

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第28卷 第2號 1991年 10月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol.28, No.2, October 1991

다양한 중간구속조건을 갖는 양단 탄성구속  
 보-기둥의 진동해석  
 이 종문\*, 이 순홍\*, 김 극천\*\*

Vibration Analysis of a Beam-Column with Elastically Restrained  
 Ends and Various Intermediate Constraints

by

J.M. Lee\*, S.H. Lee\* and K.C. Kim\*\*

요 약

양단이 병진 및 회전에 대해 탄성구속되고 다양한 중간구속조건 즉, 임의 갯수의 집중질량, 병진 스프링, 회전스프링 구속이 있는 보-기둥의 진동에 대해 우선 Hamilton 원리, Laplace 변환방법을 이용한 엄밀해법을 제시했다. 그러나 이 방법이 중간구속조건이 여러 개 있을 경우 그 연산과정이 매우 복잡함을 고려하여 기준계 즉, 중간구속 조건이 없는 계의 고유함수를 이용하는 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 근사해법도 검토했다.

근자에 발표된 타연구 결과와의 비교검토목적의 다양한 수치계산예를 통해, 첫째 본 연구의 엄밀해의 타당성이 확인되었고, 또 기준계의 고유함수를 이용하는 Rayleigh Ritz방법이 중간구속조건에 대한 다양한 변화에 대해 동일함수를 이용하는 장점과 더불어 진동과형가정함수의 항수에 따른 수렴성도 양호하며 좋은 정도를 보장하면서 편리하게 적용될 수 있음이 확인되었다.

Abstract

Vibration analysis methods of a beam-column with elastically restrained ends and various intermediate constraints such as rectilinear springs, rotational springs and concentrated masses are presented. Firstly, an exact method of solutions based on Hamilton's principle and Laplace transform method is shown. This method of solutions is very complicate in cases of having intermediate constraints more than two. Therefore, Rayleigh-Ritz method using the eigenfunctions of the base system, the system without intermediate constraints, are also investigated. Extensive numerical examples carried out for comparisons with known published works show that the latter method has easy adaptability for wide varie-

---

발표 : 1991년도 대한조선학회 춘계연구발표회('91. 4. 13)

접수일자 : 1991년 5월 16일, 재접수일자 : 1991년 7월 26일

\* 학생회원, 서울대학교 조선공학과

\*\* 정회원, 서울대학교 조선공학과

ties of boundary conditions and intermediate constraints, and gives good accuracy for various intermediate constraints with reasonable number of terms in construction of a trial function.

## 1. 서 언

중간구속조건을 갖는 양단탄성구속 보 및 보-기둥의 진동해석방법에 관한 연구에 많은 관심이 모아지고 있다.

보의 경우, Grant [1](1978)가 고전적 경계조건을 갖는 균일단면보에 집중질량 한 개가 부가된 경우를 Laplace변환방법으로 다루었다. 양단이 회전에 대해 탄성구속되고 횡방향으로는 강지되진 균일단면보에 대해서, Ercoli 등 [2](1987)이 중간에 집중질량과 병진스프링이 있는 경우를 직교다항식 이용 Rayleigh-Ritz 방법으로 다루었으며, Liu 등 [3](1988)이 중간에 여러 개의 집중질량이 있는 경우를 Laplace변환방법으로, 김 등[4](1990)은 중간에 강지지점, 병진 및 회전스프링이 있는 경우를 직교다항식 이용 Galerkin방법으로 다루었다. 한편, Rutenberg[5](1978), Lau[6](1984), Gürgöze and Batan[7](1986), Alvarez 등[8](1988), Liu 등[9](1988) 등이 외팔보 또는 일단탄성구속·타단자유인 보의 자유단에 집중질량 또는 병진스프링지지 집중질량이 부가된 경우 및 자유단에 집중질량·보 중간의 임의의 한 위치에 병진스프링·회전스프링이 함께 부가된 계에 대해 보요소 운동미분방정식들의 일반해와 계의 양단 경계조건 및 중간구속점에서의 매칭(matching)조건식들로부터 고유치문제를 형성하여 엄밀해를 구했다.

