

大韓造船學會論文集
 第28卷 第1號 1991年 4月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 28, No. 1, April 1991

탄성지반 위에 놓여있는 다지지 보의 동적해석

제 1 보 : 고유진동수

김용철*, 최교준**

Dynamic Analysis of the Multi-Span Beam on Elastic Foundation

Part one : Natural Frequencies

by

Y. C. Kim* and K. J. Choi**

요 약

본 연구에서는 병진 및 회전 스프링을 포함하는 탄성지반 위에 놓여 있는 다지지보의 동적 해석이 수행되었다. 특히 중간 지지점이 있는 경우에 대한 영향도 조사 하였다.

문제의 해석방법으로서 우선 기하학적 및 동적 경계조건을 동시에 만족하는 직교 다항식 함수를 구하였으며, Galerkin 방법을 이용하여 시스템의 고유진동수를 구하였다.

본 연구에서 제시한 방법으로 구한 고차 직교 다항식 함수를 사용하면 정확한 해를 얻을 수 있다는 것을 여러가지 경우에 대한 수치 계산 결과로부터 알 수 있었다.

Abstract

In this paper the dynamic analysis of the multi-span beam on elastic foundation, which include discrete translational and rotational springs, was performed. Furthermore, the effects of the intermediate supports were investigated. As a solution method, first the orthogonal polynomial functions which satisfy both the geometric and dynamic boundary conditions are obtained by imposing the orthogonality conditions. Then, the Galerkin's method is used to obtain the natural frequencies of the system. From numerical tests for various constraint and boundary conditions, it was found that the higher order orthogonal polynomial functions obtained by the present method can be used to get the accurate solutions.

발표 : 1990년도 대한조선학회 춘계연구발표회('90. 4. 15)

접수일자 : 1990년 6월 15일, 재접수일자 : 1990년 10월 24일

*정회원, 영남대학교 정밀기계공학과

**학생회원, 영남대학교 정밀기계공학과

사용기호

- K : 탄성지반의 강성계수
 K_b, K_r : 병진 및 회전스프링 상수
 K_0, K_L : $x=0, x=L$ 에서 회전 스프링 상수
 \underline{L} : 단위 길이당 Lagrangian
 L_0 : $x=0, x=L$ 에서 Lagrangian
 $\underline{T}, \underline{V}$: 단위 길이당 운동 및 위치 에너지
 ν : 보의 횡 변위
 x_b : 중간 지지점의 위치
 x_i, x_r : 병진 및 회전 스프링의 위치
 $\delta\nu$: 가상 변위
 δW_{nc} : 단위 길이당 비 보존 가상 일
 λ : 고유진동수 인자

$$\omega^{1/2} = \left[\frac{L^4 m}{EI} \omega^2 \right]^{1/4}$$

1. 서 론

간단한 기계 구조물로부터 교량, 자동차, 선박, 항공기에 이르기까지 보의 사용은 광범위하며, 그 역할은 매우 중요하다고 할 수 있다. 보를 해석하는 데는 일반적으로 복합 구조물 중에서 보 요소만을 선택하여 해석하는 경우도 있고, 철도, 교량과 같은 구조물은 중간지지점이 있고 탄성지반 위에 놓여 있는 보로 간주하여 문제를 해석할 수 있다. 이러한 구조물에 대한 동적 해석을 수행하는데 있어서 무엇보다도 중요한 일은 고유진동수를 정확히 추정하는 일이다. 지반 위에 놓여 있는 보에 대한 해석은 Winkler[1]가 지반을 베드스프링(Bed Spring)으로 간주하여 지반 위에서 반력은 각 위치에서 보의 처짐에 비례한다는 가정을 세웠다. M. Hetenyi[1]는 단순지지, 자유, 고정(Clamped) 등의 경계조건으로 이루어진 유한 보 및 무한보에 여러가지 하중이 작용하는 경우에 대하여 연구 결과를 정리하여 발표하였다. 초기에 학자들은 지반(Solid)을 지지 매개체(Supporting Medium)로 간주하였으나 그 후 다른 지지 매개체로 그 영역이 확대 되었다. 최근의 연구로는 Jacquot Gibson[2]이 보에 병

