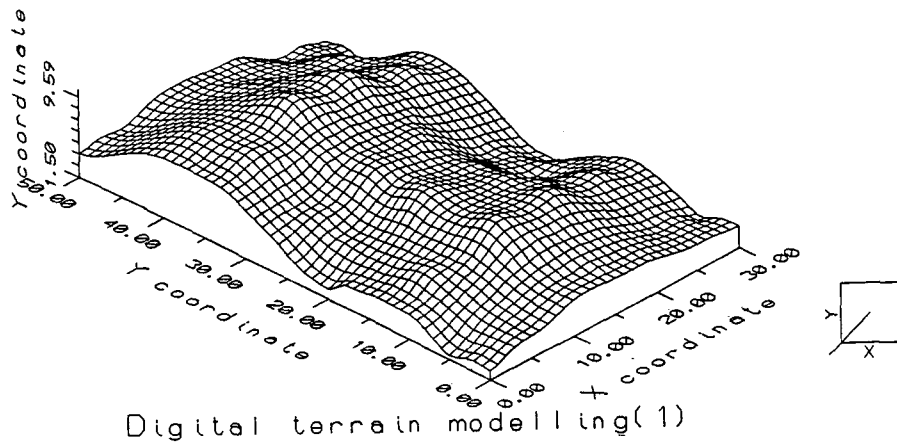
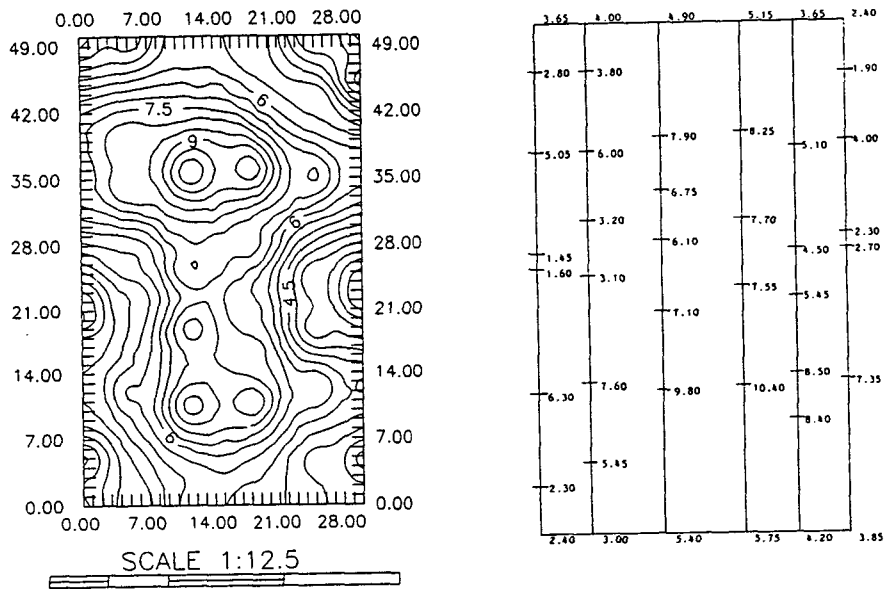
실험 방법은 선형 등간격과 비선형 등간격에서는 5cm 단위로 정구 격자망을 형성하여 X축으로 6개 구간과 Y축으로 10개 구간을 구분하여 7×11개의 표고를 측정하였다.

측정한 표고값으로 프로그램을 작성하여 계산하였다.

또한 비선형 부등간격의 토공량 계산을 위하여 지형 1, 지형 2, 지형 3을 그대로 보존하여 표고값을 관측하고 본 논문에서 제시한 다항식의 최대, 최소점을 이용한 이론을 토대로 하여 프로그램을 작성하여 토공량을 분석하여 고찰하였다. 지형의 표고 측정값과 2차원 등고선도 및 3차원 투시도는 다음과 같다.