보-기둥의 경우, Takahashi[10](1980)가 일단은 고정되고 병진스프링으로 지지된 타단에 집중질량이 부가된 경우에 대해 엄밀해를 구하였고, Laura 등[11,12](1983)이 회전에 대해 탄성지지·횡방향으로는 강지지되고 중간에 강지지점 및 집중질량이 있는 경우에 대해 직교다항식 이용 Rayleigh-Ritz방법으로 다루었다. Pedersen[13](1984)은 일단은 회전에 대해서

만 탄성지지·타단은 병진 및 회전에 대해 탄성지지되고 중간 구속조건은 없는 경우를 정식화하고 고전적 경계조건에 대한 엄밀해를 구하여 설계변수 특히 축력의 세기와 진동수파라미터의 관계를 고찰했다. Kim 등[14](1988)은 고전적 경계조건을 갖는 보-기둥의 중간에 집중질량, 집중굽힘모멘트 및 강지지점이 있는 경우를 직교다항식 이용 Rayleigh-Ritz방법으로 다루었다.

이상의 연구흐름에서 직교다항식들은 양단경계조건에 따라서는 물론이러니와 중간구속조건에 따라서도 각기 다양한 내용을 갖고 있다.

본 연구에서는 보-기둥에 대해 경계조건을 양단 모두 병진 및 회전에 대해 탄성구속된 것으로 일반화하고 중간구속조건에 대해서도 임의 개수의 집중질량, 병진스프링 및 회전스프링이 부가된 경우로 일반화하여 다루었는데 그 내용은 다음과 같다. 첫째 Hamilton의 원리를 적용하여 정식화하고 Laplace변환방법을 원용한 엄밀해법을 제시했다. 그러나 이 방법이 중간구속조건이 여러 개 있을 경우 그 연산과정이 매우 복잡함을 고려하여 기준계 즉, 중간구속조건이 없는 계의 고유함수를 이용하는 Rayleigh-Ritz방법에 의한 근사해법도 검토했다.

## 2. 정식화 및 엄밀해

Fig.1에 보인 바와 같은 중간구속조건을 갖는 양단 탄성구속 보-기둥의 진동에 대해 Hamilton원리를 적용하므로써 다음과 같은 운동방정식과 경계조건식을 얻을 수 있다. 구체적인 유도과정은 저자들의 논문[17,18]에 주어져 있으며, 여기서는 결과식만 기술한다.

운동방정식 :

$$EIy'' + \left[ \rho A + \sum_{i=1}^l m_i \delta(x - x_{mi}) \right] \ddot{y} + p\dot{y} + \sum_{j=1}^m k_{l,j} \delta(x - x_{l,j}) y - \sum_{k=1}^n k_{R,k} \delta(x - x_{R,k}) y' = 0 \quad (1)$$

$$k_{l,i} \delta(x - x_{l,i}) y - \sum_{k=1}^n k_{R,k} \delta(x - x_{R,k}) y' = 0 \quad (1)$$

여기서  $\delta(x)$ 는 Dirac delta 함수이다.

경계조건식 :

$$\left. \begin{aligned} EIy''(0) &= k_{R1}y'(0) \\ EIy'''(0) &= -k_{l1}y(0) - p\dot{y}(0) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} EIy''(l) &= -k_{Rn}y'(l) \\ EIy'''(l) &= k_{ln}y(l) - p\dot{y}(l) \end{aligned} \right\} (3)$$

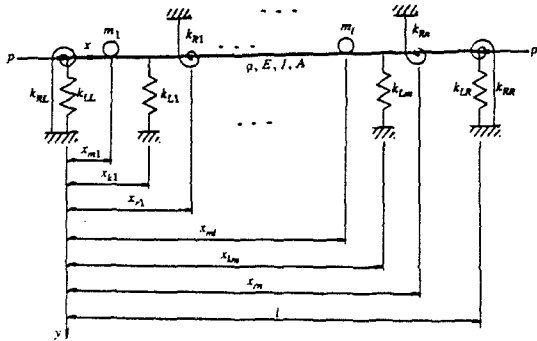


Fig. 1 Model of a beam-column with elastically restrained ends intermediate constraints.

