

混合境界積分 要素法을 사용한 直交入射波浪의 反射率계산 모델 A Hybrid Boundary Integral Equation Model Applied for the Calculation of Normal Incident Waves

徐承男* · 金祥翼*

Seung Nam Seo* and Sang Ik Kim*

要 旨 : 地形에 의한 波浪의 反射率을 計算하기 위하여 混合 境界積分 要素法(HBIEM)을 사용하였다. 線形要素를 사용한 數值모델의 結果를 既存의 結果와 比較하여 正確度를 檢證한 후 入射 波浪의 조건에 따른 反射率과 透過率을 計算하였다. 階段式 地形에 대한 본 모델의 結果는 기존의 結果에 잘 부합되었으며, 階段式 지형의 反射率은 水深이 깊어짐에 따라 單調 減少하나 일정한 수심위에 놓인 sinusoidal 둔덕의 反射率은 水深이 깊어짐에 따라 增加하여 최고점에 이르면 후 다시 減少하는 形態를 보인다. 한편 두 개의 둔덕(hump)에 의한 反射率은 相互作用에 의해 그 형태가 顯著하게 바뀌며 波浪條件에 따른 反射率이 圖示되었다.

Abstract □ In order to calculate reflection coefficients of surface waves due to underwater obstacles, the hybrid boundary integral equation method is used. Numerical results based on the linear element are verified to the exact solutions for a flat bottom. Reflection coefficients and transmission coefficients for a step are compared to Yeung's results and the results by EFEM (Kirby *et al.*, 1987), in which reflection coefficients decrease to zero as the periods of incident waves decrease. Reflection coefficients for a sinusoidal hump located on a constant depth increase due to the interaction between humps.

1. 緒 論

海底가 緩慢하게 변하는 海域위를 지나는 파랑의 反射는 無視할 수 있으며 이에 대한 波浪計算 方法으로는 屈折 모델(徐 등, 1989)과 拋物型 近似式 모델(徐, 1990b)을 들 수 있다. 그러나 海底의 變化가 심해 상당량의 波浪에너지가 反射되는 境遇에는 波浪 運動을 支配하는 原 方程式인 Laplace式을 사용하여야 한다. 본 研究에서는 水中 障礙物에 의한 파랑 反射率을 計算하는 方法으로 混合 境界積分 要素法을 사용하였다.

計算地域 밖의 수심은 一定하나 내부에 위치한 障礙物에 대한 波浪 變形 計算方法을 考察하기로 한다(그림 1). 水深이 일정한 地域은 속도포텐셜을 eigenfunction의 級數로 表示할 수 있으며 각 項의 未知數인 未知 振幅과 水面 및 海底의 내부 格子點의 未知數인

속도포텐셜을 Laplace式으로부터 誘導된 境界 積分式으로부터 구하게 되며 이를 HBIEM이라고 부른다.

이 方法은 다음과 같은 長點을 가지고 있다. 内部 障礙物이 入射波浪과 作用하면 障礙物에 의한 파랑의 evanescent mode가 생기며 그 크기는 障礙物로부터의 거리가 멀어질수록 指數的으로 減少한다. 側面 境界條件에 propagation mode만을 사용하는 既存의 BIEM은 障礙物로부터 水深이 4배 이상되는 거리에 境界를 위치시켜야만 境界條件을 正確하게 세울 수 있다. 그러나 HBIEM은 evanescent mode도 考慮하기 때문에 이 減殺帶의 幅을 줄일 수 있으며 따라서 計算에 所要되는 格子點의 數를 줄일 수 있는 利點이 있다. 두번째 長點으로는 境界積分法에 의해 만들어진 stiffness 行列式의 값이 특이한 週期的 波浪에 대해 零으로 되는 irregular frequency를 피하게 되므로 모델의 適用 範圍가 넓어지게 된다(Mei, 1983).

*韓國海洋研究所 海洋環境工學研究室(Ocean Environmental Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

HBIEM을 이용한 波浪變形 計算 모델은 Yeung (1976)이 浮遊物體 및 水中 障礙物에 대한 直交入射 波浪의 反射率을 計算할 때 처음 試圖되었으며 Liu와 Abbaspour(1982)는 浮遊物體에 대한 斜角入射 波浪의 反射率을 계산하는 方法을 提示하였다.