진 및 회전스프링과 질량을 부착하여서 보의 특성방정식으로부터 고유진동수와 모우드에 대한 선형방정식을 풀어서 해를 구하였고, Gurgoze[3]는 집중질량과 병진 및 회전스프링이 부착된 보의 고유진동수와 모우드를 변수분리법을 사용하여 구하였으며, Kim과 Dickinson[4]은 집중질량, 중간지지점 또는 축방향의 힘 등이 작용하는 보를 직교다항식을 이용하여 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석하였다. Bokaian[5]은 여러가지 경계조건의 조합으로 이루어진 보에서 축방향의 힘이 고유진동수와 모우드형에 미치는 영향을 연구하였다. Laura, Verniere De Irassar와 Ficcadenti[6], [7]은 양끝이 스프링힌지로 되어 있고 중간지지점과 집중질량을 갖는 보를 다항식 시도함수를 사용하여 근사해를 구하였고, 중간지지점을 병진스프링으로 대체하여 연구하였다. Ercoli와 Laura[9]는 병진스프링, 중간지지점, 탄성질량 또는 여러가지 경계조건의 조합으로 이루어지는 보의 고유진동수를 구하였다. 그러나 일부 발표된 논문[2], [9]등에서는 회전스프링이 보의 중간 부분에 부착되어 있는 경우에 대하여 운동방정식에 집중 모우멘트 항을 잘못 유도하여 사용한 경우가 있으며, 다항식 시도함수로 동적 경계조건을 만족하지 않는 다항식을 사용하였다[4].

본 논문에서는 단순지지, 스프링힌지, 고정(Clamped), 탄성지반, 다수의 병진 및 회전스프링 그리고 중간지지점의 조합으로 구성되어 있는 보에 대하여 우선 Hamilton 원리에 의하여 정확한 보의 특성방정식을 유도하고 모든 경계조건을 만족하는 직교다항식을 구한 후, Galerkin 방법을 사용하여 고유진동수를 구하였다. 또한 본 논문의 해석방법을 검증하기 위하여 구속조건 및 경계조건이 변하는 여러가지 경우에 대하여 기존문헌의 결과와 비교하였다.

2. 운동 방정식 및 경계조건

지반 위에 놓여 있는 보의 일반적인 운동 방정식을 유도하기 위하여 Fig.1과 같이 복합 경계조건을 갖고 있는 보를 생각하기로 한다. 여

기서 보는 세장형이고 회전관성효과 및 전단변형을 무시한다고 가정한다. 보의 양단은 스프링 힌지로 되어 있고, 보의 중간부분에 p개의 병진스프링, q개의 회전스프링 및 m개의 중간지지점(Intermediate Support)이 있으며 Winkler형태의 지반에 놓여 있는 보의 운동방정식은 Hamilton 원리를 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (\delta L + \delta W_{nc}) dx + \delta L_0 \right\} dt = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 - \frac{1}{2} EI v''^2 - \frac{1}{2} K v^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p K_{ti} \delta(x-x_{ti}) v^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q k_{rj} \delta(x-x_{rj}) v'^2 \quad (2)$$

$$L_0 = -\frac{1}{2} K_0 v^2 \Big|_{x=0} - \frac{1}{2} K_L v^2 \Big|_{x=L} \quad (3)$$

이고 δ 는 Dirac delta 함수이고, \cdot 는 t에 대한 미분과 '는 x에 대한 미분을 의미한다. 윗식을 전개하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L [-m\ddot{v} - EI v'''' - K v - \sum_{i=1}^p K_{ti} \delta(x-x_{ti}) v + \sum_{j=1}^q K_{rj} (\delta(x-x_{rj}) v)'] \delta v dx - EI v'' \delta v' \Big|_0^L + EI v'' \delta v \Big|_0^L - K_0 v \delta v \Big|_{x=0} - K_L v \delta v \Big|_{x=L} \right\} dt = 0 \quad (4)$$

식(4)로부터 다음과 같은 일반적인 보의 횡진동에 관한 운동방정식 및 경계조건을 구할 수 있다.

$$m\ddot{v} + EI v'''' + K v + \sum_{i=1}^p K_{ti} \delta(x-x_{ti}) v - \sum_{j=1}^q K_{rj} (\delta(x-x_{rj}) v)' = 0 \quad (5)$$

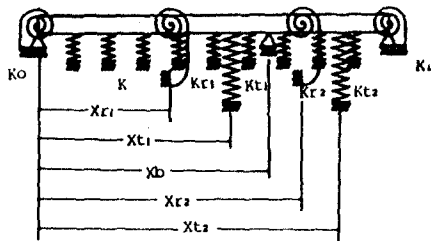


Fig.1 The restrained beam with an intermediate support

$$\begin{aligned} EI v'' - K_0 v' &= 0 & \text{at } x=0 \\ EI v'' + K_L v' &= 0 & \text{at } x=L \\ v &= 0 & \text{at } x=0, L \\ v &= 0 & \text{at } x=x_{bi} (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