지형 1에서는 선형 등간격 점고법이 비선형

지형 1 (비선형 부등간격)



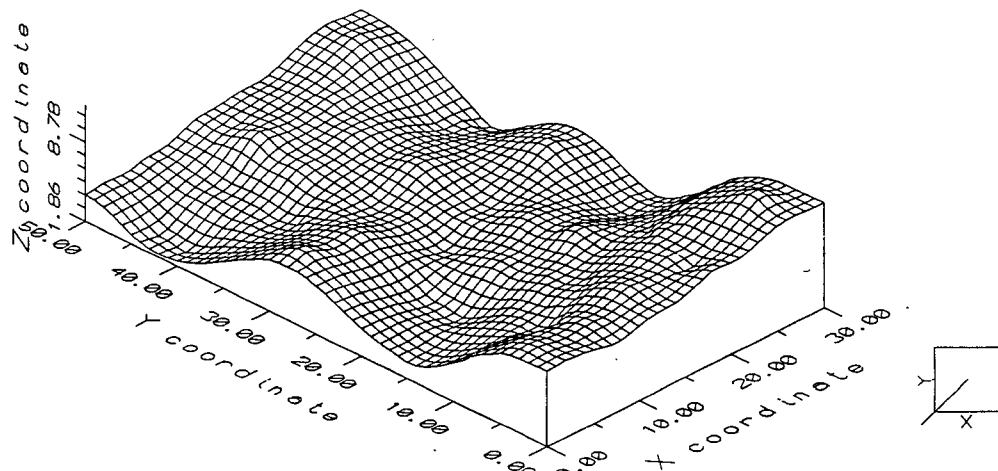
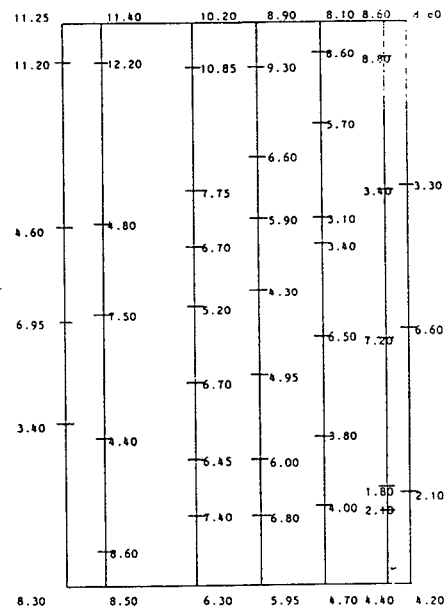
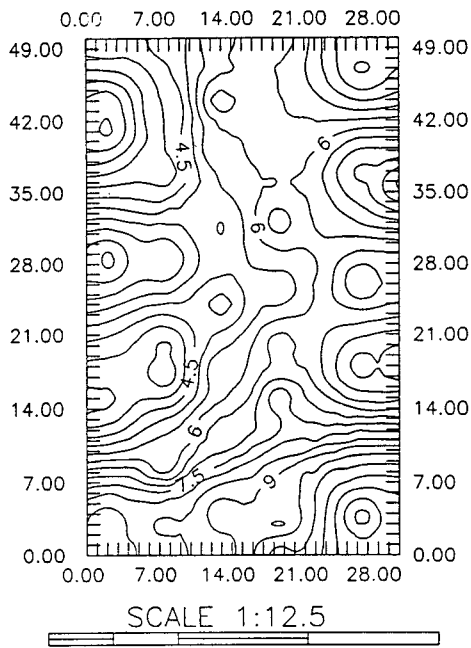
등간격 점고법에서는 9443 cm<sup>3</sup>, 9466 cm<sup>3</sup>으로 비선형 등간격점고법이 약간 더 정확했으나 비선형 부등간격에서는 9673 cm<sup>3</sup>으로 2% 정도가 더 정확하였다.

지형 2에서는 선형 등간격 점고법이 9433 cm<sup>3</sup> 비선형 등간격 점고법이 9450 cm<sup>3</sup>으로 지형 2에서도 역시 비선형 등간격 점고법이 정확하였고, 또한 본 논문에서 제시한 비선형 부등간격

의 토공량은 9696 cm<sup>3</sup>으로 지형 1보다도 정확도가 좋은 2.5% 정도의 정확도 향상을 알 수 있었다.