本 研究는 水中障礙物에 의한 直交入射波浪의 反射率을 計算하는 模型을 樹立하여 入射波浪의 特性에 따른 模型의 結果 및 特性을 分析하였다. 일정 水深 위를 지나는 파랑은 反射波가 전혀 없으므로 이 경우에 模型을 適用하여 格子點의 갯수에 대한 그 特性을 分析하였다. 또한 階段型 地形에 適用할 수 있는 보다 精確한 Kirby 등(1987)의 EFEM을 사용하여 얻은 結果를 Yeung의 結果와 本 模型의 結果와 比較하였다. 마지막으로 一定 水深 위에 놓인 sinusoidal 둔덕에 의한 波浪의 變形을 다루었으며 둔덕 하나와 두개에 대한 反射率을 入射波의 週期에 따라 比較하였고 그 特性을 分析하였다.

2. 支配 方程式의 誘導

一定 水深 h_1 과 h_2 사이의 計算 區內의 水深이 不規則한 그림 1과 같은 地形에서 왼쪽으로부터 入射하는 波浪의 지형에 의한 變形을 생각하자. 非回轉性, 非壓縮性 流體의 2次元 運動은 Laplace式으로 表示된다.

$$\nabla^2 \Phi(x, z, t) = 0 \tag{1}$$

속도포텐셜 Φ 에서 시간 성분을 分離하기 위하여 角速度 $\omega = 2\pi/T$ (T =週期)를 導入하면 다음과 같은 式을 얻는다.

$$\Phi(x, z, t) = \varphi(x, z)e^{-i\omega t} \tag{2}$$

여기서 空間 座標系로만 表示되는 φ 도 Laplace式을 滿足함을 알 수 있다.

空間 座標系의 Laplace式을 풀기 위해서는 水面, 底面 그리고 側面 境界條件이 세워져야 한다. 微小 振幅波에 대한 水面 境界條件은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \varphi, \quad z=0. \tag{3}$$

해저면이 不透性이라 假定하면 底面條件은

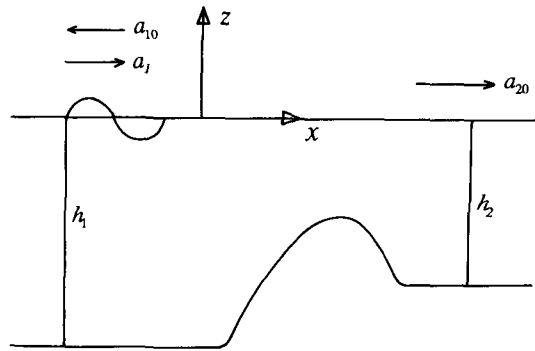


Fig. 1. Definition sketch.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \text{해저면에서} \tag{4}$$

여기서 n 은 外向法線 方向의 座標이다. 그리고 側面 境界條件은 3절에서 言及하기로 한다.

境界上의 一點 $\vec{x}_i = (x_i, z_i)$ 에 位置한 free space Green 函數 G 를 이용하여 境界積分式을 誘導하면 式 (5)가 된다(徐, 1990a).

$$\alpha_i \varphi(\vec{x}_i) = \int_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} G \right) ds \tag{5}$$

여기서 Γ 는 境界, ds 는 境界의 微小距離 그리고 α_i 는 內角이다. 式 (5)의 Green 函數는 境界上의 點 \vec{x}_i 로부터 任意點 \vec{x} 까지 거리 r 의 函數로 되며 式 (6)으로 定義한다.

$$G = \ln r = \ln \sqrt{(x-x_i)^2 + (z-z_i)^2} \tag{6}$$

3. 混合 境界 積分 要素法 (HBIEM)

境界積分式 (5)는 境界上의 任意點에서의 境界값으로만 표시되었으며, 境界條件을 이용하면 境界에서 는 오직 하나의 未知數만이 存在한다. 따라서 境界線上에 N 개의 格子點을 設定하면(그림 2) N 개의 未知數가 생긴다. 그리고 모든 格子點에 대해 式 (5)를 풀면 N 개의 聯立方程式이 만들어지며 이를 풀면 解를 얻게 된다. 本 模型에서는 格子點間의 未知數가 線形的으로 比例하는 것으로 假定하는 線形 要素法을 사용하였다.