3. 시도 함수를 구하는 법

Galerkin 방법을 사용하기 위하여 시도함수를 구하여야 하는데, 기존의 문헌에 발표된 방법[4]을 간단히 기술하면, 우선 경계조건을 만족하는 시도함수 $\Phi_1(x)$ 을 구한 후, 고차시도함수 $\Phi_2(x), \Phi_3(x), \dots$ 는 Gram-Schmidt 직교화과정을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\Phi_{k+1}(x) = \left(\frac{x}{L} - B_k \right) \Phi_k(x) - C_k \Phi_{k-1}(x)$$

$$(k=1, 2, \dots)$$

여기서,

$$B_k = \frac{1}{L} \int_0^L x \cdot m(x) \Phi_k^2(x) dx / \int_0^L m(x) \Phi_k^2(x) dx$$

$$C_k = \int_0^L m(x) \Phi_k^2(x) dx / \int_0^L m(x) \Phi_{k-1}^2(x) dx$$

$$\Phi_0 = 0$$

이다. 그러나, Bhat[10]는

$$C_k = \frac{1}{L} \int_0^L x \cdot m(x) \Phi_k(x) \Phi_{k-1}(x) dx / \int_0^L m(x) \Phi_{k-1}^2(x) dx$$

$$\int_0^L m(x) \Phi_{k-1}^2(x) dx$$

라 놓고 $\Phi_{k+1}(x)$ 를 구하였다. 이 방법은 C_k 의 형태는 다르지만 같은 결과를 나타낸다. 그러나 전자의 경우, C_k 의 분자와 B_k 의 분모는 같지만 후자는 다시 계산하여야 하는 단점이 있다. 이들 방법으로 구한 고차시도함수 $\Phi_2(x), \Phi_3(x), \dots$ 는 기하학적 경계조건만을 만족하고 동적 경계조건은 만족하지 않으므로 사용하기에 부적합하다.

따라서 본 논문에서는 다음과 같이 여러가지 경계조건에 대한 고차 시도함수를 경계조건과 직교조건을 이용하여 간단히 구하였다.

[경우 1] 고정-고점 보

이 경우에는 기하학적 경계조건만으로 이루어진 경우이다. 우선 $x^* = x/L, \Phi_k^*(x^*)/L, S_0$

$=K_0L/EI$, $S_L=K_L L/EI$ 를 무차원화 시키고 최저차 시도함수를 다항식으로 가정한다.

(1.1) 중간지지점이 없는 경우 ($x^*_b=0$)

$$\phi^*_{i_1}(x^*) = A_4x^{*4} + A_3x^{*3} + A_2x^{*2} + A_1x^{*1}$$

$$\phi^*_{i_1}(0) = \phi^*_{i_1}(1) = \phi^*_{i_1}'(0) = \phi^*_{i_1}'(1) = 0$$

따라서,

$$\phi^*_{i_1}(1) = A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}'(0) = A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}'(1) = 4A_4 + 3A_3 + 2A_2 + A_1 = 0$$

(1.2) 중간지지점이 있는 경우 ($0 < x^*_b < 1$)

$$\phi^*_{i_1}(x^*) = A_5x^{*5} + A_4x^{*4} + A_3x^{*3} + A_2x^{*2} + A_1x^{*1}$$

$$\phi^*_{i_1}(0) = \phi^*_{i_1}(x^*_b) = \phi^*_{i_1}(1) = \phi^*_{i_1}'(0)$$

$$= \phi^*_{i_1}'(1) = 0$$

따라서,

$$\phi^*_{i_1}(x^*_b) = A_5x^{*5}_b + A_4x^{*4}_b + A_3x^{*3}_b + A_2x^{*2}_b + A_1x^{*1}_b = 0$$

$$\phi^*_{i_1}(1) = A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}'(0) = A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}'(1) = 5A_5 + 4A_4 + 3A_3 + 2A_2 + A_1 = 0$$

위의 두 가지 경우에 대하여 $A_1=1$ 로 두고 연립방정식을 풀어 $\phi^*_{i_1}(x^*)$ 를 구한 후 다음과 같이 정규화(Normalize)시켜 $\phi^*_{i_1}(x^*)^*$ 를 구한다.

$$\phi^*_{i_1}(x^*) = \left\{ \int_0^1 \phi^{*2}_{i_1}(x^*) dx^* \right\}^{-1/2} \phi^*_{i_1}(x^*)$$

이를 이용하여 $\phi^*_{k+1}(x^*)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$)는 각 단계에서 정규화하여 아래의 식으로 부터 구할 수 있다.

$$\phi^*_{k+1}(x^*) = (x^* - B_k)\phi^*_k(x^*) - C_k^{1/2}\phi^*_{k-1}(x^*)$$

$$(k=1, 2, \dots, n-1)$$

여기서,

$$B_k = \int_0^1 x^* \phi^{*2}_k(x^*) dx^*$$

$$C_k = \int_0^1 \phi^{*2}_k(x^*) dx^*$$

$$\phi^*_{i_0}(x^*) = 0$$

[경우 2] 고정-스프링 한지 보

이 경우는 기하학적 경계조건 뿐만 아니라 동적 경계조건도 포함된 경우이다.