지형 3에서는 선형등간격 점고법이 9281 cm<sup>3</sup>, 비선형 등간격점고법이 9250 cm<sup>3</sup>으로 지형 1과 지형 2에서와는 다르게 오히려 선형점고법이 정확도가 더욱 좋았으나 비선형 부등간격 점고법이 9493 cm<sup>3</sup>으로 약 2.4% 정도 정확도가 향

지형 2(비선형 부등간격)



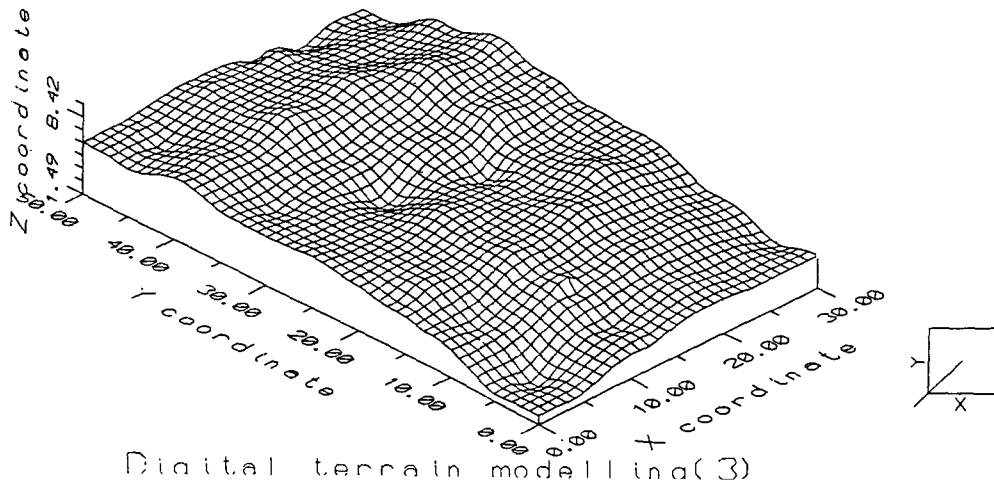
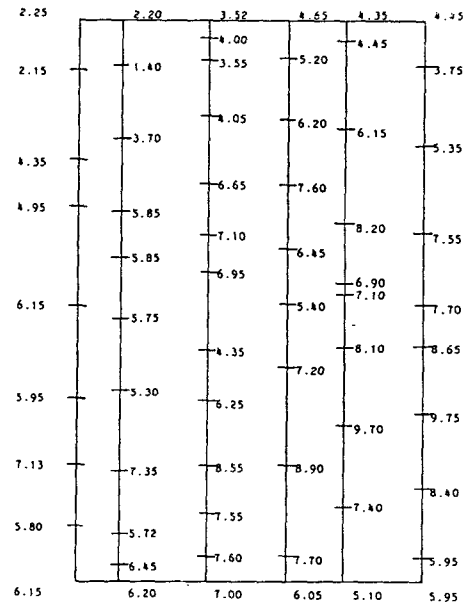
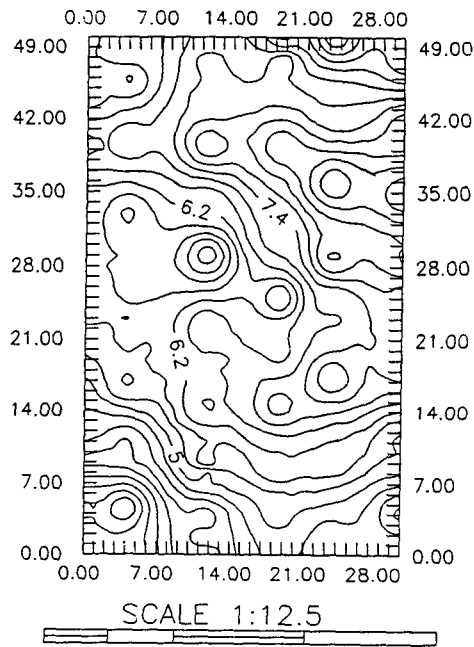
Digital terrain modelling(2)

Table. 1. 지형의 분류에 따른 토공량 계산값

단위 : cm<sup>3</sup>

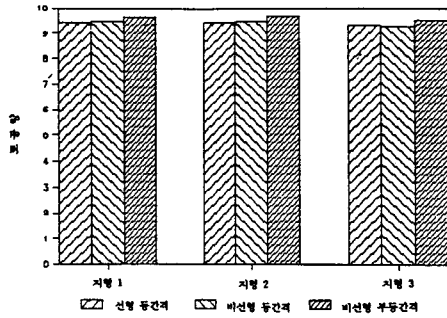
지형	지형 1		지형 2		지형 3	
	토공량	상대오차	토공량	상대오차	토공량	상대오차
선형 등간격	9443.375	5.6%	9433.563	5.6%	9281.813	7.2%
비선형 등간격	9466.555	5.3%	9450.863	5.5%	9250.512	7.5%
비선형 부등간격	9673.890	3.3%	9696.500	3.0%	9493.13	5.1%
최확 토공량	10,000					

지형 3 (비선형 부등간격)



Digital terrain modelina(3)

상되었다.