水深이 一定하면 φ 는 eigenfunction의 級數로 표

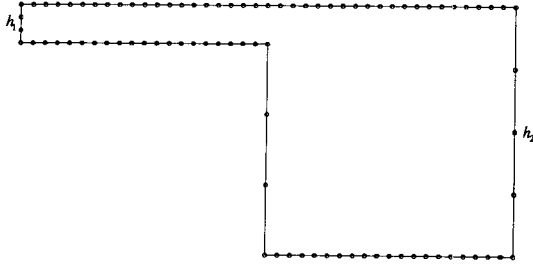


Fig. 2. Grid system for a step ($h_2/h_1=6.5$).

시할 수 있다. 왼쪽 境界 $x=x_1$ 에서 φ 와 $\partial\varphi/\partial n$ 을 표시하면 식 (7)과 (8)을 얻게된다.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, z) = & a_0 e^{ik_0 x} \frac{\cosh k_{10}(z+h_1)}{\cosh k_{10}h_1} \\ & + a_{10} e^{-ik_0 x} \frac{\cosh k_{10}(z+h_1)}{\cosh k_{10}h_1} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} e^{-k_{1n}(x-x_1)} \frac{\cosh k_{1n}(z+h_1)}{\cosh k_{1n}h_1}, \end{aligned} \quad x \leq x_1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x_1, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1, z) \quad (8)$$

식 (7)의 오른쪽 첫 項은 入射波浪을 나타내며 a_{10} 는 反射波의 propagation mode의 未知振幅, a_{1n} 은 evanescent mode의 未知振幅이다. 식 (7)의 波數는 波分散式으로부터 계산된다. 즉, propagation mode의 波數는 하나만 존재하며 식 (9)에서, 반면에 evanescent mode의 波數는 無限個로 식 (10)에서 계산된다.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (9)$$

$$\omega^2 = -gk_n \tanh k_n h, \quad n=1, 2, \dots \quad (10)$$

한편 오른쪽 境界 $x=x_2$ 에서의 φ 와 $\partial\varphi/\partial n$ 은 식 (11)과 (12)로 각기 표시된다.

$$\begin{aligned} \varphi(x_2, z) = & a_{20} e^{ik_0 x} \frac{\cosh k_{20}(z+h_2)}{\cosh k_{20}h_2} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e^{k_{2n}(x-x_2)} \frac{\cos k_{2n}(z+h_2)}{\cos k_{2n}h_2}, \end{aligned}$$

$$x \geq x_2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x_2, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_2, z) \quad (12)$$

無限級數로 표시된 식 (7), (8), (11), (12)을 數直計算에 이용하기 위해서는 이를 절단하여 有限級數로 만들어야 하며 식 (7), (8)은 $x=x_1$ 의 境界에 표시된 要素 個數인 NU로 식 (11), (12)은 $x=x_2$ 의 境界의 個數 ND로 정해 이를 식 (5)에 사용하였다.

側面境界를 除外한 格子點에서 식 (5)의 積分은 Liggett(1977)의 方法을 사용하였다. 이 때 注意해야 할 점은 各 境界線의 交點인 格子點은 側面境界에 包含되는 格子이므로 이를 考慮하여야 한다. 또한 側面 境界上에 대한 積分에는 細心한 注意가 要求된다. 예를 들면 점 \vec{x}_i 가 $x=x_1$ 의 境界上에 있지 않은 경우 다음과 같은 積分을 구해 該當 未知振幅에 대한 聯立方程式을 만들어야 한다.

