

大韓造船學會論文集
 第28卷 第1號 1991年 4月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 28, No. 1, April 1991

2軸方向壓縮力을 받는 單純支持平板에 對한 非線形舉動의 解析解

白 点 基*

An Analytical Solution of Nolinear Behaviour for Simply Supported Rectangular Plates Subjected to Biaxial Compression

by

Jeom K. Paik*

要 約

본 연구에서는 2軸方向壓縮力을 받는 周邊單純支持平板의 挫屈前, 挫屈強度, 挫屈後 舉動, 最終強度 및 最終強度後舉動에 대한 解析解를 도출한다. 또한 본 연구에서 도출한 解析解를 적용하여 板의 縱橫比와 細長比 및 荷重成分比의 변화에 따른 시리즈해석을 수행한다. 본 解析解는 각종 數值解析 및 實驗結果에 대한 基準值로서 널리 사용될 수 있으리라 기대된다.

Abstract

In this study, an analytical solution of pre-buckling, buckling, post-buckling, ultimate strength and post-ultimate strength behaviour of simply supported rectangular plates subjected to biaxial compression is derived. Parametric study with varying the aspect ratio, the slenderness ratio and the loading ratio is carried out. The present solution may be used as basical data when the verification of the numerical and experimental result is made.

1. 序 言

지금까지 板構造物의 設計, 建造에 있어 板部材의 非線形舉動解析은 가장 중요한 課題들 중의 하나로 다루어져 왔다. 그 결과 방대한

이론적 및 실험적 연구성과가 보고되어 있으며, 실용적으로도 유용하게 활용되고 있는 내용이 많다. 특히, 구조물의 실제 건조시에 발생하는 초기처짐이나 잔류응력등의 초기결합의 영향뿐만 아니라 각종 境界條件 및 荷重條件을

접수일자 : 1990년 8월 7일, 재접수일자 : 1991년 3월 8일

*정회원, 부산대학교 조선공학과

고려한 研究成果들은 구조물의 설계단계에서 중요한 설계지침을 제시해 주고 있다.

그러나 이들은 대개 數值解析 또는 實驗結果를 바탕으로 하거나 경험적으로 정식화된 것으로서 그 결과 適用範圍가 限定的이거나 일관성이 결여되는 등의 문제점이 없지 않다. 또한 매 경우마다 數值解析 또는 實驗을 수행하기에는 非經濟的이다.

이상의 측면에서 본 연구에서는 2軸方向 壓縮力을 받는 周邊單純支持된 平板을 대상으로 板의 支配方程式을 解析的인 방법으로 풀어서 挫屈前, 挫屈強度, 挫屈後, 最終強度 및 最終強度後 거동을 상세히 파악할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

이를 위하여 平板의 挫屈強度에 대하여는 支配方程式의 解析結果를 바탕으로 縱橫比의 變化에 따른 相關關係式을 導出하며, 挫屈後 舉動은 有効幅의 개념을 導入하여 定式化한다. 또한 最終強度 相關關係式은 처짐이 생긴 板部材의 膜應力分布를 검토하여 明示的인 형태로 도출하며, 最終強度後 舉動도 解析的인 方法으로 定式化한다. 또한 도출된 解析解를 적용하여 板要素의 縱橫比와 細長比의 變化에 따른 시리즈해석을 수행한다.

이하에서는 이들에 대하여 구체적으로 설명한다.

2. 2軸方向 壓縮力을 받는 平板의 挫屈強度 相關關係式

Fig.1에 나타내는 바와 같이 2축방향 압축력을 받는 평판의 彈性挫屈強度는 縱橫比 및 荷重成分比등에 따라 달라지며, 이 경우에는 板의 大 처짐거동을 支配하는 微分方程式을 직접 풀어서 正解를 구할 수 있다.

먼저, 平板의 彈性대처짐거동을 支配하는 微分方程式은 다음과 같다[1].

$$\Delta^4 w - \frac{t}{D} (F_{yy} \cdot w_{xx} + w_{yy} - 2F_{xy} \cdot w_{xy}) = 0 \tag{1}$$

$$4F - E\{(w_{xy})^2 - w_{xx} \cdot w_{yy}\} = 0 \tag{2}$$

여기서, w : 판의 처짐

D : 판의 굽힘강성($EI^3/12(1-\nu^2)$)

t : 판 두께

E : 탄성계수

ν : Poisson ratio

또한, 식(2)의 F는 應力函數로서 다음식을 만족한다.

$$\sigma_x = F_{,yy}, \sigma_y = F_{,xx}, \tau_{xy} = -F_{,xy} \tag{3}$$

平板의 境界條件은 周邊單純支持狀態로 생각하고 있으므로 식(1) 및 식(2)의 처짐 w는 다음식으로 假定할 수 있으며, 이 식은 挫屈強度에 대한 正解를 제공한다.

$$w = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{4}$$

여기서, A_{mn} 은 未知係數

식(4)는 x방향에 m개, y방향에 n개의 挫屈半波數로 挫屈이 발생한 경우의 판처짐을 나타내고 있다. 그런데 $a/b \geq 1$ 인 판을 생각하여 길이가 긴 쪽을 x축으로 잡으면 y방향에는 항상 1개의 挫屈半波數로 挫屈이 생긴다. 즉, 식(4)의 $n=1$ 이 되어 식(4)는 실제로 다음 식으로 간이화된다.

$$w = A_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \tag{5}$$

식(5)를 식(2)에 대입하고 應力函數 F에 관한 微分方程式을 풀면 F는 다음과 같이 計算된다.

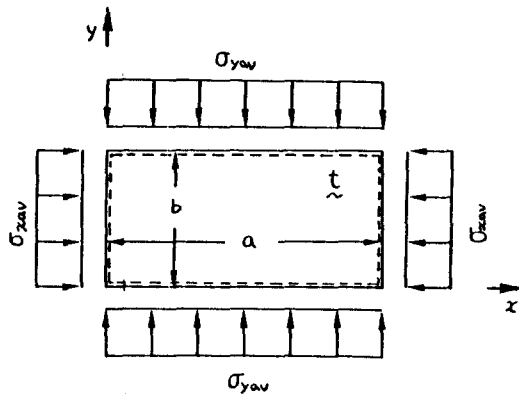


Fig.1 A rectangular plate subjected to biaxial compression

$$F = \sigma_{xav} \cdot \frac{y^2}{2} + \sigma_{yav} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{E}{32} A_m \left(\frac{a^2}{m^2 b^2} \cos \frac{2m\pi x}{a} + \frac{m^2 b^2}{a^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (6)$$

식(5)와 식(6)을 식(1)에 대입하고 Galerkin 법을 적용하면 다음 식이 얻어진다.

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ \Delta^4 w - \frac{t}{D} (F_{,yy} \cdot w_{,xx} + F_{,xx} \cdot w_{,yy} - 2F_{,xy} \cdot w_{,xy}) \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (7)$$

(단, $k=m$)

식(7)을 구체적으로 적분하여 정리하면 未知係數 A_m 은 다음과 같이 얻어진다.

$$A_m = \left[\frac{16}{E\pi^2(m^4/a^4 + 1/b^4)} \left\{ \frac{m^2}{a^2} \sigma_{xav} + \frac{1}{b^2} \sigma_{yav} - \frac{D\pi^2}{t} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (8)$$

이상에서는 平板의 挫屈強度를 구하는데도 불구하고 挫屈이 생긴 판의 挫屈後 舉動에 대해 이야기를 진행시켜 왔다. 그러나, 여기서 생각할 수 있는 것은 挫屈이 발생하는 순간은 처짐이 발생하지 않았다는 사실이다. 따라서, 판 처짐 $w=0$ 이어야 하며 식(8)의 A_m 이 0이어야 한다. 즉,

$$A_m = 0 \quad (9)$$

식(9)를 정리하여 구체적으로 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\frac{m^2}{a^2} \sigma_{xav} + \frac{1}{b^2} \sigma_{yav} - \frac{D\pi^2}{t} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = 0 \quad (10)$$

식(10)은 2軸方向 壓縮力를 받는 周邊單純支持된 平板의 挫屈強度相關關係를 나타내는 식이고, x방향의 挫屈半波數 m 에 대해 最小에너지를 필요로 하는 모드로 挫屈이 생긴다.