**CUTTING VOLUM**

TITLE : 지형 1

**\*\* BLOCK—1**

Dimension=4×4

+2.400	+3.650	+4.850	+5.250
+2.350	+4.350	+6.600	+6.500
+4.100	+5.500	+7.750	+8.300
+3.950	+5.500	+7.750	+8.400

**\*\* BLOCK—2**

Dimension=4×4

+5.250	+4.850	+4.000	+3.650
+6.500	+4.850	+3.800	+2.900
+8.300	+7.300	+5.250	+4.200
+8.400	+7.000	+5.050	+4.600

**\*\* BLOCK—3**

Dimension=4×4

+3.950	+5.500	+7.750	+8.400
+2.750	+4.600	+7.100	+7.750
+3.950	+5.250	+6.900	+7.950
+6.600	+6.950	+8.400	+9.000

**\*\* BLOCK—4**

Dimension=4×4

+8.400	+7.000	+5.050	+4.600
+7.750	+5.600	+3.000	+2.150
+7.950	+5.750	+3.050	+1.900
+9.000	+7.450	+5.600	+4.850

**\*\* BLOCK—5**

Dimension=4×4

+6.600	+6.950	+8.400	+9.000
+7.500	+9.000	+10.100	+10.600
+7.000	+8.300	+9.450	+9.900

**\*\* BLOCK—6**

Dimension=4×3

+9.000	+7.450	+5.600	+4.850
+10.600	+9.350	+7.750	+6.500
+9.900	+8.700	+6.700	+5.700

**\*\* BLOCK—7**

Dimension=4×3

+7.000	+8.300	+9.450	+9.900
+5.450	+6.350	+7.350	+8.150
+3.850	+4.420	+5.300	+5.900

**\*\* BLOCK—8**

Dimension=4×3

+9.900	+8.700	+6.700	+5.700
+8.150	+6.900	+4.800	+3.300
+5.900	+5.050	+3.000	+2.400

TOTAL INT. : 7×11

DISTANCE : 5 m

**BLOCK NUM. : 8**

BLOCK VOLUM 1 :	+1,289.531
BLOCK VOLUM 2 :	+1,199.180
BLOCK VOLUM 3 :	+1,390.781
BLOCK VOLUM 4 :	+1,117.969
BLOCK VOLUM 5 :	+1,354.375
BLOCK VOLUM 6 :	+1,213.750
BLOCK VOLUM 7 :	+1,024.563
BLOCK VOLUM 8 :	+876.406

TOTAL VOLUM=+9,466,555

LINEAR METHOD=+9,443,375

**CUTTING VOLUM**

TITLE : 지형 2

**\*\* BLOCK -- -1**

Dimension=4×4

+8.300	+8.400	+8.200	+9.200
+7.900	+7.320	+7.900	+9.500
+5.700	+5.800	+5.500	+7.650
+4.100	+3.300	+4.800	+6.900

**\*\* BLOCK—2**

Dimension=4×4

+9.200	+10.300	+11.100	+10.950
+9.500	+10.800	+10.300	+10.600

+7.650	+9.000	+9.100	+7.700
+6.900	+7.400	+6.500	+6.400

**\*\* BLOCK—3**

Dimension=4×4

+4.100	+3.300	+4.800	+6.900
+5.000	+4.000	+3.700	+6.100
+6.200	+6.100	+4.400	+4.500
+6.200	+6.800	+5.500	+5.300

**\*\* BLOCK—4**

Dimension=4×4

+6.900	+7.400	+6.500	+6.400
+6.100	+6.300	+5.500	+5.200
+4.500	+5.200	+6.800	+6.600
+5.300	+6.300	+6.400	+6.000

**\*\* BLOCK—5**

Dimension=4×3

+6.200	+6.800	+5.500	+5.300
+4.820	+5.000	+4.800	+6.400
+2.000	+2.500	+4.900	+6.900