$$\int_{-h_1}^0 \cosh k_{10}(z+h_1) \ln[(x_1-x_i)^2+(z-z_i)^2] dz \quad (13)$$

$$\int_{-h_1}^0 \cosh k_{10}(z+h_1) \frac{x_1-x_i}{(x_1-x_i)^2+(z-z_i)^2} dz \quad (14)$$

$$\int_{h_1}^0 \cos k_{1n}(z+h_1) \ln[(x_1-x_i)^2+(z-z_i)^2] dz \quad (15)$$

$$\int_{h_1}^0 \cos k_{1n}(z+h_1) \frac{x_1-x_i}{(x_1-x_i)^2+(z-z_i)^2} dz \quad (16)$$

식 (13)-(16)을 구하기 위하여 6점 Gauss 數直積分 方法(Abramowitz and Stegun, 1972)을 이용하였다. 한편 점 \vec{x}_i 가 $x=x_1$ 의 境界上에 位置하면 $\partial\varphi/\partial n=0$ 이 되므로 積分式은 다음과 같이 된다.

$$\int_{h_1}^0 \cosh k_{10}(z+h_1) \ln |z-z_1| dz \quad (17)$$

$$\int_{h_1}^0 \cos k_{1n}(z+h_1) \ln |z-z_1| dz \quad (18)$$

식 (17)과 (18)은 특이 積分이므로, 이를 考慮한 ln 형태의 Gauss 數直積分(Abramowitz and Stegun, 1972)을 사용하였다. 그리고 $x=x_2$ 의 境界에 대한 積分을 구하는 方法도 이와 비슷하게 구한다.

聯立方程式을 풀어 反射波와 進行波의 振幅을 구하면 反射率(K_R)과 通過率(K_T)은 식 (19)로부터 계산된다.

$$K_R = \left| \frac{a_{10}}{a_i} \right|, K_T = \left| \frac{a_{20}}{a_i} \right| \quad (19)$$

그리고 이들은 에너지 保存法則으로부터 다음과 같은 關係를 滿足하여야 하며 이를 수치모델의 精密度를 測定하는 방법으로 이용할 수 있다.

$$1 = K_R^2 + K_T^2 \frac{k_{10}}{k_{20}} \frac{\left(1 + \frac{2k_{20}h_2}{\sinh 2k_{20}h_2}\right)}{\left(1 + \frac{2k_{10}h_1}{\sinh 2k_{10}h_1}\right)} \quad (20)$$

4. 數值모델 結果 및 討議

本節에서는 一定 水深의 地形에 適用하여 모델을 檢證하였고 階段式 地形, sinusoidal 둔덕이 하나 있는 地形, 둔덕이 두 개인 地形의 反射率과 透過率을 계산하였다.

우선 水深이 一定한 境遇에는 波浪의 變形이 생기지 않으므로 反射率은 零이 된다. 이는 理論的인 값이나 數值모델의 技法에 따른 誤差가 발생되므로 이를 檢討하기 위해 각기 다른 特性의 波浪인 深海波浪, 中間水深의 波浪 그리고 淺海波浪에 대한 結果를 표 1에 提示하였다. 여기서 E의 값은 에너지 보존식 (20)의 오른쪽 項에 대한 計算結果이며 그 값이 1.0이 되면 에너지보존법칙을 滿足하게 된다. 그리고 NS는 수면의 요소 개수이며 ND는 $x=x_2$ 境界數의 개수, NB는 底面의 개수, NU는 $x=x_2$ 境界線의 개수이다. 예상한 바와 같이 格子의 개수가 增加하면 精密度가 높아지며, 모든 경우에 있어 에너지도 잘 保存되는 것으로 判斷된다. 같은 精密度를 얻기 위해 深海波浪의 境遇에 보다 많은 格子가 필요한 것으로 나타났다.