만일, $\sigma_{yav} = 0$ 를 대입하고 σ_{xav} 를 σ_{xcr} 로 치환하면 다음식으로 표시된다.

$$\sigma_{xcr} = \frac{\pi^2 D}{a^2 t} \left(m_0 + \frac{\beta^2}{m_0} \right)^2, \quad \beta = a/b \quad (11)$$

식(11)의 m_0 는 x방향으로만 압축력이 작용하는 경우의 挫屈半波數로서 2軸方向壓縮力이 작용하는 경우의 挫屈半波數 m 과 구별하기 위하여 m_0 로 나타내었다. 또한 m_0 는 縱構比에 의

존하는 整數로서 식(11)로부터 다음과 같이 구해진다(1).

$$m_0 + \frac{\beta}{m_0} \leq (m_0 + 1) + \frac{\beta}{m_0 + 1}$$

또는 $\beta \leq \sqrt{m_0(m_0 + 1)}$ (12)

또한, $\sigma_{xav} = 0$, 즉 y 방향에만 압축력이 작용하는 경우의 挫屈強度 σ_{ycr} 은 같은 방법으로 식(10)에 $\sigma_{xav} = 0$ 를 대입하면 얻어진다. 그런데, 이 경우 압축력이 작용하지 않기 때문에 x방향은 1개의 좌굴반파수로 좌굴이 생긴다. 즉, $m=1$ 이 되며 σ_{ycr} 은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_{ycr} = \frac{\pi^2 D}{a^2 t} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^2 \quad (13)$$

식(11)과 식(13)에서 구한 σ_{xcr} 및 σ_{ycr} 을 이용하여 식(10)을 무차원화하면

$$\frac{\sigma_{xav}}{\sigma_{xcr}} m^2 \left(m_0 + \frac{\beta^2}{m_0} \right)^2 + \frac{\sigma_{yav}}{\sigma_{ycr}} (1 + \beta^2)^2 - (m^2 + \beta^2)^2 = 0 \quad (14)$$

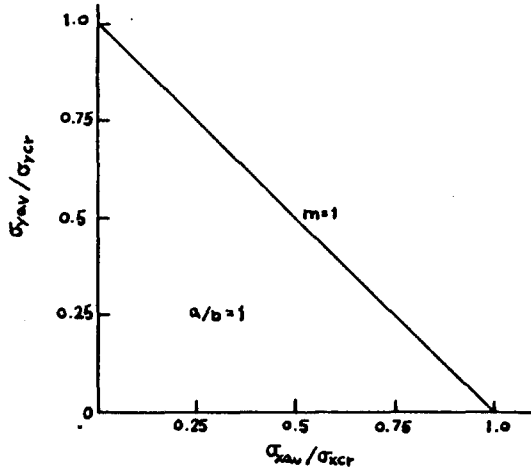
윗 식의 m 은 2軸方向 壓縮力이 작용하는 경우의 x방향 挫屈半波數로서 荷重成分비 $c = \sigma_{yav} / \sigma_{xav}$ 를 도입하면, 식(10)을 이용하여 다음 식을 만족하는 整數로서 계산된다(2).

$$\frac{(m^2/\beta^2 + 1)^2}{m^2/\beta^2 + c} \leq \frac{\{(m+1)^2/\beta^2 + 1\}^2}{(m+1)^2/\beta^2 + c} \quad (15)$$

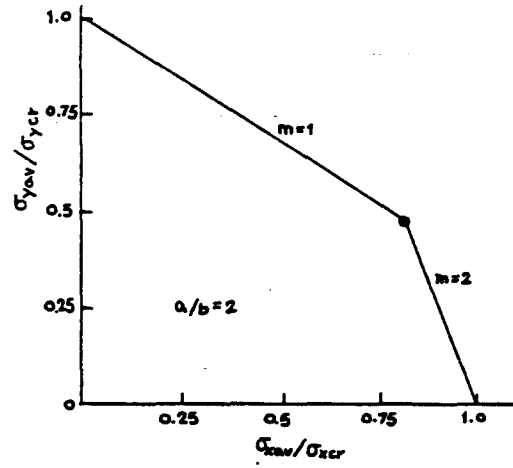
임의의 縱構比 β 및 荷重成分비 c 를 갖는 평판의 挫屈強度는 식(14)에 식(15)로부터 구한 m 을 대입하여 구할 수 있다.

Fig.2는 β 를 1에서 8까지 변화시켜 수행한 平板의 挫屈強度相關關係를 나타내고 있다. 이들 그림속의 기호 ●는 挫屈모드의 천이점을 나타낸다. 이들 그림에 의하면 挫屈強度相關關係는 각각의 挫屈半波數 m 에 대응하는 直線群으로 구성되어 있다는 것을 알 수 있다.

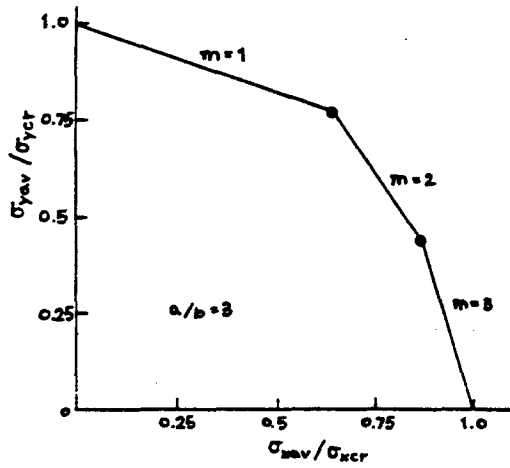
a/b 가 1근방($1 \leq a/b \leq \sqrt{2}$)에서는 한개의 挫屈半波數($m=1$)로 挫屈이 생기므로 挫屈強度相關關係는 한 개의 直線으로 되어 σ_{xav} 와 σ_{yav} 間的 상관이 강하지만 a/b 가 커질수록 相關關係는 convex형태로 되어 서로 상관이 줄어드는 경향을 보이고 있다. 또한 σ_{xav} 가 지배적일수록 挫屈半波數 m 이 增加하는 경향을 보이고 있으며, σ_{yav} 가 지배적일수록 挫屈半波數는 1에 수렴한다. 이들 挫屈強度相關關係는 전술한 바