(2.1) 중간지지점이 없는 경우 ($x^*_b=0$)

$$\phi^*_{i_1}(x^*) = A_4x^{*4} + A_3x^{*3} + A_2x^{*2} + A_1x^{*1}$$

$$\phi^*_{i_1}(0) = \phi^*_{i_1}(1) = \phi^*_{i_1}'(0) = 0$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = -S_L \phi^*_{i_1}'(1)$$

따라서,

$$\phi^*_{i_1}(1) = A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}'(0) = A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = 12A_4 + 6A_3 + 2A_2$$

$$= -S_L(4A_4 + 3A_3 + 2A_2 + A_1) = -S_L \phi^*_{i_1}'(1)$$

(2.2) 중간지지점이 있는 경우 ($0 < x^*_b < 1$)

$$\phi^*_{i_1}(x^*) = A_5x^{*5} + A_4x^{*4} + A_3x^{*3} + A_2x^{*2} + A_1x^{*1}$$

$$\phi^*_{i_1}(0) = \phi^*_{i_1}(x^*_b) = \phi^*_{i_1}(1) = \phi^*_{i_1}'(0) = 0$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = -S_L \phi^*_{i_1}'(1)$$

따라서,

$$\phi^*_{i_1}(x^*_b) = A_5x^{*5}_b + A_4x^{*4}_b + A_3x^{*3}_b + A_2x^{*2}_b + A_1x^{*1}_b = 0$$

$$\phi^*_{i_1}(1) = A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}'(0) = A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = 20A_5 + 12A_4 + 6A_3 + 2A_2$$

$$- S_L(5A_5 + 4A_4 + 3A_3 + 2A_2 + A_1)$$

$$= -S_L \phi^*_{i_1}'(1)$$

[경우 3] 스프링 한지-스프링 한지 보

(3.1) 중간지지점이 없는 경우 ($x^*_b=0$)

$$\phi^*_{i_1}(x^*) = A_4x^{*4} + A_3x^{*3} + A_2x^{*2} + A_1x^{*1}$$

$$\phi^*_{i_1}(0) = \phi^*_{i_1}(1) = 0$$

$$\phi^*_{i_1}''(0) = S_0 \phi^*_{i_1}'(0)$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = -S_L \phi^*_{i_1}'(1)$$

따라서,

$$\phi^*_{i_1}(1) = A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}''(0) = 2A_2 = S_0 \quad A_1 = S_0 \quad \phi^*_{i_1}'(0)$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = 12A_4 + 6A_3 + 2A_2$$

$$= -S_L(4A_4 + 3A_3 + 2A_2 + A_1) = -S_L \phi^*_{i_1}'(1)$$

(3.2) 중간지지점이 있는 경우 ($0 < x^*_b < 1$)

$$\phi^*_{i_1}(x^*) = A_5x^{*5} + A_4x^{*4} + A_3x^{*3} + A_2x^{*2} + A_1x^{*1}$$

$$\phi^*_{i_1}(0) = \phi^*_{i_1}(x^*_b) = \phi^*_{i_1}(1) = 0$$

$$\phi^*_{i_1}''(0) = S_0 \phi^*_{i_1}'(0)$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = -S_L \phi^*_{i_1}'(1)$$

따라서,

$$\phi^*_{i_1}(x^*_b) = A_5x^{*5}_b + A_4x^{*4}_b + A_3x^{*3}_b + A_2x^{*2}_b + A_1x^{*1}_b = 0$$

$$\phi^*_{i_1}(1) = A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = 0$$

$$\phi^*_{i_1}'(0) = 2A_2 = S_0 \quad A_1 = S_0 \phi^*_{i_1}'(0)$$

$$\phi^*_{i_1}''(1) = 20A_5 + 12A_4 + 6A_3 + 2A_2$$

$$-S_L(5A_5+4A_4+3A_3+2A_2+A_1) = -S_L\phi^*{}'_1(1)$$

위의 각 경우들에 대하여 적당한 값([경우 2] A_2 , [경우 3] A_1)을 1로 두고 연립방정식을 풀어서 $\phi^*{}_1(x^*)$ 를 구한 후 이를 정규화하여 $\phi^*{}_n(x^*)$ 를 구한다. 고차 시도함수 $\phi^*{}_n(x^*)$ 는 다음과 같이 가정한다.

$$\phi^*{}_n(x^*) = A_{n,n+4}x^{*n+4} + A_{n,n+3}x^{*n+3} + \dots + A_{n,2}x^{*2} + A_{n,1}x^{*1}$$

각 계수는 경계조건 외에 다음과 같은 직교조건을 부가하여 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \phi^*{}_i(x^*)\phi^*{}_n(x^*) dx^* = 0 (i=1, 2, \dots, n-1)$$

여기서, 중간지지점이 없는 경우는 $A_{n,n+4}$ 는 영이 된다.