두번째 예로는 그림 2의 階段式 地形($h_2/h_1=6.5$)에 대한 것이며 표 2에 Yeung의 結果와 본 結果를 比較하였다. 淺海波浪의 境遇에는 두 結果가 비슷하나 深海波浪이 될수록 差異가 커짐을 보여주고 있다. 이 두 結果에 대한 精密度를 評價하기 위하여 境界要素法과는 相異하나 보다 精密한 方法이라고 評價되는

Table 1. Reflection and Transmission coefficients for a flat bottom

kh	E	K_R	K_T	N	NS	ND	NB	NU
3.231	1.00000	0.03231	0.99948	28	10	4	10	4
	0.99998	0.01570	1.99986	48	20	4	20	4
	1.00007	0.06773	0.99774	68	30	4	30	4
	0.99994	0.01473	0.99986	88	40	4	40	4
1.037	1.00001	0.02548	1.99968	28	10	4	10	4
	1.00001	0.01189	0.99993	48	20	4	20	4
	1.00000	0.00554	0.99998	68	30	4	30	4
	1.00000	0.00319	1.00000	88	40	4	40	4
0.226	1.00003	0.01651	0.99988	28	10	4	10	4
	0.99995	0.00393	0.99997	48	20	4	20	4
	1.00000	0.00166	1.00000	68	30	4	30	4
	0.99992	0.00076	0.99996	88	40	4	40	4

Kirby 등(1987)의 EFEM(eigenfunction expansion method)을 同一한 地形에 適用하였다. EFEM은 階段式 地形과 같이 수심이 일정한 區域으로 된 지형에서 適用 可能하며, 각 구역에 대한 속도포텐셜을 식 (7)과 (11)에서와 같이 eigenfunction의 級數로 표시하고 境界線에서 流速과 壓力이 같다는 條件을 사용하여 未知數인 eigenfunction의 振幅을 구하는 방법이다. 여기서 구한 EFEM에는 10개의 evanescent mode가 사용되었다.

本 모델의 格子網(그림 2)에서 볼 수 있듯이, 쉽게 減殺되는 高次의 evanecent mode를 減殺시키기 위해 障礙物의 주위에 減殺帶를 두었으며 따라서 mode의 개수를 최대 4개로 局限하였다. 한편 Yeung의 論文에는 格子의 개수가 明示되어 있지 않아 嚴密한 意味의 比較는 할 수 없으나 본 모델이 사용한 格子數 중 제일 적은 55개 格子의 結果로부터 判斷할 때도 본 모델의 結果가 EFEM의 結果에 더 잘 附合되는 것으로 나타났다.

표 2의 結果에 따르면 階段式 地形과 같이 地形이 急하게 변하는 곳에서는 淺海波浪에 의한 反射率 계산에는 더 많은 格子를 사용하는 것이 필요한 것으로 判斷된다. 比較的 좋은 結果를 보인 103 格子를 사용하여 $(kh)_1$ 에 대한 反射率과 透過率을 그림 3에 圖示하였다. 수심이 깊어질수록 反射率은 單調減少하고 있으며, 深海波浪은 地形에 影響을 받지 않으므로 入射波가 深海波이면 波浪은 階段을 意識하지 못하는 것으로 풀이된다.

Table 2. Reflection and Transmission coefficients for a step

$\omega^2 h_1$	Present				EFEM			YEUNG		
	g	N	E	K_R	K_T	E	K_R	K_T	E	K_R
0.03395	55	1.00623	0.41617	0.59929	1.00000	0.41735	0.59668	1.00025	0.4269	0.5799
	103	1.00461	0.41842	0.59803						
	155	1.00268	0.41807	0.59744						
0.04365	55	1.00772	0.40978	0.61001	1.00000	0.41169	0.60663	1.00016	0.4242	0.5846
	103	1.00473	0.41255	0.60809						
	155	1.00266	0.41231	0.60741						
0.05813	55	1.00967	0.40005	0.62631	1.00000	0.40310	0.62182	1.00011	0.4201	0.5918
	103	1.00486	0.40362	0.62347						
	155	1.00263	0.40359	0.62265						
0.06644	55	1.01065	0.39439	0.63580	1.00000	0.39810	0.63073	1.00002	0.4134	0.6035
	103	1.00491	0.39843	0.63247						
	155	1.00261	0.39852	0.63158						
0.12115	55	1.01501	0.35667	0.70030	1.00000	0.36403	0.69225	0.99980	0.4016	0.6244
	103	1.00501	0.36333	0.69445						
	155	1.00241	0.36413	0.69318						
0.20031	55	1.01721	0.30413	0.79552	1.00000	0.31283	0.78575	0.99938	0.3774	0.6679
	103	1.00481	0.31156	0.78818						
	155	1.00213	0.31288	0.78667						
0.39260	55	1.01930	0.19280	0.98111	1.00000	0.20232	0.96952	0.99851	0.3158	0.7803
	103	1.00523	0.19776	0.97308						
	155	1.00199	0.20091	0.97081						
1.09093	55	1.01124	0.06065	1.09853	1.00000	0.05388	1.09282	0.99760	0.1458	1.0395
	103	0.99695	0.05217	1.09124						
	155	0.99461	0.05389	1.08986						