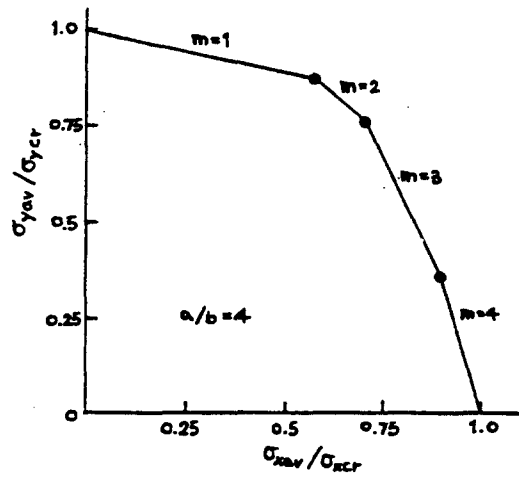
(a) a/b=1



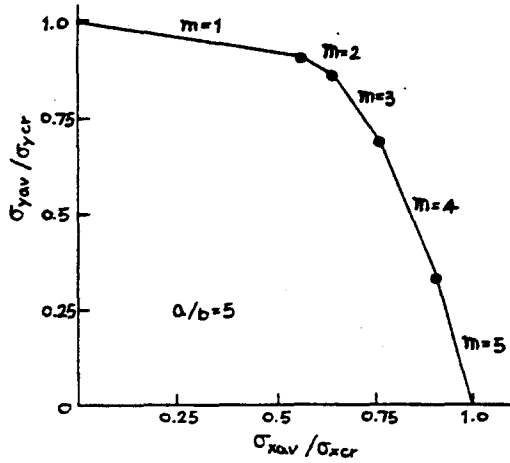
(b) a/b=2



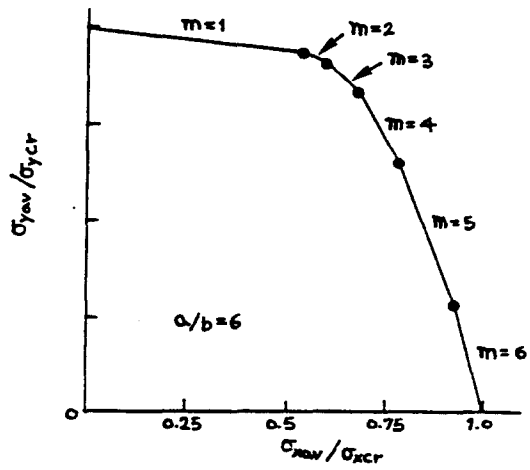
(c) a/b=3



(d) a/b=4



(e) a/b=5



(f) a/b=6

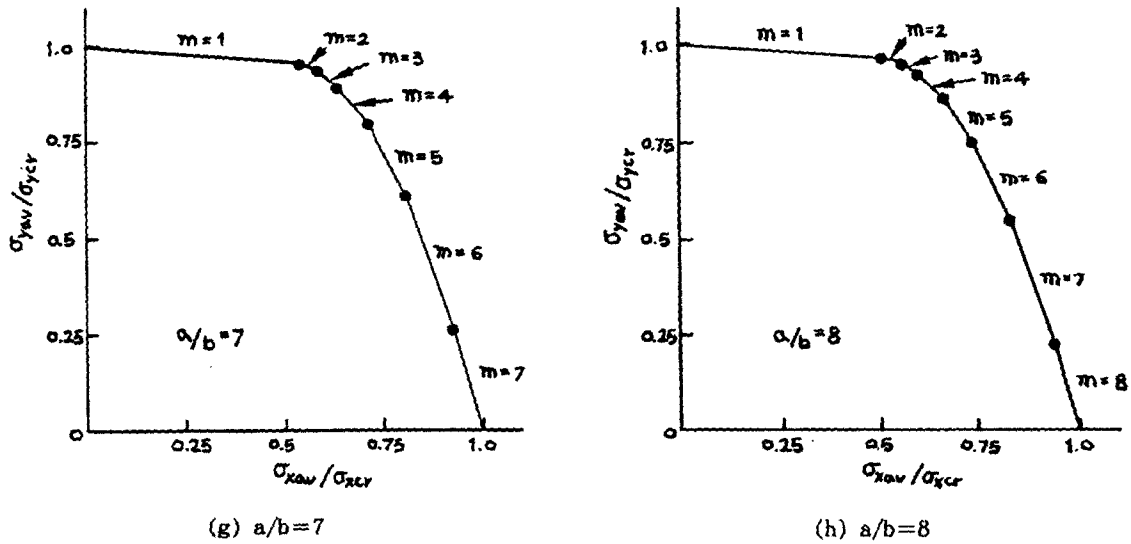


Fig.2 Biaxial compressive buckling interaction curve for rectangular plates with varying the aspect ratio

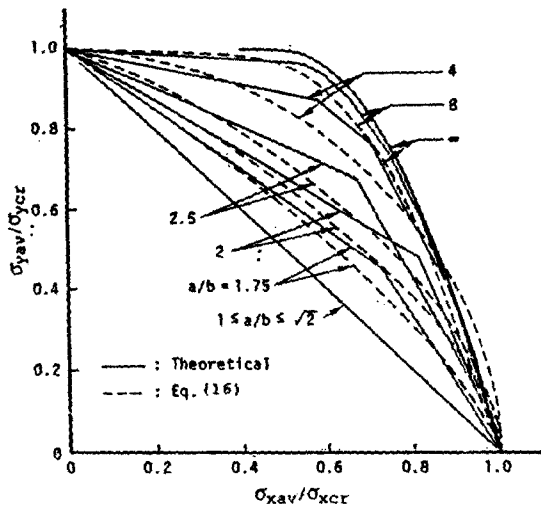


Fig.3 Accuracy of the simplified buckling interaction curve

와 같이 正解를 제공한다.

그런데, 挫屈強度相關關係를 한개의 연속함수로 나타내면 實用적으로 훨씬 편리하다. 따라서, 이상의 계산결과를 바탕으로 2軸方向 軸壓縮력을 받는 周邊單純支持된 平板의 挫屈強度相關關係式을 近似的으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\Gamma_B = \left[\frac{\sigma_{xav}}{\sigma_{xcr}} \right]^{a_1} + \left[\frac{\sigma_{yav}}{\sigma_{ycr}} \right]^{a_2} - 1 \quad (16)$$

여기서,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1.0 \\ a_2 &= 1.0 \end{aligned} \right\} 1 \leq \beta \leq \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0.0293\beta^3 - 0.3364\beta^2 + 1.5854\beta - 1.0596 \\ a_2 &= 0.0049\beta^3 - 0.1183\beta^2 + 0.6153\beta + 0.8522 \end{aligned} \right\} \beta > \sqrt{2}$$

식(16)의 Γ_B 의 값이 0보다 작으면 좌굴전이며 0에 도달하면 좌굴강도에 도달한 순간을 의미한다. 또한, Γ_B 의 값이 0보다 큰 경우는 좌굴후 상태를 나타낸다.

식(16)의 精度를 확인하기 위하여 正解와 비교할 결과를 Fig.3에 나타내고 있다. 이 그림으로부터 알 수 있는 바와 같이 식(16)의 근사식은 實用적으로 충분한 정도의 결과를 주고 있다는 것을 알 수 있다.

3. 挫屈後 舉動 및 有效幅의 評價

平板의 挫屈後에는 식(8)을 식(5) 및 (6)에 대입하면 판의 처짐 및 應力分布를 詳細히 파악할 수 있게 된다. 특히 應力分布는 식(3)을 적용하면 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_x = \sigma_{xcr} - \frac{Em^2\pi^2}{8a^2} A_m^2 \cos \frac{2\pi y}{a} \quad (17.a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yav} - \frac{E\pi^2}{8b^2} A_m^2 \cos \frac{2m\pi x}{a} \quad (17.b)$$

여기서, A_m 은 식(8)에 주어져 있다.