(1), (2) 및 (3)에  $y(x, t) = Y(x)e^{-i\omega t}$ 를 대입하여 변수분리하고, 무차원길이좌표  $\xi = \frac{x}{l}$  및 무차원 파라미터

$$\left. \begin{aligned} K_{l,i} &= \frac{k_{l,i}l^3}{EI} & K_{l,r} &= \frac{k_{l,r}l^3}{EI} & K_{R,i} &= \frac{k_{R,i}l}{EI} \\ K_{RR} &= \frac{k_{RR}l}{EI} & M_i &= \omega^2 \frac{m_i l^3}{EI} & K_{l,i} &= \frac{k_{l,i}l^3}{EI} \\ K_{Rk} &= \frac{k_{Rk}l}{EI} & P &= \frac{pl^2}{EI} & \lambda &= \omega^2 \frac{\rho Al^4}{EI} \end{aligned} \right\} (4)$$

를 도입하면 다음과 같은 고유치문제가 정의된다.

$$Y^{iv}(\xi) + PY''(\xi) - \lambda Y(\xi) - \sum_{i=1}^l M_i \delta(\xi - \xi_{mi}) \cdot Y(\xi) + \sum_{j=1}^m K_{l,j} \delta(\xi - \xi_{l,j}) Y(\xi) - \sum_{k=1}^n K_{R,k} \delta'(\xi - \xi_{R,k}) Y'(\xi) = 0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} Y''(0) - K_{R1}Y'(0) &= 0 \\ Y'''(0) + PY'(0) + K_{l1}Y(0) &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} Y''(1) + K_{Rn}Y'(1) &= 0 \\ Y'''(1) + PY'(1) - K_{ln}Y(1) &= 0 \end{aligned} \right\} (7)$$

(5)의 일반해는 Laplace변환방법을 원용하여 구할 수 있는데 그 도출과정은 저자들의 논문 [17,18]에 주어져 있다. 여기서는 결과식만 기술한다. 즉,

$$Y(\xi) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left\{ (a^2 + P) \cosh a \xi + (b^2 - P) \cos b \xi \right\} \cdot Y(0) + \left[ (a^2 + P) \frac{\sinh a \xi}{a} + (b^2 - P) \frac{\sin b \xi}{b} \right] \cdot Y'(0) + (\cosh a \xi - \cos b \xi) Y''(0) + \left[ \frac{\sinh a \xi}{a} - \frac{\sin b \xi}{b} \right] Y'''(0) + \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\sinh a(\xi - \xi_{mi})}{a} - \frac{\sin b(\xi - \xi_{mi})}{b} \right] M_i Y(\xi_{mi}) u(\xi - \xi_{mi}) - \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\sinh a(\xi - \xi_{l,j})}{a} - \frac{\sin b(\xi - \xi_{l,j})}{b} \right] K_{l,j} Y(\xi_{l,j}) u(\xi - \xi_{l,j}) + \sum_{k=1}^n \left[ \cosh a(\xi - \xi_{R,k}) - \cos b(\xi - \xi_{R,k}) \right] K_{R,k} Y'(\xi_{R,k}) u(\xi - \xi_{R,k}) \quad (8)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} a &= \left( \frac{-P + \sqrt{P^2 + 4\lambda}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ b &= \left( \frac{-P - \sqrt{P^2 + 4\lambda}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (9)$$

이고,  $u(\xi)$ 는 unit step 함수이다.  $Y(0)$ ,  $Y'(0)$ ,  $Y''(0)$  및  $Y'''(0)$ 는 (6) 및 (7)을 적용하여 결정된다.

따라서 구체적인 특정시스템에 대한 고유치 방정식 및 고유함수의 엄밀해는 (6),(7),(8)로부터 얻어진다. [17,18]에 중간구속조건 및 지지 사례에 대한 고유치방정식 및 고유함수가 주어져 있다.

### 3. 근사해법

앞에서 기술한 바와 같이 엄밀해를 구할 수 있으나, 중간구속조건이 여러 개 있는 경우에는 그 연산이 매우 복잡하고 또 지루하다. 따라서 기준계의 고유함수 이용 Rayleigh-Ritz방법에 의한 근사해법을 검토한다.

