

大韓造船學會論文集
 第28卷 第1號 1991年 4月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 28, No. 1, April 1991

췘기에 의한 비선형파의 마하반사

최항순*, 지원식**

Mach Reflection of Sinusoidally-Modulated Nonlinear Stokes Waves by a Thin Wedge

by

Hang S. Choi* and Won S. Chee**

要 約

본 논문에서는 포텐셜유동이란 가정하에 정현변조하는 비선형 입사파가 췘기에 의하여 산란하는 문제를 마하반사의 관점에서 다척도전개기법을 이용하여 해석하였다. 산란파의 진폭전개는 선형항을 포함한 3차 Schrödinger 방정식으로 기술할 수 있음을 밝혔다. 즉, 비선형성을 나타내는 3차항과 분산성을 표시하는 선형항이 진폭전개의 복원력으로 작용함을 규명하였다. 췘기의 반각이 17.55°와 24.09°인 2가지 모형에 대하여 입사파의 기울기와 변조비를 바꾸어 가며 계산을 수행하였다. 수치계산에서 얻어진 stem파의 진폭비와 폭은 실험에서 관측된 현상을 잘 반영하고 있으나, stem파는 입사파의 기울기가 매우 큰 경우에만 나타났다. 또한 분산성의 영향은 매우 미약하여 정현변조의 경우에는 비선형성이 지배적이란 결론에 도달하였다.

Abstract

By employing multiple-scale expansion techniques, the diffraction of sinusoidally-modulated nonlinear Stokes waves by a stationary thin wedge has been studied within the framework of potential theory. It is found that the evolution of diffracted waves can be described by the Zakharov equation to the leading order and it can be replaced by the cubic Schrödinger equation with an additional linear term for stable modulations. Computations are made for the cubic Schrödinger equation with different values of nonlinear and dispersion parameters. Numerical results well reflect the experimental findings in the amplitude and width of generated stem waves. It is numerically confirmed that the nonlinearity dominates the wave field, while the dispersion hardly affects the wave evolution, and stem waves are likely to be formed for steep incident waves in the case of stable sinusoidal modulations.

접수일자 : 1990년 7월 12일, 재접수일자 : 1991년 3월 7일

*정회원, 서울대학교 조선공학과

**학생회원, 서울대학교 조선공학과

1. 서 론

천수역 고립파가 45°보다 작은 각으로 수직 벽에 입사하면 반사파는 물론 파정선 (crestline)이 벽에 수직인 stem파라는 제3의 파가 발생하며, 이들의 교차점은 벽에서 일정 거리 떨어진 곳에 위치한다. 특히 입사각이 20°보다 작으면 반사파는 나타나지 않고 stem파만 존재하게 된다. 이와같은 Perroud(1957)와 Chen(1961)의 실험결과를 분석한 Wiegel(1964)은 이 현상이 공기역학에서 잘 알려져 있는 충격파의 반사현상과 기하학적으로 매우 유사하다는 점에 근거하여 이를 마하반사 (Mach reflection)라 불렀다. 또한 Nielsen(1962)과 Berger & Kohlhasse(1976)는 실험을 통하여 이러한 현상이 유한수심에서도 나타남을 밝혔다.

지금까지 실험에서 확인된 stem파의 특성은 다음과 같이 요약할 수 있다. stem파의 파고는 발생한 다음 일정 구간까지 증가하다가 점차 감소하며, 그 크기는 입사각이 클수록 그리고 입사파의 파고가 작을수록 상대적으로 증가한다. 발생한 stem파의 영역은 벽을 따라 점차 넓어지는 데, 입사각이 작을수록, 수심이 얕을수록 그리고 입사파의 파고가 클수록 그 영역이 상대적으로 커진다.

Miles(1977)는 천수역 고립파의 마하반사에 대한 이론을 전개하였고, Yue & Mei(1980)는 무한수심에 놓인 쇄기에 입사한 비선형 균일 Stokes파(nonlinear uniform Stokes wave)의 산란문제를 해석하였다. 이들의 해석 결과를 자세히 살펴보면 이 문제의 특성으로 입사파의 비선형성은 물론 파장에 비하여 물체의 길이가 매우 길다는 사실을 발견하게 된다. 이와같은 척도의 거리를 진행하는 비선형 Stokes파는 매우 불안정하여 조그마한 교란이 가하여져도 파는 쉽사리 불안정한 상태에 이른다(Benjamin & Feir, 1967). 본 논문에서는 이 점에 착안하여 안정성에 대한 연구의 첫 걸음으로 진폭이 시간에 따라 서서히 변조하는 비선형 Stokes파가 얇은 쇄기에 입사하여 산란하는 문제를 마

하반사의 관점에서 취급하고자 한다. 본 연구는 앞으로 수행할 예정인 산란파의 안정성에 대한 연구의 기반을 마련할 것으로 기대된다.