식(17)을 $\beta=1$ 인 정사각형판에 대해 圖示하면 Fig.4와 같이 된다. 이 그림으로부터 알 수 있는 바와 같이 挫屈後의 膜應力分布은 不均一分布로 되며 모서리 '부분에 最大應力值가 생기고 周邊의 中央部에 最小應力值가 생긴다. 또한 β 가 1보다 커지면 挫屈半波數만큼 Fig.4의 應力分布가 길이방향으로 반복적으로 나타난다.

x 및 y방향의 最大 및 最小應力值는 식(17)에 $y=0$ (또는 b) 및 $x=0$ (또는 a)를 대입하면 구체적으로 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{xmax} = a_1 \sigma_{xav} + a_2 \sigma_{yav} + a_3$$

$$\sigma_{ymax} = b_1 \sigma_{xav} + b_2 \sigma_{yav} + b_3 \quad (18.a)$$

$$\sigma_{xmin} = c_1 \sigma_{xav} + c_2 \sigma_{yav} + c_3$$

$$\sigma_{ymin} = d_1 \sigma_{xav} + d_2 \sigma_{yav} + d_3 \quad (18.b)$$

여기서,

$\sigma_{xmax}, \sigma_{xmin}$: x방향의 최대 및 최소 응력치
 $\sigma_{ymax}, \sigma_{ymin}$: y방향의 최대 및 최소 응력치

$$a_1 = 1 - \frac{2m^4}{m^4 + a^4/b^4}, a_2 = 1 - \frac{2m^2}{m^4 b^2/a^2 + a^2/b^2},$$

$$a_3 = \frac{2m^2}{m^4/a^2 + a^2/b^4} \cdot \frac{D\pi^2}{t} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^2$$

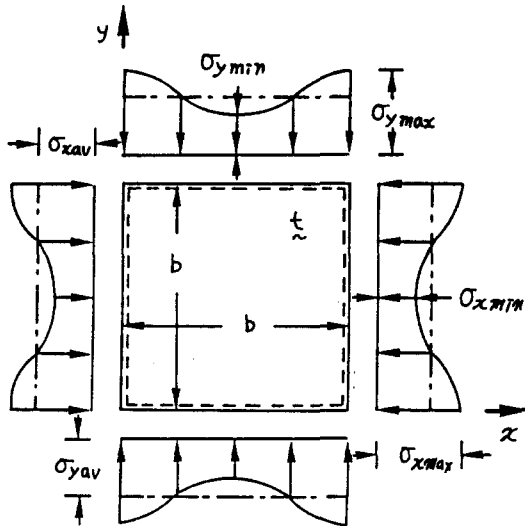


Fig.4 Membrane stress distribution of a square plate after buckling

$$b_1 = a_2, b_2 = 1 - \frac{2}{m^4 b^4/a^4 + 1},$$

$$b_3 = \frac{2}{m^4 b^2/a^4 + 1/b^2} \cdot \frac{D\pi^2}{t} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^2$$

$$c_1 = 1 + \frac{2m^4}{m^4 + a^4/b^4}, c_2 = \frac{2m^2}{m^4 b^2/a^2 + a^2/b^2},$$

$$c_3 = \frac{2m^2}{m^4/a^2 + a^2/b^4} \cdot \frac{D\pi^2}{t} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^2$$

$$d_1 = c_2, d_2 = 1 + \frac{2}{m^4 b^4/a^4 + 1},$$

$$d_3 = - \frac{2}{m^4 b^2/a^4 + 1/b^2} \cdot \frac{D\pi^2}{t} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^2$$

그런데, 板構造物의 初期設計段階에서 挫屈한 板의 面內變形이나 最大應力 도는 最終強度를 계산하는 경우에 有效幅(effective width)의 개념이 매우 유용하게 사용되어 왔다. 지금까지 제안되어 온 有效幅은 一軸壓縮力을 받는 판을 대상으로 한 것이 대부분이며, 組合荷重下의 板의 有效幅에 대한 연구는 극히 드물다 [3-5]. 또한, 각종 수치해석 또는 실험결과를 바탕으로 한 經驗式이 주류를 이루고 있다.

여기서는 앞에서 계산한 挫屈後 板의 詳細한

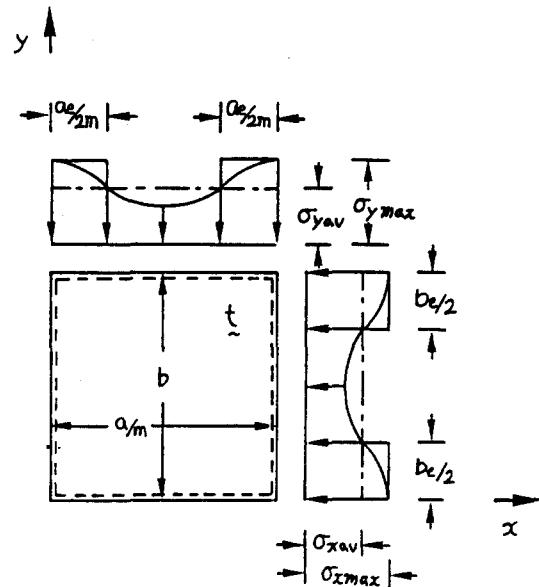


Fig.5 Definition of effective widths of a buckled rectangular plate in the longitudinal and transverse direction

應力分布를 바탕으로 2軸方向 壓縮力을 받는 경우의 有效幅을 解析的으로 導出한다.

挫屈이 발생한 板의 有效幅은 Fig.5에 나타내는 바와같이 外力의 作用에 의한 平均應力과 最大應力의 比로서 다음과 같이 정의된다.

$$b_e/b = \sigma_{xav}/\sigma_{xmax} \quad (19.a)$$

$$a_e/a = \sigma_{yav}/\sigma_{ymax} \quad (19.b)$$

여기서, b_e 및 a_e 는 각각 x 및 y 방향의 板의 有效幅이며, y방향의 板의 有效幅은 挫屈半波數의 개수만큼 동일한 應力분포가 반복적으로

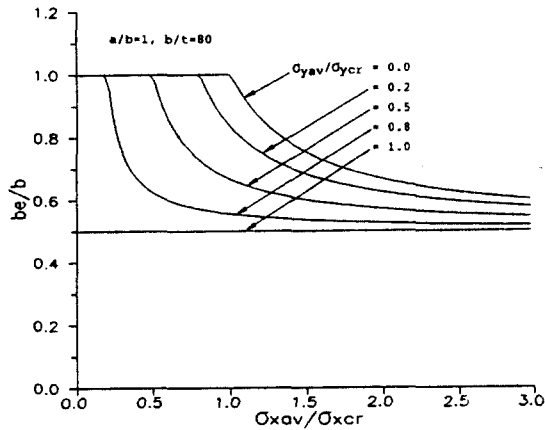


Fig.6.a Influence of the loading ratio on the longitudinal effective width with increasing of the longitudinal compression

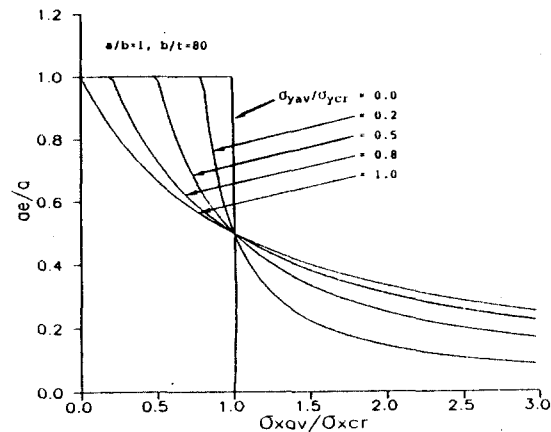


Fig.6.b Influence of the loading ratio on the transverse effective width with increasing of the longitudinal compression

나타나므로 Fig.5에 나타내는 바와 같이 1개의 挫屈半波數에 대해서만 정의하면 된다.