#### 3.1 기준계의 고유치 방정식 및 고유함수

Fig.1에서 중간구속조건이 없는 경우 즉,  $m_i = k_{l,i} = k_{r,i} = 0, i=1,2,\dots$ 인 경우를 기준계로 한다. 따라서 기준계의 운동방정식 및 일반해는 각기 (1) 및 (8)에서  $\sum_{i=1}^l (\dots) = \sum_{j=1}^m (\dots) = \sum_{k=1}^n (\dots) = 0$  으로 취한 결과인데, 고유치방정식 및 고유함수는 다음과 같이 도출된다.

고유치방정식:

$$\det \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

여기서

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -\frac{P}{K_{l,l} K_{r,l}} (\alpha_{31} + K_{RR} \alpha_{21}) + \frac{1}{K_{r,l}} \\ &\quad \cdot (\alpha_{32} + K_{RR} \alpha_{22}) + (\alpha_{33} + K_{RR} \alpha_{23}) \\ \beta_{12} &= -\frac{1}{K_{l,l}} (\alpha_{31} + K_{RR} \alpha_{21}) + (\alpha_{34} + K_{RR} \alpha_{24}) \\ \beta_{21} &= -\frac{P}{K_{l,l} K_{r,l}} (\alpha_{41} + P \alpha_{21} - K_{l,r} \alpha_{11}) + \frac{1}{K_{r,l}} \\ &\quad \cdot (\alpha_{42} + P \alpha_{22} - K_{l,r} \alpha_{12}) + (\alpha_{43} + P \alpha_{23} - K_{l,r} \alpha_{13}) \\ \beta_{22} &= -\frac{1}{K_{l,l}} (\alpha_{41} + P \alpha_{21} - K_{l,r} \alpha_{11}) \\ &\quad + (\alpha_{44} + P \alpha_{24} - K_{l,r} \alpha_{14}) \end{aligned}$$

와 같고,  $\beta_{11}$  산식 중  $\alpha_{11}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (a^2 + P) \cosh a + (b^2 - P) \cos b \\ \alpha_{12} &= \frac{a^2 + P}{a} \sinh a + \frac{b^2 - P}{b} \sin b \\ \alpha_{13} &= \cosh a - \cos b \\ \alpha_{14} &= \frac{\sinh a}{a} - \frac{\sin b}{b} \\ \alpha_{21} &= a(a^2 + P) \sinh a - b(b^2 - P) \sin b \\ \alpha_{22} &= \alpha_{11} \end{aligned}$$

$$\alpha_{23} = a \sinh a + b \sin b$$

$$\alpha_{24} = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{31} = a^2(a^2 + P) \cosh a - b^2(b^2 - P) \cos b$$

$$\alpha_{32} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{33} = a^2 \cosh a + b^2 \cos b$$

$$\alpha_{34} = \alpha_{23}$$

(10)의 근으로서  $\lambda_i, i=1,2,\dots$ 가 구해지면 (4)로부터 고유원진동수  $\omega_i$ 가 결정된다.

고유함수:

$\lambda_i$ 를 (9)에 대입하여  $a_i$  및  $b_i$ 가 산정되며,  $i$ -차 고유함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y_i(\xi) &= \frac{1}{a_i^2 + b_i^2} \left\{ \left[ -\frac{P}{K_{l,l} K_{r,l}} \left[ (a_i^2 + P) \right. \right. \right. \\ &\quad \cdot \cosh a_i \xi + (b_i^2 - P) \cos b_i \xi \left. \right] + \frac{1}{K_{r,l}} \\ &\quad \cdot \left[ (a_i^2 + P) \frac{\sinh a_i \xi}{a_i} + (b_i^2 - P) \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{\sin b_i \xi}{b_i} \right] + (\cosh a_i \xi - \cos b_i \xi) \right] \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{K_{l,l}} \left[ (a_i^2 + P) \cosh a_i \xi + (b_i^2 - P) \cos b_i \xi \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\sinh a_i \xi}{a_i} - \frac{\sin b_i \xi}{b_i} \right] \right] \left[ -\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} \right] \left. \right\} \tag{11} \end{aligned}$$

#### 3.2 중간구속조건이 있는 경우

중간구속조건이 있는 경우의 진동과형을 (11)의 선형결합에 의해

$$y_i(\xi) \approx \sum_{i=1}^n C_i Y_i(\xi) \tag{12}$$

로 가정하고, 고유치문제 정식화는 Rayleigh-Ritz방법에 의한다.