2. 문제의 정식화

Fig.1에 도시한 바와 같이 무한수심에 놓인 길이가 2L, 폭이 2B인 물체에 진폭이 특성진동수 Ω 로 변조하는 진동수 ω , 파수 k인 비선형파가 입사하는 경우를 생각하자. 포텐셜유동이란 가정하에 속도포텐셜 $\Phi(x, y, z, t)$ 을 도입하면 이 문제는 직교좌표계에서 다음과 같이 표시된다.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad -\infty < z < \zeta, \tag{1}$$

$$\Phi_z = \zeta_t + \zeta_x \Phi_x + \zeta_y \Phi_y, \quad z = \zeta, \tag{2}$$

$$\Phi_t + 1/2 |\nabla \Phi|^2 + gz = 0 \quad z = \zeta, \tag{3}$$

$$\Phi_n = 0 \quad y = \pm y_B(x), \tag{4}$$

$$\Phi_z \rightarrow 0 \quad z \rightarrow -\infty, \tag{5}$$

$$\Phi = \Phi' \quad x < 0, \tag{6}$$

여기서 g는 중력가속도를, $\zeta(x, y, t)$ 는 자유표면을, \vec{n} 은 유체영역 밖으로 향한 물체표면($y = \pm y_B$)에서의 단위법선벡터를 그리고 Φ' 는 입사파포텐셜을 뜻한다.

이와같은 초기-경계치문제는 복잡한 비선형성을 지니고 있으므로 해를 구하기가 어려울 뿐 아니라 우리가 추구하는 현상의 규명을 흐리게 할 우려가 있으므로 본 논문에서는 문제의 본질을 잃지 않는 범위에서 여러가지 가정을 도입하여 문제를 단순화시키고자 한다.

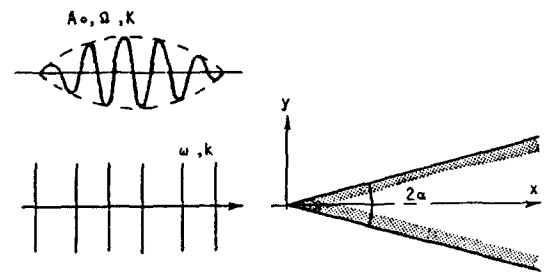


Fig.1 Definition Sketch

3. 입사파 및 물체에 대한 가정

우선 물체의 형상을 $B/L = \epsilon = O(1)$ 인 얇은 썰기로 가정하여, 산란파는 입사파의 진행방향으로만 전파한다는 방사조건(식 6)을 도입한다. 입사파의 기울기는 썰기의 폭-길이 비 정도의 작은 양으로 가정한다.

$$kA_0 = \epsilon \delta \quad \delta = O(1). \quad (7)$$

여기서 A_0 는 입사파진폭의 특성치를 의미한다.

또한 입사파 진폭의 변조를 나타내는 특성진동수(Ω)와 파수(K)도 입사파의 진동수와 파수에 비하여 파기울기와 같은 크기의 작은 값을 갖는다고 가정한다.

$$\Omega/2\omega = \epsilon \nu, \quad \nu = O(1); \quad K/2k = \epsilon \mu, \quad \mu = O(1). \quad (8)$$

무한수심을 진행하는 Stokes파의 진폭에 대한 비선형성은 다음과 같은 진폭분산으로 대변된다.

$$\omega^2 = gk[1 + (kA_0)^2]. \quad (9)$$

따라서 이러한 비선형 효과가 나타나는 물체의 길이는 $O(k^{-3}A_0^{-2})$ 의 척도를 지녀야 하므로 본 논문에서는 썰기의 길이와 폭이 입사파의 파장에 대하여 아래와 같은 경우를 취급한다.

$$kL = O(\epsilon^{-2}), \quad kB = O(\epsilon^{-1}). \quad (10)$$

이와같은 가정에서 해석한 결과는 얇은배(thin ship)에 적용할 수 있을 것이다. 왜냐하면 산란파는 입사파의 진행방향으로만 전파한다는 포물형근사(parabolic approximation)에 따라 얇은배의 선수부에 발생하는 산란에 적용할 수 있으며, 무한수심의 경우이므로 유동은 수심에 따라 $\exp(kz)$ 로 감소하며, 얇은배의 정의에 따라 홀수(D)는 $kD = O(\epsilon^{-2})$ 의 크기로 표시되므로 수직벽이라 가정하여 수면에서의 유동만을 고찰하여도 충분하기 때문이다.