따라서, 식(18.a)를 식(19)에 대입하면, 挫屈後 板의 有效幅이 계산된다. Fig.6에는 板의 縱橫比 및 荷重成分比의 변화에 따른 有效幅을 나타내고 있다. 한편, 좌굴이 생긴후의 板의 平均변형률성분은 板의 주변이 직선을 유지하고 있다고 생각하고 있으므로 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= (\sigma_{xmax} - \nu\sigma_{yav})/E \\ \epsilon_y &= (\sigma_{ymax} - \nu\sigma_{xav})/E \end{aligned} \quad (20)$$

윗식에 식(18.a)를 대입하고 정리하면 平均應力-平均變形率關係式은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_{xav} = \frac{1}{f_1g_2 - g_1f_2} (g_2 \epsilon_x - f_2 \epsilon_y + g_3f_2 - f_3g_2) \quad (21.a)$$

$$\sigma_{yav} = \frac{1}{f_2g_1 - g_2f_1} (g_1 \epsilon_x - f_1 \epsilon_y + g_3f_1 - f_3g_1) \quad (21.b)$$

여기서, $f_1 = a_1/E$, $f_2 = (a_2 - \nu)/E$, $f_3 = a_3/E$
 $g_1 = (b_1 - \nu)/E$, $g_2 = b_2/E$, $g_3 = b_3/E$

4. 最終強度 相關關係式

전술한 바와 같이 板이 挫屈한 후에는 應力

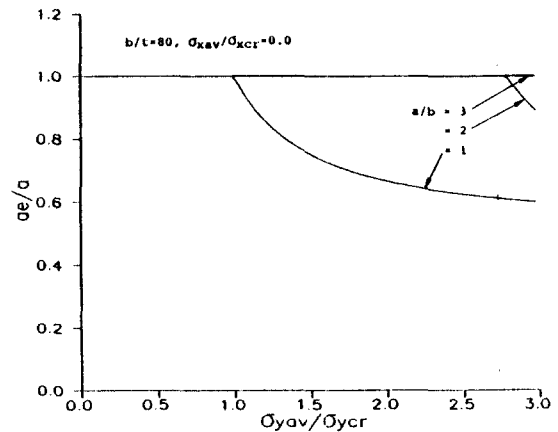


Fig.6.c Influence of the aspect ratio on the transverse effective width with increasing of the transverse compression

분포가 不均一하게 되며 應力은 모서리부분에 最大應力이 생기고 周邊의 中央部에 最小應力이 생긴다. 또한 판의 길이방향에 따라 Fig.4에 나타내는 응력분포가 每挫屈半波數마다 반복적으로 分布하게 된다. 한편, 판의 내부에서는 최대처짐이 생기는 위치에서의 판두께방향의 上下表面에 최대응력이 생긴다.

일반적으로 판내부의 최대응력치는 처짐발생으로 인하여 주변의 최대응력치보다 크기가 크며, 내부의 최대응력성분이 降伏條件을 만족하면 소성화가 시작되고 판의 굽힘강성이 저하하여 처짐이 더욱 증가하게 된다. 그러나, 板周

邊이 직선을 유지한다는 조건하에서는 판 내부의 표면이 다소 소성화되더라도 바로 붕괴하지 않고 안정을 유지하게 되며, 외력의 증가와 함께 판 주변이 항복하게 되면 더 이상의 외력증가에 저항할 수 없게 되어 처짐이 급격히 증가하여 最終強度에 도달한다[6].

따라서, 본 연구에서는 板周邊이 降伏할 때를 最終強度상태라고 가정하여 最終強度 相關關係式을 導出한다.

板周邊에 降伏이 발생하는 것은 荷重成分비에 따라 달라지며 Fig.7에 나타내는 바와 같은 3종류로 분류할 수 있다. 즉, 1) 모서리 부분,

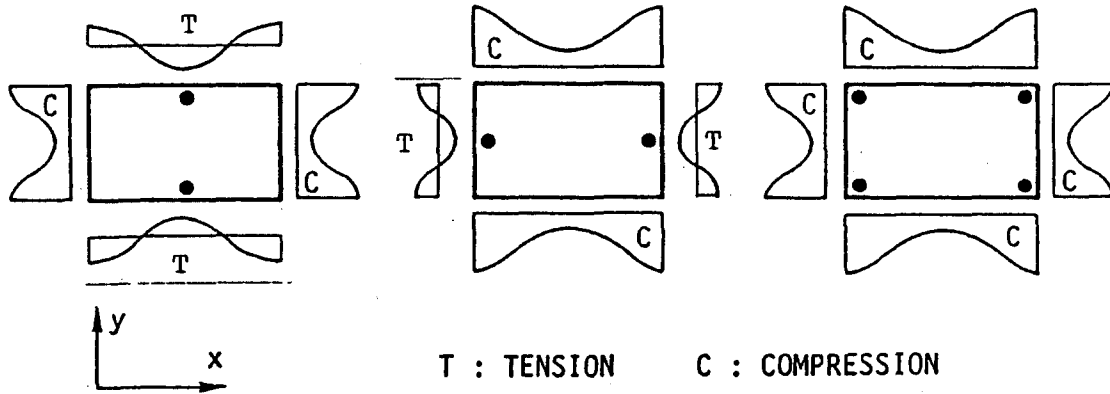


Fig.7 Plasticity checking point of a rectangular plate under biaxial compression

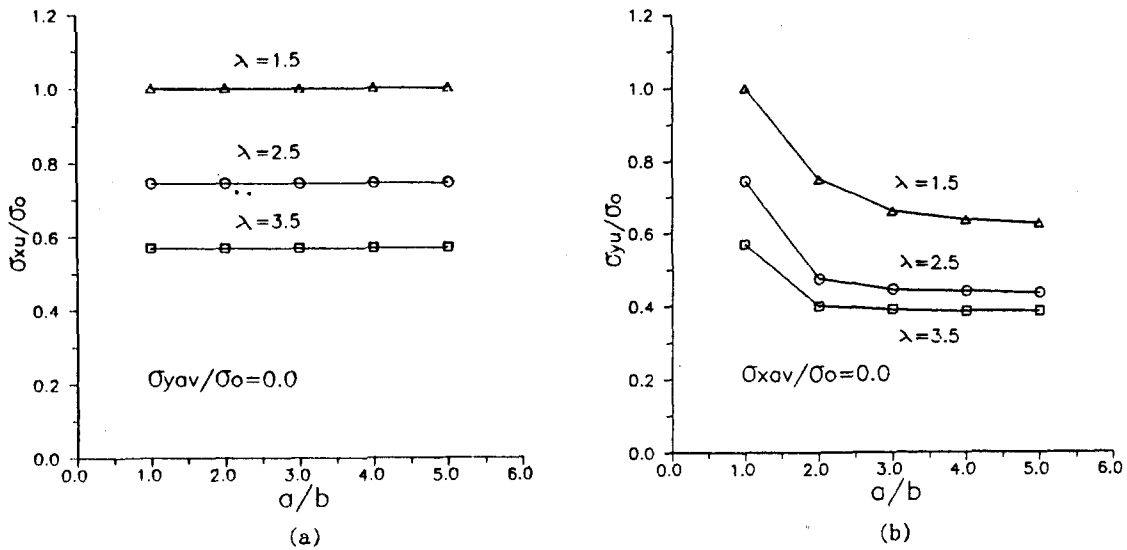


Fig.8.a Ultimate strength of rectangular plates under uniaxial compression with varying the aspect ratio

2) 길이방향의 挫屈半波長의 中央部 및 3) 폭 방향의 中央部 등이다. 이때 각 부분에 생기는 x 및 y 방향의 應力成分은 다음과 같다.