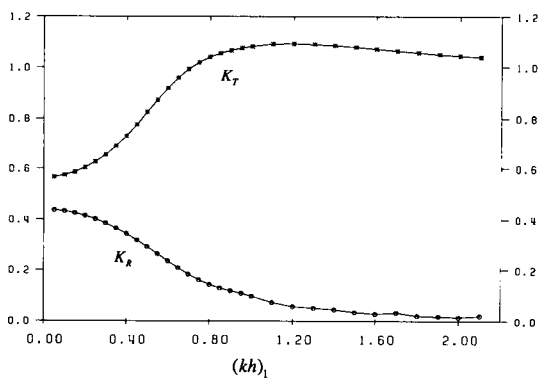


Fig. 3. Reflection and transmission coefficients for a step. Grid point: NU=40, ND=4, NB=56, NU=3.

세번째 예로 사용한 sinusoidal 둔덕의 格子網은 그림 4에 圖示되어 있고 둔덕 頂上部의 水深은 平坦한 水深의 1/2에 該當한다. 格子數는 84개로 NS=40,

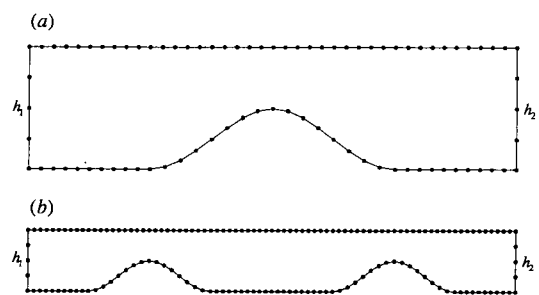


Fig. 4. Grid system for sinusoidal humps ($h_2/h_1=1$). Depth of hump= h_c . Distance between hump crests= L ; $h_c/h_1=0.5$, $L/h_1=4$.

ND=4, NB=36, NU=4로 정했다. 둔덕이 한 개 있는 경우(그림 4.a)의 $(kh)_1$ 에 대한 反射率과 透過率은 $(kh)_1$ 이 0.75 부근에서 最大로 되고 最高點으로부터 멀어질수록 反射率은 零으로 接近한다. 따라서 淺海와

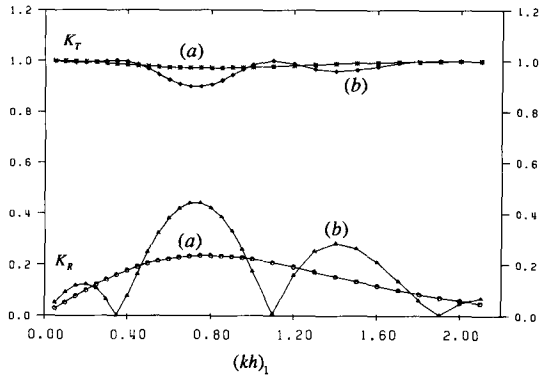


Fig. 5. Reflection and transmission coefficients for sinusoidal humps. (a) one hump, NU=40, ND=4, NB=36, NU=4. (b) two humps, NU=80, ND=4, NB=72, NU=4.

深海 波浪은 둔덕을 意識하지 못하고 지나가는 것으로 해석할 수 있으며, 反射率은 둔덕의 形態와 入射波浪의 條件에 따라 特異하게 反應하는 것으로 나타났다.