[경우 4] 양단이 스프링 힌지로 되어 있는 다지지보(중간지지점이 m 개)

$$\phi^*{}_1(x^*) = A_{m+4}x^{*m+4} + A_{m+3}x^{*m+3} + \dots + A_2x^{*2} + A_1x^{*1}$$

$$\phi^*{}_1(0) = \phi^*{}_1(1) = 0$$

$$\phi^*{}_1(x^*_{bi}) = 0 (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\phi^*{}_1''(0) = S_0\phi^*{}_1'(0)$$

$$\phi^*{}_1''(1) = -S_L\phi^*{}_1'(1)$$

따라서,

$$A_{m+4} + A_{m+3} + \dots + A_2 + A_1 = 0$$

$$A_{m+4}x^{*_{bi}m+4} + A_{m+3}x^{*_{bi}m+3} + \dots + A_2x^{*_{bi}2} + A_1x^{*_{bi}} = 0 (i=1, 2, \dots, m)$$

$$2A_2 = S_0 A_1$$

$$(m+4)(m+3)A_{m+4} + (m+3)(m+2)A_{m+3} + \dots + 6A_3 + 2A_2 =$$

$$-S_L[(m+4)A_{m+4} + (m+3)A_{m+3} + \dots + 2A_2 + A_1]$$

윗 식으로부터 $\phi^*{}_1(x^*)$ 를 구할 수 있으며, 고차 시도함수 $\phi^*{}_n(x^*)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi^*{}_n(x^*) = A_{n,n+m+3}x^{*n+m+3} + A_{n,n+m+2}x^{*n+m+2} + \dots + A_{n,2}x^{*2} + A_{n,1}x^{*1}$$

각 계수는 경계조건 외에 다음과 같은 직교조건을 부가하여 구할 수 있다.

$$\int_0^1 \phi^*{}_i(x^*)\phi^*{}_j(x^*) dx^* = C_i\delta_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$$

위의 방법으로 구한 각 경우의 고차 시도함

수는 기하학적 경계조건 외에 동적경계조건을 만족한다.

4. 해석방법

고유진동수와 고유진동형을 구하기 위하여 운동방정식을 무차원화 시키면 다음과 같다.

$$\frac{L^4m}{EI} \nu^{*iv} + \frac{L^4K}{EI} \nu^{*iv} + \sum_{i=1}^p \frac{L^3K_{ui}}{EI} \delta(x^* - x_{ui}^*)\nu^{*iv} - \sum_{j=1}^q \frac{LK_{rj}}{EI} (\delta^*(x^* - X_{rj}^*)\nu^{*iv})' = 0 \quad (7)$$

여기서, $\nu^* = \nu/L$, $\delta^* = \delta \times L$ 이다.(이하 무차원을 의미하는 기호 * 생략)

$\nu(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t}$ 로 두고 식(7)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\mathcal{Q}^2\phi + \phi^{iv} + S\phi + \sum_{i=1}^p S_{ui}\delta(x-x_{ui})\phi - \sum_{j=1}^q S_{rj}(\delta(x-x_{rj})\phi)' = 0 \quad (8)$$

여기서,

$$\mathcal{Q}^2 = \frac{L^4m}{EI} \omega^2, S = \frac{L^4K}{EI}, S_{ui} = \frac{L^3K_{ui}}{EI}$$

$$S_{rj} = \frac{LK_{rj}}{EI} \text{ 이다.}$$

해를 앞서 구한 시도함수를 이용하여 다음과 같이 전개하면,

$$\phi^n = \sum_{k=1}^n D_k\phi_k(x)$$

로 나타낼 수 있고, 이 식을 식(8)에 대입하면, 오차함수는 다음과 같다.

$$R(\phi^n, x) = -\mathcal{Q}^2\phi^n + (\phi^n)^{iv} + S\phi^n + \sum_{i=1}^p S_{ui}\delta(x-x_{ui})\phi^n - \sum_{j=1}^q x_{rj}(\delta(x-x_{rj})\phi^n)'$$

$$(x-x_{rj})\phi^n - \sum_{j=1}^q x_{rj}(\delta(x-x_{rj})\phi^n)'$$

Galerkin방법을 이용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(\phi_m, R) = \int_0^1 \phi_m R dx = -D_m\mathcal{Q}^2 + \sum_{k=1}^n D_k F_{km} = 0$$

$$(m=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

여기서,

$$F_{km} = \delta_{km} S - \phi_k''\phi_m' \Big|_0^1 + \Big|_0^1 \phi_k'\phi_m'' dx$$

$$+ \sum_{j=1}^p S_{ij} \phi_K \phi_m |_{x=x_{ij}} + \sum_{j=1}^q S_{rj} \phi_K' \phi_m' |_{x=x_{rj}}$$

이다. 식(9)로부터 $[F] \{D\} = Q^2 \{D\}$ 인 고유치 문제를 얻을 수 있으며 고유진동수 및 고유진동형을 수치계산을 통하여 쉽게 구할 수 있다.