**\*\* BLOCK—6**

Dimension=4×3

+5.300	+6.300	+6.400	+6.000
+6.400	+6.500	+5.150	+3.700
+6.900	+6.100	+5.550	+5.100

**\*\* BLOCK—7**

Dimension=4×3

+2.000	+2.500	+4.900	+6.900
+2.300	+2.600	+5.700	+6.800
+3.800	+3.800	+5.400	+5.300

**\*\* BLOCK—8**

Dimension=4×3

+6.900	+6.100	+5.550	+5.100
+6.800	+7.500	+7.800	+7.100
+5.300	+6.900	+8.200	+8.000

TOTAL INT. : 7×11

DISTANCE : 5 m

**BLOCK NUM. : 8**

BLOCK VOLUM 1 : +1,524.129  
 BLOCK VOLUM 2 : +2,135.742  
 BLOCK VOLUM 3 : +1,100.039  
 BLOCK VOLUM 4 : +1,356.328  
 BLOCK VOLUM 5 : +756.188  
 BLOCK VOLUM 6 : +864.219

BLOCK VOLUM 7 : +636.875

BLOCK VOLUM 8 : +1,077.344

TOTAL VOLUM=+9,450.863

LINEAR METHOD=+9,433.563

**CUTTING VOLUM**

TITLE : 지형 3

**\*\* BLOCK—1**

Dimension=4×4

+2.250	+2.150	+3.200	+4.150
+1.900	+1.450	+3.150	+4.060
+3.550	+3.580	+4.500	+5.500
+4.600	+5.400	+6.350	+6.790

**\*\* BLOCK—2**

Dimension=4×4

+4.150	+4.700	+4.050	+4.450
+4.060	+5.250	+3.300	+3.500
+5.500	+6.500	+5.900	+4.680
+6.790	+7.900	+7.420	+6.500

**\*\* BLOCK—3**

Dimension=4×4

+4.600	+5.400	+6.350	+6.790
+5.400	+5.960	+7.100	+7.180
+6.100	+5.920	+6.150	+5.520
+6.000	+5.350	+4.520	+5.150

**\*\* BLOCK—4**

Dimension=4×4

+6.790	+7.900	+7.420	+6.500
+7.180	+7.100	+7.620	+7.700
+5.520	+6.950	+7.200	+7.820
+5.150	+5.720	+8.800	+8.900

**\*\* BLOCK—5**

Dimension=4×3

+6.000	+5.350	+4.520	+5.150
+6.230	+5.880	+6.750	+6.860
+6.950	+7.550	+8.300	+8.850

**\*\* BLOCK—6**

Dimension=4×3

+5.150	+5.720	+8.800	+8.900
+6.860	+7.200	+9.750	+9.650
+8.850	+8.620	+8.850	+8.750



\*\* BLOCK—7

Dimension=4×3

+6.950	+7.550	+8.300	+8.850
+5.800	+6.220	+7.000	+8.420
+6.100	+6.220	+6.480	+7.150

\*\* BLOCK—8

Dimension=4×3

+8.850	+8.620	+8.850	+8.750
+8.420	+7.100	+6.460	+6.740
+7.150	+6.100	+4.000	+5.950

TOTAL INT. : 7×11

DISTANCE : 5 m

BLOCK NUM. : 8

BLOCK VOLUM 1..	+802.406
BLOCK VOLUM 2 :	+1,180.793
BLOCK VOLUM 3 :	+1,357.629
BLOCK VOLUM 4 :	+1,621.934
BLOCK VOLUM 5 :	+962.594
BLOCK VOLUM 6 :	+1,240.813
BLOCK VOLUM 7 :	+1,031,938
BLOCK VOLUM 8 :	+1,052,406

TOTAL VOLUM=+9,250.512

LINEAR METHOD=+9,281.813

이상의 결과에서 선형 점고법과 비선형 점고법에서의 토공량 계산에서 비슷한 정도를 보이고 있는데 그 이유는 모래의 성질상 지형을 실제 지형과 같이 곡률을 갖지 못하는데 있다고 사료된다.