- 1) 모서리부분 : $\sigma_{xmax}, \sigma_{yman}$
- 2) 길이방향의 挫屈半波長의 中央部 :

$$\sigma_{xmax}, \sigma_{ymin}$$

- 3) 폭 방향의 중앙부 : $\sigma_{xmin}, \sigma_{ymax}$

따라서, Mises의 降伏條件에 위의 應力成分을 대입하면 각 부분에 대한 소성발생 여부를

판정하는 조건식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Gamma_{p1} &= \sigma_{xmax}^2 - \sigma_{xmax} \cdot \sigma_{yman} + \sigma_{yman}^2 - \sigma_o^2 \\ \Gamma_{p2} &= \sigma_{xmax}^2 - \sigma_{xmax} \cdot \sigma_{ymin} + \sigma_{ymin}^2 - \sigma_o^2 \\ \Gamma_{p3} &= \sigma_{xmin}^2 - \sigma_{xmin} \cdot \sigma_{ymax} + \sigma_{ymax}^2 - \sigma_o^2 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서, σ_o 는 降伏應力

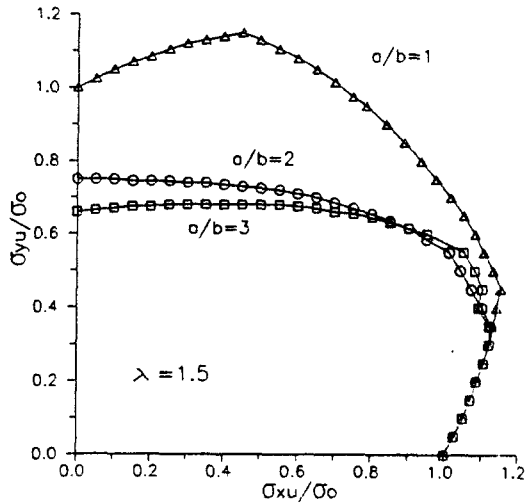
외력의 작용에 의한 면내 膜應力成分을 위식에 대입하여 이들 중 어느 한식의 Γ_p 값이 0보다 크거나 같아지면 塑性이 발생한 것으로 생각하면 되고, 또한 이때가 最終強度狀態로 된다.

Fig.8에는 板의 縱橫比 및 細長比를 변화시켜 수행한 最終強度 相關關係를 나타내고 있다.

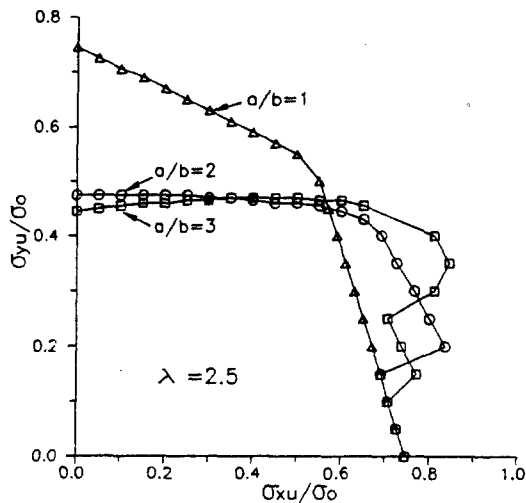
5. 最終強度後 舉動

5.1 一軸方向壓縮력을 받는 板의 最終強度後 舉動

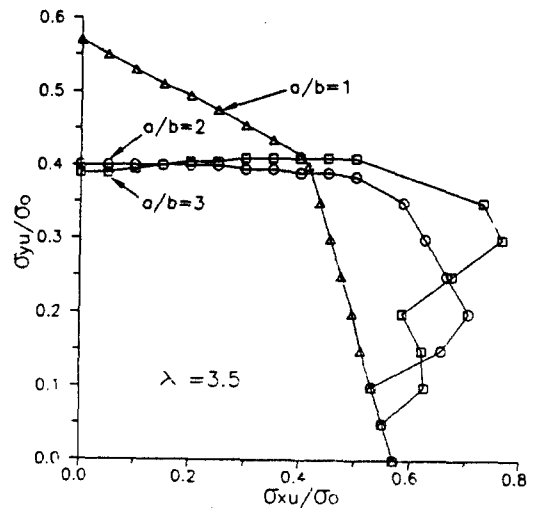
먼저, 挫屈後 처짐이 생긴 板의 最終強度後 舉動을 해석적인 방법으로 정식화하기 위하여 가장 간단한 예로서 x방향에 一軸壓縮을 받는 판의 最終強度後 舉動을 評價해 보기로 한다. 해석을 簡單化하기 위하여 여기서는 非荷重邊(y방향)의 面內變位條件은 自由로 假定한다.



(a)



(b)



(c)

Fig.8.b Influence of the aspect ratio on the ultimate strength interaction curve for rectangular plates subjected to biaxial compression

따라서, 이 경우에는 y방향에는 膜應力이 전혀 생기지 않는다.

板에 挫屈이 생기기 전의 x方向 平均變形率은 다음과 같이 계산된다. 즉,

$$\epsilon_x = \sigma_{xav} / E \tag{23}$$

여기서, ϵ_x 는 x방향 彈性變形率을 나타낸다.

x방향으로 一軸壓縮力을 받는 板은 平均應力이 挫屈應力에 도달하면 挫屈한다. 즉,

$$\sigma_{xav} = \sigma_{scr} = E \cdot \epsilon_{scr} \tag{24}$$

여기서, σ_{scr} 은 一軸壓縮力을 받는 板의 彈性挫屈應力이며, ϵ_{scr} 은 挫屈이 발생했을 때의 x方向

變形率이다.

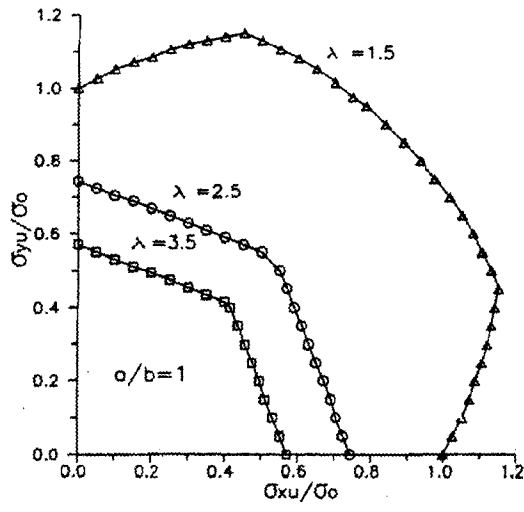
x方向 平均變形率은 다음과 같이 평가할 수 있다.

$$\epsilon_x = \sigma_{xmax} / E \tag{25}$$

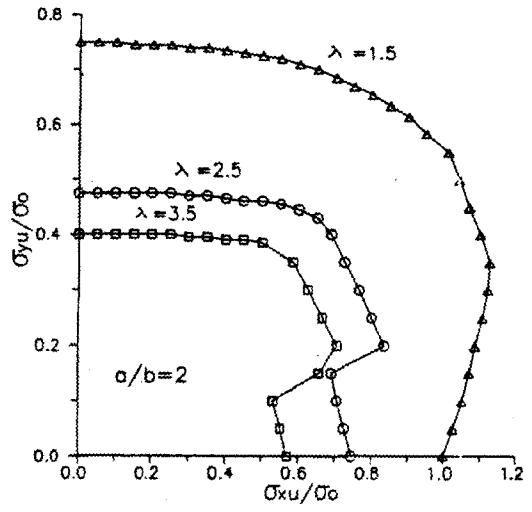
윗 식의 σ_{xmax} 는 식(18.a)로부터 다음과 같이 된다.

$$\sigma_{xmax} = 2\sigma_{xav} - \sigma_{scr} \tag{26}$$

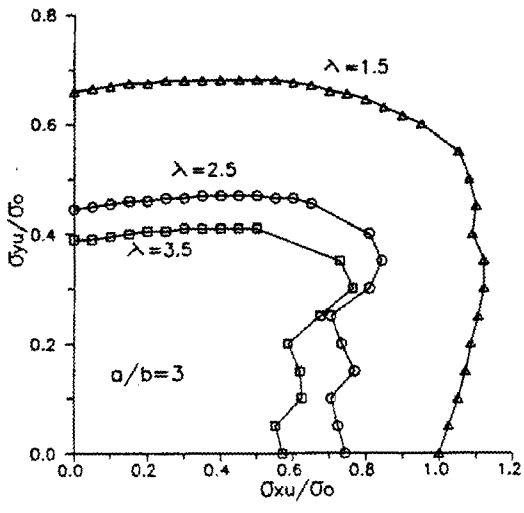
식(22)의 最終強度條件式을 적용하면 板은 다음 식을 만족하면 最終強度狀態에 도달하게 된다.