5. 수치 해석 결과 및 고찰

우선 시도함수의 정확도를 검증하기 위하여 다음과 같은 해석을 수행하였다. Fig.2는 단순 지지보에서 중간지지점의 위치 x_b 가 0.3일 경우에 대하여 기하학적 경계조건만을 만족하는 고차 시도함수(참고문헌(4))와 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 시도함수의 두번째 모우드와 세번째 모우드를 나타낸다. 두 모우드는 보의 후반부에서 차이가 나는 것을 알 수 있다. Fig.3은 동적 경계조건이 있는 단순지지보에서

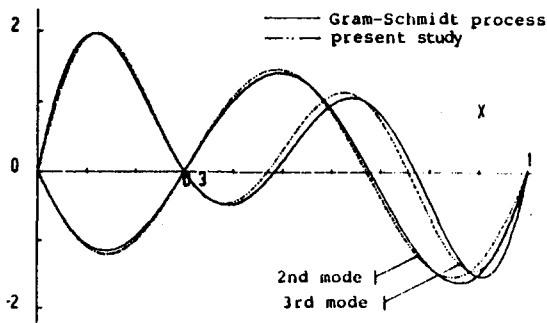


Fig.2 The higher order trial functions

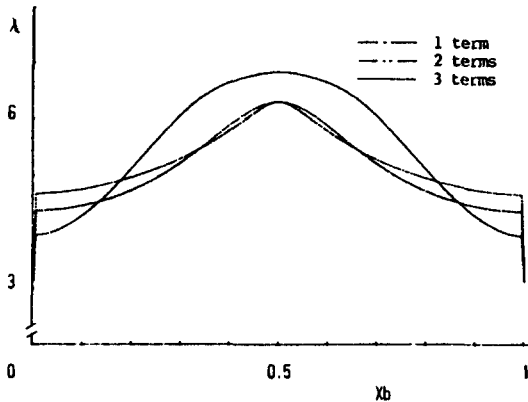


Fig.3 The natural frequency parameters of the system

중간지지점의 위치에 대하여 Gram-Schmidt 직교화 과정을 이용하여 구한 시도함수를 사용하여서 고유진동수 인자 λ 값을 구한 것이다. 고차시도함수가 동적 경계조건을 만족하지 않으므로 시스템 행렬이 비대칭이고, 따라서 모우드 수를 증가하여 계산하여도 포함원리(Inclusion Principle)가 성립하지 않는 것을 보여준다. Fig.4는 Fig.3의 경우에 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 시도함수를 이용하여서 고유진동수 인자 λ 값을 구한 것이다. 고차 시도함수가 동적 경계조건을 만족하므로 모우드 수를 증가하면 포함원리가 성립하는 것을 알 수 있다. 중간지지점이 약 0.2에서 0.8사이에 위치하는 경우에는 한개의 모우드를 사용하여