또한 본 논문에서 제시한 비선형 부등 간격의 토공량 계산에서의 계산값을 분석한 결과 지형 1 과 지형 2 에서와 같이 굴곡이 지형 3 보다도 더 큰 지형 1, 2 에서의 정확도가 지형 3 보다 약 2% 정도가 좋았다. 이는 곡률이 거의 없는 완만한 지역에서는 최대, 최소점의 위치 결정이 어렵기 때문인 것으로 판단되고, 지형 1, 2, 3 에서 3 개의 지형이 전부 비선형 부등간격 방법이 실제 지형을 이용한 토공량 계산에서 가장 합리적인 방법으로 판단한다.

VII. 結 論

실제 지형 측량에서 등간격으로 측량을 한다는 것은 매우 어려우며, 또한 지형을 선형으로 가정하는 것은 매우 불합리하기 때문에 본 논문에서는 비선형 부등간격 점고법을 이용한 수치 지형 모형 실험을 한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 지형의 토공량 계산은 본 논문에서 제시한 최대, 최소점을 이용한 비선형 부등간격의 정도가 제일 좋았다.
2. 굴곡이 거의 없는 완만한 지형보다는 굴곡이 있는 지형의 토공량 계산값이 정확하였다.
3. 굴곡이 별로 없는 지형에서는 선형 점고법과 비선형 점고법의 정확도가 비슷하였다. 때문에 경사가 별로 없는 지역은 선형 점고법을 이용하여도 무방하다고 판단된다.

参考文献

1. I. M., El Hassan, *Irregular boundary area computation by simpson's 3/8 rule*, J. Surveying Engrg., ASCE, 113(3), 127~132, 1987.
2. S. M., Easa, *Area of irregular region with unequal intervals*, J. Surveying Engrg., ASCE, 114(2), 50~58, 1988.
3. D. W., Chambers, *Estimating pit excavation volume using unequal intervals*, J. Surveying Engrg., ASCE, 115(4), 390~401, 1989.
4. 千葉喜味夫, (3) 브라누메타의面積測定原理, 日本測量協會, 1983年12月, pp. 22~28.
5. 孫炳鎭, 「數值解法의 컴퓨터應用」, 喜重堂, 1984, pp. 459~464.
6. 崔鍾碩 外 3名, 「統計學」, 正益社, 1983, pp. 9~71.
7. 石川甲子男, 一色朗, 市反滿, 測量うたぬの最小二乘法, 實教出版, 昭和 57年, pp. 1~79.
8. 金乃憲, 微分積分學, 螢雪出版社, 1982, pp. 189~299.
9. 千葉忠二, 測量のための實用教學, 山海堂, 1966, pp. 65~80.
10. 谷本勉之助, 測量計算法, 森北出版社, 1960, pp. 29~44.

11. F. A., Ahmed, *Area computation using salient boundary points*, J. Surveying Engrg., ASCE, 109(1), 54~63, 1983.
12. A. L., Allan, J. R., Hollway, and J. H. B., Maynes, *Practical Field Surveying and Computations*, William Hinemann Ltd., London, U. K., 597~601, 1975.
13. R. C., Brinker, and P. R., Wolf, *Elementary Surveying*, Harper and row, New York, N. Y., 245~254, 1984.
14. C. F., Gerald, and P. O., Wheatly, *Applied Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Menlo Park, Calif., 248~256, 1984.
15. L. D., Hoffman, *Applied Calculus*, McGraw Hill, New York, N. Y., 265~268, 1983.
16. M. J., Maron, *Numerical Analysis: A Practical Approach*, Macmillan, New York, N. Y., 301~302, 1982.
17. M. O., Schmidt, AND K. W., Wong, *Fundamentals of Surveying*, PWS, Boston, Mass, 377~385, 1985.
18. A., Siegle, *Basic Plane Surveying*, Van Nostrand Reinhold, New York, N. Y., 130~131, 1979.
19. B., Kavanagh, and S., Glenn Bird, *Surveying: Principles and applications*, Reston Publishing Company, Inc., Reston, Va, 1984.
20. J., Rice, *Numerical methods, software, and analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y., 1983.
21. M., Schmidt, and K. W., Wong, *Fundamentals of surveying*, PWS, Boston, Mass. 1985.
22. R., Burden, J., Faires, and A., Reynolds, *Numerical analysis*, Prindle, Weber, and Schmidt, Boston, Mass, 1981.
23. R., Davis, et al., *Surveying: Theory and practice*, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y, 1981.