4. 산란파 진폭의 전개방정식

비선형 자유표면파 문제의 해석에 다척도전개기법(multiple-scale expansion)은 inverse scattering방법과 함께 매우 유용하게 적용되어 왔다(Mei, 1983). 이 문제에는 위에 열거한 바

와 같이 여러가지 서로 다른 척도를 지닌 길이와 시간이 포함되어 있으므로 다척도전개기법을 사용하는 것이 합리적이다. 즉, 입사파의 전파에 관한 변수(x, t), 진폭의 변조에 관한 변수(k^{-1}, Ω^{-1}) 그리고 비선형 진폭분산이 나타나는 물체의 길이(L) 등은 서로 다른 척도를 지니고 있는데, 이들의 상대적 크기는 각각 $O(1), O(\epsilon^{-1}), O(\epsilon^{-2})$ 으로 표시되어 이 문제에는 3가지 척도의 물리량이 함께 존재하게 된다. 이를 적절히 표시하기 위하여 다음과 같은 장척도 변수를 도입하기로 한다.

$$x_1 = \epsilon x, \quad x_2 = \epsilon^2 x, \quad y_1 = \epsilon y, \quad t_1 = \epsilon t. \quad (11)$$

이제 속도포텐셜과 자유수면식을 ϵ 에 대하여 점근전개한 다음 이를 다시 시간 t 에 대하여 Fourier급수 전개시킨다.

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \epsilon^n e^{im\varphi} e^{kz} \phi_{nm}(x_1, x_2, y_1, t_1). \quad (12)$$

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \epsilon^n e^{im\varphi} \eta_{nm}(x_1, x_2, y_1, t_1). \quad (13)$$

여기서 $\varphi(=kx - \omega t)$ 는 입사파의 위상함수이며, 이들은 실수함수이므로 $\phi_{n-m} = \phi_{nm}^*$, $\eta_{n-m} = \eta_{nm}^*$ (*는 공액복소수)인 관계가 성립한다.

전개과정과 해법 및 일반해는 Yuen & Lake (1982)와 Mei(1983, pp.607~618)에 자세히 설명되어 있으므로 여기서는 지리한 유도과정을 생략하고 본 논문에 필요한 결과만을 인용하기로 한다. 우선 입사파포텐셜을 위에서 논의한 변조(식 8)와 진폭분산(식 9)을 고려하여 다음과 같이 기술할 수 있으며

$$\Phi^I(x, z, t) = (-ig/\omega) \exp(kz + i\varphi) A(x_1, x_2, t_1), \quad (14)$$

정현변조일 경우 진폭함수는 다음과 같다.

$$A = A_0 \exp i(Kx - \Omega t - k^3 A_0^2 x) = A_0 \exp i(2\mu k x_1 - 2\nu \omega t_1 - \delta^2 k x_2). \quad (15)$$

여기서는 물론 앞으로도 복소수로 표시된 모든 표현식은 실수부만을 택하여야 한다. Stokes파에 대한 2차이론의 결과인 입사파 포락선(envelope) 방정식

$$\partial A / \partial t_1 + Cg \partial A / \partial x_1 = 0 \quad (Cg = \text{군속도}) \quad (16)$$

을 적용하면 $2\nu=\mu$ 인 관계식을 얻는다. 한편 물체표면을 장척도변수로 표시하고

$$y_B = kB Y_B(x_2), \quad (17)$$

앞에서 설명한 바와 같이 $kB=\epsilon^{-1}$ (식 10 참조)라 하면, 물체표면 경계조건 식(4)는

$$\partial\Phi/\partial y_1 = [(\partial/\partial x + \epsilon^2 \partial/\partial x_2)\Phi] \partial Y_B/\partial x_2 \quad (18)$$

와 같이 변형된다. 식(12)와 (14)로부터 선형해는

$$\Phi = (-ig/\omega) \exp(kz + i\varphi) A(x_1, x_2, y_1, t_1) \quad (19)$$

와 같은 형태가 됨을 알 수 있으므로 이를 식(18)에 대입하고 최저차항만을 취하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\partial A/\partial y_1 = ikA \partial Y_B/\partial x_2 \quad y_1 = Y_B(x_2). \quad (20)$$

한편 무한수심에서는 일반적으로 자연조류나 Stokes표류등 유기조류가 그다지 크지 않아 문제되지 않으므로 조류를 무시하여도 무방하다. 따라서 파진폭의 전개 방정식(equation of amplitude evolution)은 다음과 같다(Mei, p.617).

$$Cg \partial A/\partial x_2 + i\omega/8k^2 (\partial^2 A/\partial x_1^2 - 2\partial^2 A/\partial y_1^2) + (i/2)\omega k^2 |A|^2 A = 0. \quad (21)$$