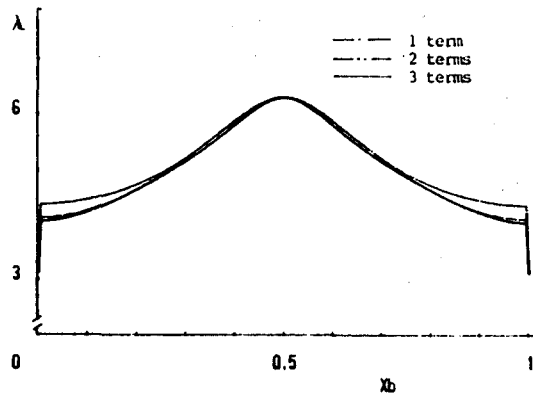


Fig.4 The natural frequency parameters of the system

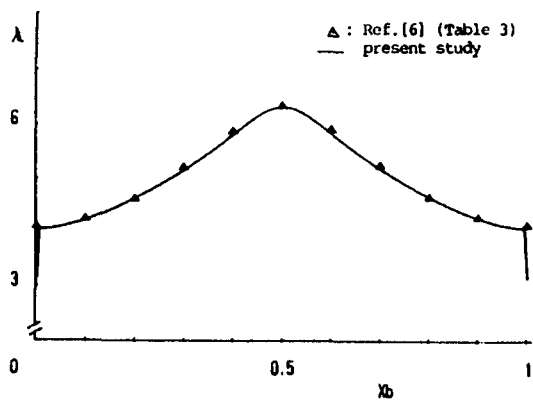


Fig.5 The natural frequency parameters of the spring-hinged beam

서 계산하여도 대단히 정확한 값을 얻을 수 있다. 중간지지점이 양끝으로 위치할수록 모우드의 형상이 급격히 변하므로 고차 모우드를 사용하여야 한다. Fig.5는 스프링지지-단순지지보에서, $S_0=0.2$ 인 경우 중간지지점의 위치 x_0 의 변화에 대한 λ 값을 나타낸다. 양 경계점에서 x_0 가 조금 떨어져 있을 경우에는 고정(Clamped)된 효과를 나타내므로 λ 값에 점프가 일어나는 것을 알 수 있다. 참고문헌[6]는 그 구간에서 점프 현상을 나타내지 않고 나머지 구간에서는 본 논문의 결과와 거의 일치한다. Fig.6은 양단이 고정된 보에서 병진스프링의 위치 x_{11} 과 상수 S_{11} 의 변화 그리고 모우드 수

의 증가에 대한 λ 값으로서, $S_{11}=500$ 인 경우는 모우드 수를 세개로 증가하여 계산하여도 낮아지는 폭이 적고 $S_{11}=5000$ 인 경우는 모우드 수를 세개로 증가하여서 계산하면 낮아지는 폭이 크지만, 병진스프링을 중간지지점으로 대치한 경우보다 높은 λ 값이 존재하는 x_{11} 의 범위가 있다. 그러나 이는 모우드 수를 더 증가하면 해결된다는 것을 예측할 수 있다. Fig.7은 단순지지보에서 병진스프링 상수 $S_{11}=50, 100, 1000$ 에 대하여 위치 x_{11} 의 변화에 대한 λ 값을 나타내며, 스프링의 위치가 중앙부로 갈수록 λ 가 커지며, 참고문헌[7], [9]와 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

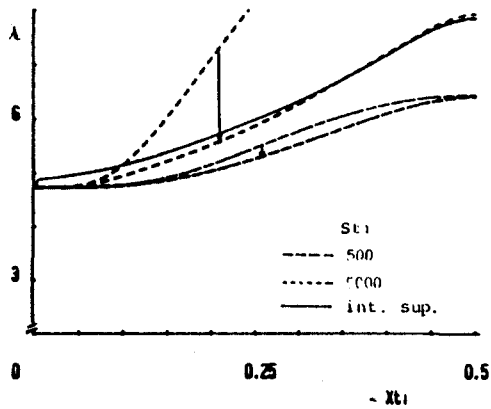


Fig.6 The natural frequency parameters of the clamped beam

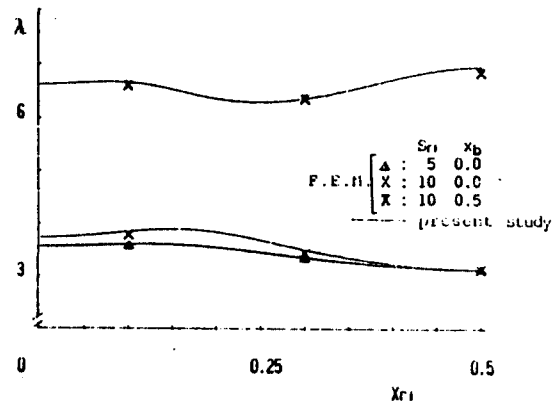


Fig.8 The natural frequency parameters (rotational spring)

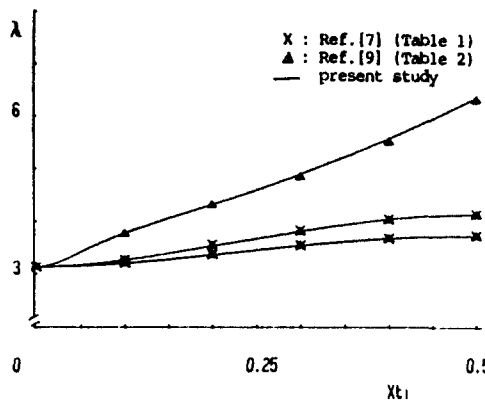


Fig.7 The natural frequency parameters (translational spring)