Rayleigh quotient 산정을 위한 최대변형에너지  $V_{\max}$  및 기준운동에너지  $T^*(= \frac{T_{\max}}{\omega^2})$  산식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \frac{EI}{2l^3} \left\{ \int_0^1 y''^2 d\xi - P \int_0^1 y'^2 d\xi \right. \\ &\quad \left. + K_{l,l} y^2 \Big|_{\xi=0} + K_{l,r} y^2 \Big|_{\xi=1} + K_{r,l} y'^2 \Big|_{\xi=0} \right. \\ &\quad \left. + k_{RR} y'^2 \Big|_{\xi=1} + \sum_{j=1}^m \left[ k_{l,j} y^2 \right]_{\xi=\xi_j} \right\} \end{aligned}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n \left[ K_{Rk} y^2 \right]_{\xi=\xi_k} \right\} = \frac{EI}{2l^3} \bar{V}_{\max} \quad (13)$$

$$T^* = \frac{\rho AI}{2} \left\{ \int_0^l y^2 d\xi + \sum_{i=1}^l \left[ \mu_i y^2 \right]_{\xi=\xi_i} \right\} \\ = \frac{\rho AI}{2} \bar{T}^* \quad (14)$$

여기서

$$\mu_i = \frac{m_i}{\rho AI}$$

이제, Rayleigh quotient

$$R(y) = \frac{V_{\max}}{T^*} \quad (15)$$

가 극소치

$$\min R(y) = \lambda = \frac{\omega^2 \rho AI^4}{EI} \quad (16)$$

를 갖기 위한 조건식

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial C_i} - \lambda \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

의 연산결과를 매트릭스형식으로 정리하므로써 다음과 같은 고유치문제가 형성된다.

$$\left[ K - \lambda M \right] C = 0 \quad (18)$$

(18)의 해 즉, (18)의 pair  $\lambda_i$  및  $\{C\}_i$ 가 얻어지면 (4) 및 (12)에 의해  $\omega_i^2$  및 고유진동파형 근사식  $y_i(\xi)$ 가 산정된다.

#### 4. 수치계산에 및 고찰

엄밀해의 타당성 및 기준계고유함수를 이용하는 Rayleigh-Ritz방법의 유용성을 기존의 타 연구와 비교검토하기 위해 일련의 수치계산을 수행하였는데, 중요한 계산결과를 Table 1에 보였다.

우선, 본 논문에서 제시한 엄밀해는 Table 1-(a) 및 (b)에 보인 바와 같이 Hess[15], Gorman[16] 및 Liu등[3,9]의 계산결과와 부합성이 매우 좋다. 즉, 그 타당성이 확인된다.

엄밀해법은 중간구속조건이 많아질수록 계산량이 엄청나게 많아지는 어려움이 있는데 이에 비하여 기준계의 고유함수를 이용하는 Ray-

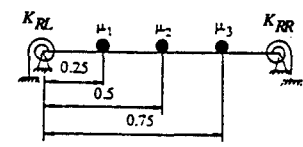
leigh-Ritz방법에 의한 근사계산은 훨씬 간편하다. Table 1에 보인 바와 같이 여러가지 모델에 대해 이 방법에 의한 계산 결과를 엄밀해 또는 다른 연구자의 계산결과와 비교검토했다.

(12)의 중첩항수에 따른 해의 정도를 살피기 위해 Table 1-case 3에 보인 모델에 대해 항수를  $n=10$ 까지 취할 경우 엄밀해와의 오차가 order 3,5에서 1% 정도, order 1,2,4 때는 양자가 거의 일치하고, 또 고유진동파형의 부합성이 매우 양호함을 알 수 있었다[17]. 이를 근거로 Table 1은 모두  $n=10$ 까지 취한 값이다. Table 1에 보인 모든 경우에 있어서 기준계 고유함수 이용 Rayleigh-Ritz방법 계산결과들의 엄밀해에 대한 오차는 1% 미만이다. 축력이 작용하는 경우의 수치계산에 즉, Table 1-(c)에서 기준계 고유함수 이용 Rayleigh-Ritz방법에 의한 결과는 엄밀해와 거의 같은 값이고, Laura[11]의 직교다항식 이용 결과는 엄밀해보다 2~3% 높은 값이다.