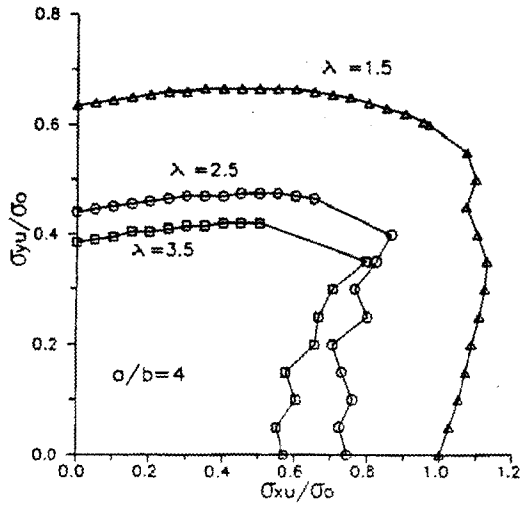
(a)



(b)



(c)



(d)

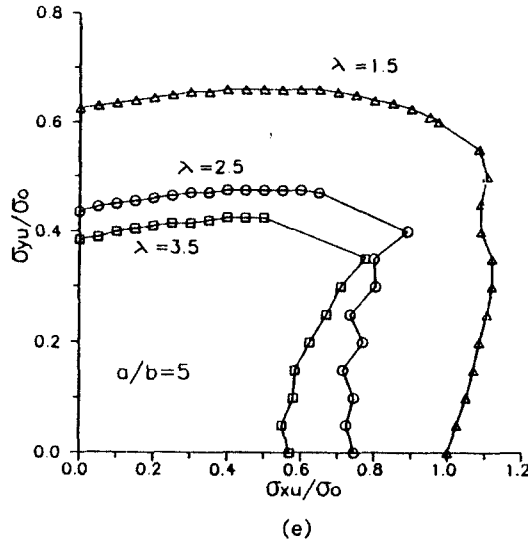


Fig.8.c Influence of the slenderness ratio on the ultimate strength interaction curve for rectangular plates subjected to biaxial compression

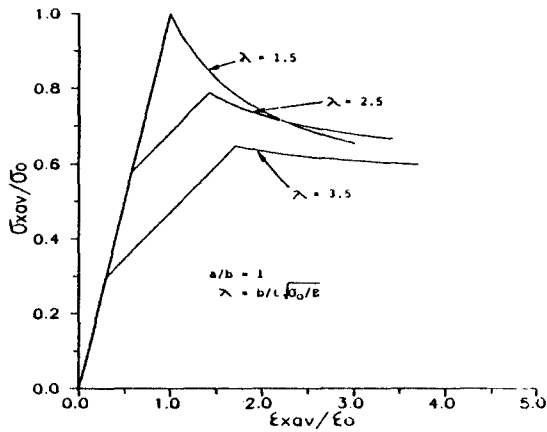


Fig.9 Average stress-strain relation of a square plate subjected to uniaxial compression (unloading edge free)

$$\sigma_{xmax} = \sigma_0 \quad (27)$$

最終強度에 도달한 뒤의 最大應力值 σ_{xmax} ($= \sigma_0$)는 그 이후의 變位增加에 대해서도 거의 변하지 않고 일정한 값을 유지한다고 가정한다.

따라서, 最終強度後의 平均應力은 有效幅의 개념을 적용하여 다음과 같이 계산할 수 있다. 즉,

$$\sigma_{xav} = b_e/b \cdot \sigma_0 \quad (28)$$

여기서, b_e : 판의 有效幅

윗 식의 有效幅比는 最終強度에 도달하기 전의 처짐이 생겨있는 板의 有效幅比와 동일한 경향을 나타낸다고 가정한다. 따라서, 有效幅比 b_e/b 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_e/b = \sigma_{xav}^* / \sigma_{xmax}^* \quad (29)$$

윗 식의 첨자기호 *는 最終強度後의 가상적인 값을 나타내며 다음의 관계가 있다.

$$\sigma_{xmax}^* = 2\sigma_{xav}^* - \sigma_{xcr} = E\epsilon_x \quad (30)$$

여기서, ϵ_x 는 最終強度後의 x軸 方向 平均變形率을 나타낸다.

식(30)을 식(29)에 대입하면 有效幅比 b_e/b 는 變形率의 函數로서 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\epsilon_{xcr}}{\epsilon_x}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_{xcr}}{\epsilon_x}\right) \quad (31)$$

따라서, 식(31)을 식(28)에 대입하면 最終強度後의 平均應力-變形率關係式은 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{xav} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\epsilon_{xcr}}{\epsilon_x}\right) \sigma_0 \quad (32)$$

윗 식을 증분형으로 표시하면

$$\Delta\sigma_{xav} = \frac{\partial\sigma_{xav}}{\partial\epsilon_x} \Delta\epsilon_x = -\frac{\sigma_0}{2} \cdot \frac{\epsilon_{xcr}}{\epsilon_x^2} \Delta\epsilon_x \quad (33)$$

Fig.9에는 1축압축력을 받는 정사각형판에

위의 평가법을 적용하여 계산한 應力-變形率關係를 나타내고 있다. 이 그림으로 부터 外力의 增加와 함께 挫屈이 발생하면 面內剛性이 급격히 저하하나, 더 이상의 外力增加에 견디다가 最終強度狀態에 도달하고, 最終強度에 도달한 後에는 變位는 계속증가하지만 平均應力은 저하함을 확인할 수 있다.

5.2 2軸方向 壓縮力を 받는 板의 最終強度後 舉動

다음으로, 5.1절의 評價法을 2軸方向 壓縮力을 받는 板의 문제로 확장시킬 수 있다. 본 연구에서 생각하고 있는 판 요소에는 剪斷力이 작용하고 있지 않으므로 挫屈前後에 걸쳐 軸方向의 應力 또는 變形率에 대한 剪斷力은 거의 없고 서로 독립적으로 다룰 수 있다.

따라서, 挫屈前 板의 應力-變形率關係는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= (\sigma_{xav} - \nu\sigma_{yav})/E \\ \epsilon_y &= (\sigma_{yav} - \nu\sigma_{xav})/E \end{aligned} \quad (34)$$

또한, 應力成分 σ_{xav} 와 σ_{yav} 를 식(16)에 대입하여 挫屈發生與否를 판정한다. 挫屈이 생긴 後의 變形率 成分은 식(20) 또는 (21)로부터 계산할 수 있다.

식(22)를 적용하여 最終強度狀態를 판정하고, 最終強度狀態에 도달한 순간의 最大膜應力成分을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xmax} &= \sigma_{xmax}^u \\ \sigma_{ymax} &= \sigma_{ymax}^u \end{aligned} \quad (35)$$

最終強度後의 σ_{xmax}^u 및 σ_{ymax}^u 값은 변위가 지속적으로 증가하는 한 거의 변화하지 않고 일정하다고 가정한다. 따라서, 最終強度後의 平均應力成分은 有效幅의 개념을 적용하여 식(19)에 식(35)를 대입하면 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xav} &= b_e/b \cdot \sigma_{xmax}^u \\ \sigma_{yav} &= a_e/a \cdot \sigma_{ymax}^u \end{aligned} \quad (36)$$

여기서, 첨자 u는 最終強度에 도달한 직후의 값을 의미한다.