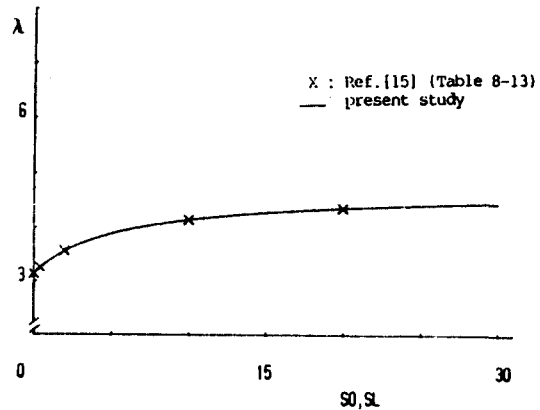


Fig.9 The natural frequency parameters of the spring-hinged beam

Fig.8은 단순지지보에서 회전스프링의 위치 x_1 과 스프링 상수 S_1 그리고 $x_b=0.5$ 에서 중간 지지점의 유무에 대한 λ 값을 나타내며 표시 (Δ , \times)는 유한요소법으로 구한 값이다. 유한요소법으로 구한 결과와 본 논문에서 계산한 결과가 거의 일치하는 것은 회전스프링이 보의 중간 부분에 부착되어 있는 경우 본 논문에서 유도한 항이 정확하다는 것을 보여준다. Fig.9는 단순지지보에서 회전스프링이 보의 양 경계에서 $S_0=S_L$ 로서 같은 값으로 변화할 때 λ 값을 나타낸다.

6. 결 론

이상과 같은 수치 해석 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 고차 시도함수를 구하는데 있어서 본 논문에서 제시한 방법을 사용하면 기하학적 경계 조건 뿐만 아니라 동적 경계조건도 만족하는 고차 시도함수를 구할 수 있기 때문에 해의 정확도가 높아진다.
2. 회전스프링이 부착된 경우에는 운동방정식에 집중 모멘트항을 본 논문에서 유도된 항을 사용하여야 한다.
3. 중간지지점이 양단으로부터 조금 떨어져 있는 경우에는 고정된 효과를 나타내므로 고유진동수 값에 점프가 일어난다. 이러한 경우에는 모우드 수를 증가하여 계산하여야 정확한 결과를 얻을 수 있다.
4. 본 논문의 방법을 사용하여 탄성지반 및 중간지지점이 있는 보에 대한 해석을 효과적으로 수행할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] M. Hetenyi "Beams on Elastic Foundation", The University of Michigan Press, 1974.
- [2] R. G. Jacquot and J. D. Gibson, "The Effects of Discrete Masses and Elastic Supports on Continuous Beam Natural Frequencies", Journal of Sound and Vibration, 23, pp.237-244, 1972.
- [3] M. Gurgoze, "A Note on the Vibrations of Restrained Beams and Rods with Point Masses", Journal of Sound and Vibration, 96, pp.461-468, 1984.
- [4] C. S. Kim and S. M. Dickinson, "On the Analysis of Laterally Vibrating Slender Beams Subject to Various Complicating Effects", Journal of Sound and Vibration, 122, pp.441-455, 1988.
- [5] A. Bokaian, "Natural Frequencies of Beams under Compressive Axial Loads", Journal of Sound and Vibration, 126, pp. 49-65, 1988.
- [6] P. A. A. Laura, P. Verniere De Irassar and G. M. Ficcadenti, "A Note on Transverse Vibrations of Continuous Beams Subject to an Axial Force and Carrying Concentrated Masses" Journal of Sound and Vibration, 86, pp.279-284, 1983.
- [7] P. L. Verniere De Irassar, G. M. Ficcadenti and P. A. A. Laura, "Dynamic Analysis of a Beam with an Intermediate Elastic Support", Journal of Sound and Vibration, 96, pp.381-389, 1984.
- [8] M. Sasaki and S. Chonan, "Parametric Instability of Elastically Supported Multi-span Beams", Journal of Sound and Vibration, 109, pp.181-191, 1986.
- [9] L. Ercoli and P. A. A. Laura, "Analytical and Experimental Investigation on Continuous Beams Carrying Elastically Mounted Masses", Journal of Sound and Vibration, 114, pp.519-533, 1987.
- [10] R. B. Bhat, "Transverse Vibrations of a Rotating uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", Journal of Sound and Vibration, 105, pp.199-210,

- 1986.
- [11] Meirovitch. L., "Computational Methods in Structural Dynamics", Sijthoff & Noordhoff International Publishers, The Netherlands, 1980.
- [12] Meirovitch, L., "Method of Analytical Dynamics", McGraw-Hill Book Co, New York, 1970.
- [13] Charle W. Bert, "Use of Symmetry in Applying the Rayleigh-Schmidt Method or Static and Free - Vibration Problem", Journal of the Industrial Mathematics Society, 34, pp.65~67, 1984.
- [14] J. Clastrorink and M. Eisenberger, "Vibration and Buckling of a Beam on a Variable Winkler Elastic Foundation", Journal of Sound and Vibration, 115, pp.233~241, 1987.
- [15] R. B. Blevins, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", New York; Van Nostrand Reinhold Co, 1979.