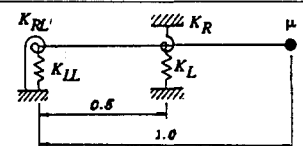
서언에 기술된 다른 많은 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 연구들이 경계조건에 대해서는 물론이려니와 중간구속조건에 따라 서로 다른 다양한 내용의 직교다항식을 이용하고 있는데 반하여, 기준계의 고유함수를 이용하는 방법은 다양한 중간구속조건에 대해 동일한 함수계가 이용될 수 있는 장점이 있다. 또 보요소의 운동미분방정식의 일반해와 양단경계조건 및 중간구속점에서의 매칭조건식들로부터 고유치문제를 형성하는 방법은 중간구속조건이 여러 개일 경우 그 연산이 사실상 본 연구의 엄밀해법과 대등하게 복잡해진다.

중간구속조건의 위치가 기준계의 진동파형을 기준으로 해서 node로부터 antinode로 이행함에 따라 진동수파라미터에 미치는 영향의 변화 성향을 살피기 위해, 양단단순지지보를 예로해서 기본진동형의 진동수파라미터를 중간구속조건 크기의 위치와 따른 기본진동형 진동수파라미터의 변화를 도시한 것이 Fig.2이다. 중간구속조건이 병진 스프링 및 집중질량일 경

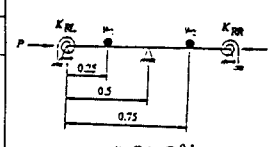
Table 1 Comparisons of numerical results of the frequency parameters  $\lambda$  obtained by various methods

order	Exact solution : LTM <sup>1)</sup>		R-R <sup>2)</sup>	System 
	Liu et al.[3]	Author	Author	
1	92.35	92.36	92.37	$K_{RL} = K_{RR} = 100.0, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.0$
2	667.60	667.62	667.84	
3	1,977.25	1,977.19	1,993.44	
4	33,776.60	33,777.19	33,789.48	
5	59,494.86	59,495.32	60,069.40	

1) Laplace Transform Method 2) Rayleigh-Ritz Method using base system eigenfunctions  
(a)

order	Exact solution		R-R <sup>3)</sup>	System 
	Liu et al.[9] <sup>1)</sup>	Author <sup>2)</sup>	Author	
1	2.38	2.38	2.39	$K_{LL} = \infty, K_{RL} = 0.1, \mu = 1.0$ $K_L = 10, K_R = 1$
2	135.50	135.50	135.54	
3	1,716.96	1,716.96	1,719.22	
4	8,096.81	8,096.81	8,116.36	
5	25,583.73	25,583.73	25,704.75	

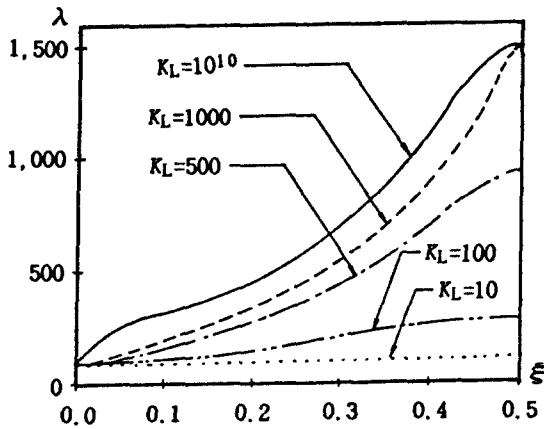
1) Direct sol using matching conditions at constraint points. 2) Laplace transform method  
3) Rayleigh-Ritz method using base system eigenfunctions.  
(b)