두 개의 둔덕의 格子網은 그림 4.b에 圖示되었고 둔덕의 頂上部間의 距離는 수심의 4배이며, 格子數는 160개로 NS=80, ND=4, NB=72, NU=4로 되어 있다. 그러나 둔덕이 두 개인 경우는 둔덕에 대한 相互作用으로 反射率의 形態가 顯著하게 바뀌며 最高의 反射率을 보인 入射條件은 둔덕 한 개의 경우와 비슷한 $(kh)_1=0.75$ 에서 둔덕 한 개의 反射率에 두 배 정도로 나타났다(그림 5). 이러한 相互作用의 過程을 해석하면 다음과 같다. 파랑이 첫째 둔덕을 만나 일부가 反射되고 나머지는 通過한다. 이 通過된 波浪이 둘째 둔덕을 만나 일부가 反射되고 그 나머지는 通過하게 되며 反射된 波浪은 첫째 둔덕을 만나 反射와 通過 過程을 거치며 다시 反射된 波浪은 둘째 둔덕에 대해서 같은 過程을 되풀이하여 이러한 過程이 수없이 反復된다. 따라서 最終 反射率은 첫째 둔덕의 왼편으로 進行하는 波浪의 總합으로 表示되게 된다. 이러한 相互作用에 의한 散亂 波浪의 phase가 같으면 增幅되고 反對가 되면 減少하므로 이는 둔덕의 形態와 둔덕간의 距離 그리고 入射波浪의 條件에 따라 變하게 될 것이다.

5. 結 論

地形에 의한 波浪의 反射率을 計算하기 위하여 混合 境界積分 要素法을 사용하였다. 線形要素를 사용한 수치모델의 結果를 既存의 結果와 比較하여 正確度を 檢證한 후 入射 波浪의 條件에 따른 反射率과 透過率을 計算하였다. 階段式 地形에 대한 本 모델의 結果는 가장 精密한 方法인 Kirby 등의 EFEM 結果에 잘 附合되었으며, 階段式 地形의 反射率은 수심이 깊어짐에 따라 單調 減少하는 것으로 나타났다. 한편 一定한 水深위에 놓인 sinusoidal 둔덕의 反射率은 수심이 깊어짐에 따라 反射率이 增加하여 最高點에 이룬 후 다시 減少하는 형태를 보이고 있다. 이러한 둔덕이 두 개인 경우의 反射率은 散亂된 波浪들의 phase에 따라 增幅 또는 減少되는 現象이 나타나며 따라서 여러개의 둔덕에 의한 反射率은 入射條件, 둔덕의 形態 및 距離에 의해 決定되는 것으로 判斷 된다.

參考文獻

徐承男, 吳炳哲, 姜始桓, 1989. 屈折에 의한 淺海波 산정법, 韓國海岸·海洋工學會誌, 1(1), 15-21.
 徐承男, 1990a. Cubic Spline을 사용한 境界要素法, 韓國海岸·海洋工學會誌, 2(1), 11-17.
 徐承男, 1990b. 拋物型 近似式에 의한 淺海波 推定모델, 韓國海岸·海洋工學會誌, 2(3), 134-142.
 Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1972. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
 Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. and Seo, S.N., 1983. Prediction of obliquely incident water waves over a trench, Part 2. Current flowing along the trench, *J. Fluid Mech.*, Vol. 176, 95-116.
 Liggett, J.R., 1977. Location of free surface in porous media, *J. Hydr. Div., ASCE*, Vol. 103, HY4, 353-365.
 Liu, P.L.-F. and Abbaspour, M., 1982. An integral equation method for the diffraction of oblique waves by an infinite cylinder, *Int. J. Num. Methods Engineering* Vol. 18, 1497-1504.
 Mei, C.C., 1983. *The applied dynamics of ocean surface waves*, Wiley-Interscience Pub., New York.
 Yeung, R.W., 1976. A hybrid integral equation method for time-harmonic free surface flow, *Proc. 1st Int. Conf. Numer. Ship Hydrodyn.*, 581-607.