윗 식의 x 및 y방향의 有效幅比는 最終強度前과 동일한 경향을 나타낸다고 가정하면 식(29)에서와 같은 방법으로 다음과 같이 표시

할 수 있다.

$$\begin{aligned} b_e/b &= \sigma_{xav}^*/\sigma_{xmax}^* \\ a_e/a &= \sigma_{yav}^*/\sigma_{ymax}^* \end{aligned} \quad (37)$$

윗 식의 σ_{xav}^* 및 σ_{yav}^* 는 식(18.a)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xav}^* &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} [b_2 \cdot \sigma_{xmax}^* - a_2 \cdot \sigma_{ymax}^* \\ &\quad + a_2b_3 - a_3b_2] \\ \sigma_{yav}^* &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} [-b_1 \cdot \sigma_{xmax}^* + a_1 \cdot \sigma_{ymax}^* \\ &\quad + a_3b_1 - a_1b_3] \end{aligned} \quad (38)$$

윗 식의 最終強度後의 最大膜應力成分 σ_{xmax}^* 및 σ_{ymax}^* 는 판의 주변이 最終強度後에도 직선을 유지한다고 생각하고 있으므로 變形率의 函數로서 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xmax}^* &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x - \nu\epsilon_y) \\ \sigma_{ymax}^* &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y - \nu\epsilon_x) \end{aligned} \quad (39)$$

식(38) 및 (39)를 식(37)에 대입하면 有效幅比 b_e/b 및 a_e/a 를 變形率成分의 函數로 표시할 수 있으며, 이것을 다시 식(36)에 대입하면 平均應力-變形率關係式은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xav} &= \frac{\sigma_{xmax}^u}{E(a_1b_2 - a_2b_1)(\epsilon_x - \nu\epsilon_y)} [E(b_2 + \nu a_2)\epsilon_x \\ &\quad - E(\nu b_2 + a_2)\epsilon_y + (1-\nu^2)(a_2b_3 - a_3b_2)] \\ \sigma_{yav} &= \frac{\sigma_{ymax}^u}{E(a_1b_2 - a_2b_1)(\epsilon_y - \nu\epsilon_x)} [-E(b_1 + \nu a_1)\epsilon_x \\ &\quad + E(\nu b_1 + a_1)\epsilon_y + (1-\nu^2)(a_3b_1 - a_1b_3)] \end{aligned} \quad (40)$$

윗식을 증분형으로 표시하면 다음과 같은 增分形平均應力-平均變形率關係式이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xav} &= \frac{\partial\sigma_{xav}}{\partial\epsilon_x} \Delta\epsilon_x + \frac{\partial\sigma_{xav}}{\partial\epsilon_y} \Delta\epsilon_y \\ \Delta\sigma_{yav} &= \frac{\partial\sigma_{yav}}{\partial\epsilon_x} \Delta\epsilon_x + \frac{\partial\sigma_{yav}}{\partial\epsilon_y} \Delta\epsilon_y \end{aligned} \quad (41)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xav}}{\partial\epsilon_x} &= \frac{(1-\nu^2)(Ea_2\epsilon_y - a_2b_3 + a_3b_2)}{E(a_1b_2 - a_2b_1)(\epsilon_x - \nu\epsilon_y)^2} \cdot \sigma_{xmax}^u \\ \frac{\partial\sigma_{xav}}{\partial\epsilon_y} &= \frac{(1-\nu^2)\{-Ea_2\epsilon_x + \nu(a_2b_3 - a_3b_2)\}}{E(a_1b_2 - a_2b_1)(\epsilon_x - \nu\epsilon_y)^2} \cdot \sigma_{xmax}^u \\ \frac{\partial\sigma_{yav}}{\partial\epsilon_x} &= \frac{(1-\nu^2)\{-Eb_1\epsilon_y + \nu(a_3b_1 - a_1b_3)\}}{E(a_1b_2 - a_2b_1)(\epsilon_y - \nu\epsilon_x)^2} \cdot \sigma_{ymax}^u \end{aligned}$$

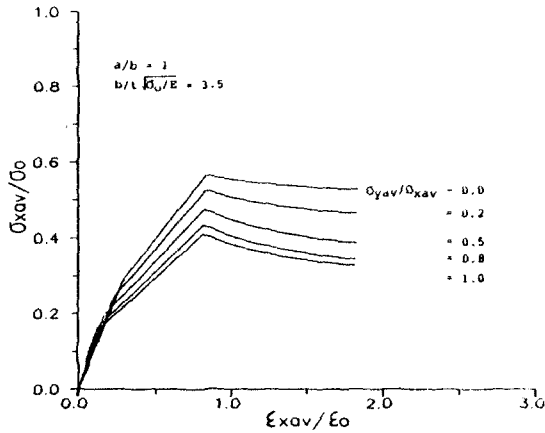


Fig.10.a Average stress-strain curve of a square plate with varying the loading ratio

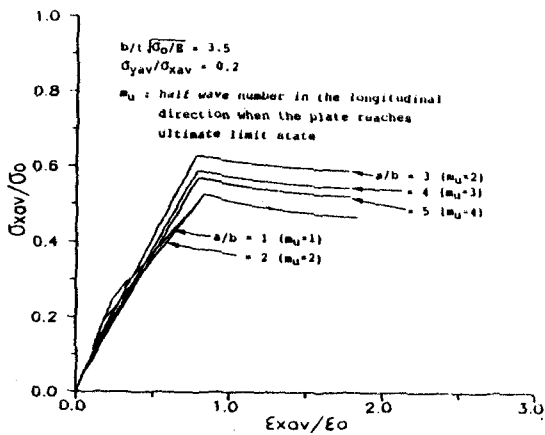


Fig.10.b Average stress-strain curve of rectangular plates subjected to biaxial compression with varying the aspect ratio

$$\frac{\partial \sigma_{yav}}{\partial \epsilon_y} = \frac{(1-\nu^2)(Eb_1\epsilon_x - a_3b_1 + a_1b_3)}{E(a_1b_2 - a_2b_1)(\epsilon_y - \nu\epsilon_x)^2} \cdot \sigma_{y\max}^u$$

Fig.10에는 縱橫比 및 荷重成分比 등의 變化에 따른 板이 非線形舉動을 나타내고 있다.

6. 結 言

이상에서는 2軸方向壓縮력을 받는 周邊單純

支持된 平板에 대한 挫屈前, 挫屈強度, 挫屈後 舉動, 最終強度 및 最終強度後 舉動의 解析解를 도출하고, 板의 縱橫比, 細長比 및 荷重成分比의 變化에 따른 시리즈해석을 수행하였다.

本 研究成果는 각종 數值解析 및 實驗結果에 대한 기준치로서 널리 사용될 수 있으리라 기대된다. 앞으로, 초기처짐과 잔류응력 등의 初期缺陷과 각종 境界條件 및 荷重條件의 영향도 고려한 解析解의 도출이 필요하다고 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] S.P.Timoshenko and A.Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", Second Edition, McGraw-Hill, 1981.
- [2] S.P.Timoshenko and J.M.Gere, "Theory of Elastic Stability", Second Edition, McGraw-Hill, 1963.
- [3] Von Karman, E.Sechler and L.Donnel, "The Strength of Thin Plates in Compression", ASME, APM-54-5, Vol.54, 1932.
- [4] D.Faulkner, "A Review of Effective Plating for Use in the Analysis of Stiffened Plating in Bending and Compression", J. of Ship Research, Vol. 19, No.1, 1975.
- [5] Y.Ueda, S.M.H.Rashed and J.K.Paik, "Effective Width of Rectangular Plates Subjected to Combined Loads", J. of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.159, 1986.
- [6] Y.Ueda, S.M.H.Rashed and J.K.Paik, "Buckling and Ultimate Strength Interactions of Plates and Stiffened Plates Under Combined Loads(1st Report) - In - Plane Biaxial and Shearing Forces -", J. of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.156, 1984.