P	$K_{RL} = K_{RR} = 0$			$K_{RL} = K_{RR} = \infty$			System 
	Author's Exact sol.	Rayleigh-Ritz		Author's Exact sol.	Rayleigh-Ritz		
		Laura[11] <sup>1)</sup>	Author <sup>2)</sup>		Laura[11] <sup>1)</sup>	Author <sup>2)</sup>	
0	1,111.90	1,133.67	1,111.96	2,674.05	2,754.15	2,675.06	$\mu_1 = \mu_2 = 0.1$
-1	1,140.03	1,162.13	1,140.10	2,706.17	2,800.53	2,707.21	
-5	1,252.55	1,275.92	1,252.64	2,834.49	2,923.57	2,835.64	
-10	1,393.17	1,417.52	1,393.64	2,994.52	3,078.03	2,995.81	

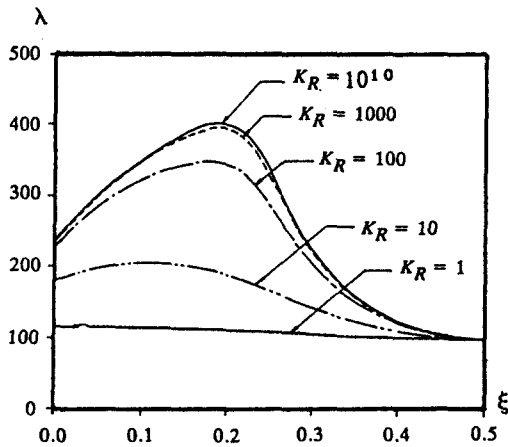
1) Using Polynomials 2) Using base system eigenfunctions  
(c) Fundamental mode

우 antinode에 인접할수록 그 영향이 커지나, 회전스프링일 경우 antinode에서는 그 영향이 거의 없고 기준계의 node와 antinode사이에 그 영향이 가장 큰 위치가 있다. 참고로 Fig.2-(b)

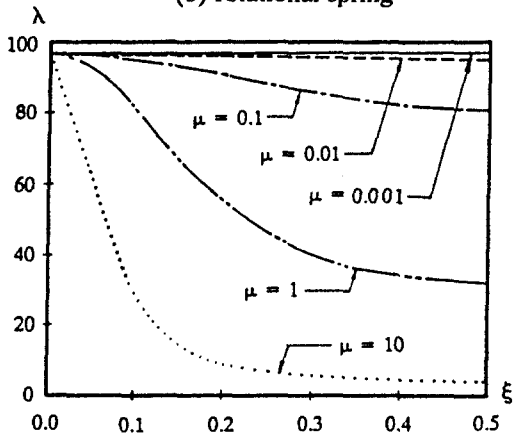
의  $\xi=0$  및 0.2,  $K_R=1000$ 에 대한 진동파형을 Fig.3에 보였다. 축력의 세기가 진동수파라미터에 미치는 영향에 대해서는 Pedersen[13]이 적시한 사항들이 대체로 확인되었다.



(a) rectilinear spring



(b) rotational spring



(c) concentrated mass

Fig. 2 Influence of magnitudes and locations of intermediate constraints on the fundamental frequency parameter : Simply supported ends

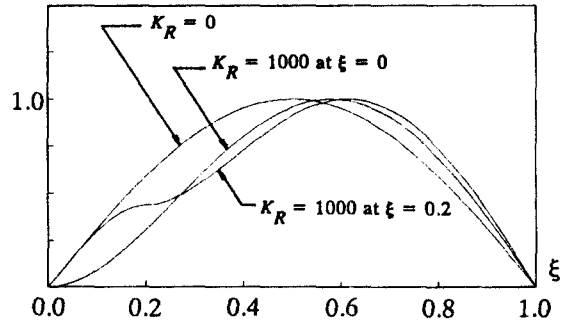


Fig 3 Fundamental mode shapes corresponding to  $K_R = 100$  at  $\xi = 0$  and 0.2 in Fig. 2-(b)

### 5. 결 론

보-기둥의 고유진동해석에 대해 양단경계조건 및 중간구속조건을 실제에서 고려될 수 있는 경우를 포괄적으로 일반화하여 정식화하고 Laplace변환방법을 원용해서 도출된 엄밀해법을 제시했다.

중간구속조건이 여러 개인 경우 엄밀해법의 연산이 매우 복잡해짐을 고려하여 기준계 즉, 중간구속조건이 없는 계의 고유함수를 이용하는 Rayleigh-Ritz방법에 의한 근사해법의 유용성도 검토되었는데, 이는 중간구속조건의 다양한 변화에 대해 동일 함수계를 이용하는 장점과 더불어 진동과형가정함수의 항수에 따른 수렴성도 양호하여 좋은 정도를 보장하면서 편리하게 적용될 수 있음이 확인되었다. 이는 설계 변수변경에 따른 재해석에 있어서도 매우 편리하다.

기준계의 진동과형을 기준해서 중간구속조건의 위치가 고유진동수에 미치는 영향에 대한 수치실험적 고찰을 통해 병진스프링 및 집중질량의 영향은 node에 위치했을 때 거의 없고 antinode에 위치했을 때 가장 큰데, 회전스프링인 경우에는 antinode에 위치했을 때 그 영향이 거의 없고 node와 antinode 중간에 그 영향이 가장 큰 위치가 있음이 파악된다.

### 참 고 문 헌

[ 1 ] Grant, D.A., "The Effect of Rotary Iner-

- tia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams Carrying a Concentrated Mass", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 57, 1978.
- [ 2 ] Ercoli, L. and Laura, P.A.A., "Analytical and Experimental Investigation on Continuous Beams Carrying Elastically Mounted Masses", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 114, 1987.
- [ 3 ] Liu, W.H., Wu, J.R. and Huang, C.C., "Free Vibration of Beams with Elastically Restrained Edges and Intermediate Concentrated Masses", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 122, 1988
- [ 4 ] 김 용철등, "중간지지점이 있고 구속조건이 있는 보의 고유진동수", 대한조선학회 춘계학술강연집, 1990.
- [ 5 ] Rutenberg, A., "Vibration Frequencies for a Uniform Cantilever with a Rotational Constraint at a Point", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 45, 1978.
- [ 6 ] Lau, J.H., "Vibration Frequencies and Mode Shapes for a Constrained Cantilever", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 51, 1984.
- [ 7 ] Gürgöze, M. and Batan, H., "A Note on the Vibrations of a Restrained Cantilever Beam Carrying a Heavy Tip Body", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 106, 1986.
- [ 8 ] Alvarez, S.I., Ficcadenti de Iglesias, G.M. and Laura, P.A.A., "Vibration of an Elastically Restrained, Non-uniform Beam with Translational and Rotational springs, and with a Tip Mass", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 120, 1988.
- [ 9 ] Liu, W.H. and Huang, C.C., "Vibrations of a Constrained Beam Carrying a Heavy Tip Body", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 123, 1988.
- [ 10 ] Takahashi, K., "Eigenvalue Problem of a Beam with a Mass and Spring at the end Subjected to an Axial Force", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 71, 1980.
- [ 11 ] Laura, P.A.A., Verniere de Irassar, P.L. and Ficcadenti, G.M., "A Note Transverse Vibrations of Continuous Beams Subject to an Axial Force and Carrying Concentrated Masses", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 86, 1983.
- [ 12 ] Laura, P.A.A. and Alvarez, S., "Fundamental Frequency of an Elastically Restrained Beam with Discontinuous Moment of Inertia and an Intermediate Support", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 86, 1983.
- [ 13 ] Pedersen, P.T., "A Note on Vibration of Beam-Columns", The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics Report No. 293, 1984.
- [ 14 ] Kim, C.S. and Dickinson, S.M., "On the Analysis of Laterally Vibrating Slender Beams Subject to Various Complicating Effects", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 122, 1988.
- [ 15 ] Hess, M.S., "Vibration Frequencies for a Uniform Beam with Central Mass and Elastic Supports", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 31, 1964.
- [ 16 ] Gorman, D.P., *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, Wiley, 1975.
- [ 17 ] 이 종분, "중간구속조건을 갖는 양단 탄성지지 보-기둥의 진동 해석", 서울대 공대 석사논문, 1990.
- [ 18 ] 이 순홍, "다양한 중간구속조건을 갖는 양단탄성구속 보-기둥의 진동 해석", 서울대 공대 석사논문, 1991(예정).