이 결과는 Zakharov(1968)가 처음 유도하였다. 이제 무차원 변수를 아래와 같이 정의하여 $\bar{A} = A/A_0, X_1 = kx_1, X_2 = kx_2, Y = ky_1, T = \omega t_1$ (22) 식 (21)에 대입하면 윗식은 다음과 같이 변형된다.

$$\partial \bar{A}/\partial X_2 + (i/4)(\partial^2 \bar{A}/\partial X_1^2 - 2\partial^2 \bar{A}/\partial Y^2) + i\delta^2 |\bar{A}|^2 \bar{A} = 0. \quad (23)$$

만약 변조하는 입사파가 안정되어 산란파도 안정된 정현변조하는 경우에 진폭함수는

$$A(x_1, x_2, y_1, t_1) = \bar{A}(x_2, y_1) \exp i(2\mu k x_1 - \mu \omega t_1) \quad (24)$$

로 표시할 수 있으므로 이를 식(23)에 대입하고 $\bar{A} = \bar{A}/A_0$ 라 새로이 정의하면 3차 Schrödinger 방정식을 얻게 된다.

$$\partial \bar{A}/\partial X_2 - (i/2)\partial^2 \bar{A}/\partial Y^2 + i(-\mu^2 + \delta^2 |\bar{A}|^2) \bar{A} = 0. \quad (25)$$

윗식의 마지막항은 입사파의 분산성(μ)과 비선형성(δ)을 함께 포함하고 있다. 서론에서 이미 예견할 수 있었던 바와 같이 입사파가 균일

정현파인 경우에는 $\mu=0$ 이 되어 식(25)는 비선형만을 고려한 Yue & Mei의 결과와 일치한다. 또한 윗식의 마지막항은 비선형 스프링을 갖는 2자유도 진자문제에 대한 Duffing방정식의 관점에서 해석할 수도 있다. 즉, 진폭이 작으면 선형항인 분산의 영향으로 진폭이 증가하지만 일단 진폭이 커지면 비선형항의 영향이 지배적이어서 진폭의 증가를 억제하게 된다 (Thompson and Stewart, 1986).

5. 수치계산 및 토론

Benjamin & Feir(1976)의 해석에 근거하여 Longuet-Higgins(1978)는 수치계산을 수행하여 무한수심을 진행하는 Stokes파의 안정성에 대한 $kA_0(=\epsilon\delta)$ 와 $K/2k(=\epsilon\mu)$ 의 정확한 관계를 제시하였다. 수치결과에 따르면 이론과는 달리 $\epsilon\delta - \epsilon\mu$ 평면상에서 쉘파모양을 띤 일정한 불안정 영역이 존재하며 불안정의 초기 기울기는 이론치와 같은 $\mu=2^{1/2}\delta$ 이나, $\epsilon\delta=0.41$ 에서는 μ 에 관계없이 Stokes파는 매우 불안정하다. 그러나 여기서는 서론에서 밝힌 바와 같이 안정된 정현변조의 경우만을 취급하며 불안정성에 대한 문제는 다른 기회에 발표하기로 한다.

따라서 우리의 관심은 쉘기 수선의 기울기가 20° 보다 작을때와 조금 클때, 그리고 파의 비선형성과 분산성의 상대적 중요도에 따라 산란파가 어떻게 변하는지에 모여진다. 진폭전개식은 비선형 방정식으로 해석해를 구할 수 없으므로 결국 수치해법을 이용하여야 한다. 본 논문에서 택한 정현변조는 파의 진행을 매우 안정하게 만들므로 산란파 역시 정현변조한다고 가정하여 계산을 수행하였다. Schrödinger방정식에 성공적으로 적용되어 온 Crank-Nicolson 알고리즘을 X_2 에 적용하고, Y 에 대하여는 중앙차분법을 사용하였다. 유한한 계산영역을 위하여 수치결과에 영향을 미치지 않을 만큼 큰 $Y(>>1)$ 에 다음과 같은 측면경계조건을 부과하였다.

$$\partial \bar{A}/\partial Y = 0, \quad \bar{A} = \exp i(2\mu X_1 - \mu T - \delta^2 X_2). \quad (26)$$

한편 쐐기의 모양은

$$y = x \tan \alpha, \quad \tan \alpha = \epsilon \quad (27)$$

로 표시함으로써 물체표면 경계조건은 다음과 같이 간단한 꼴이 된다.

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial Y} = i\bar{A} \quad Y = X_2 \quad (28)$$

수치계산은 반각이 17.55° ($\epsilon^2 = 0.1$)와 24.09° ($\epsilon^2 = 0.2$)인 2개의 쐐기에 기울기가 $kA_0 = 0.05, 0.1, 0.3$ 인 3가지 입사파에 대한 계산을 수

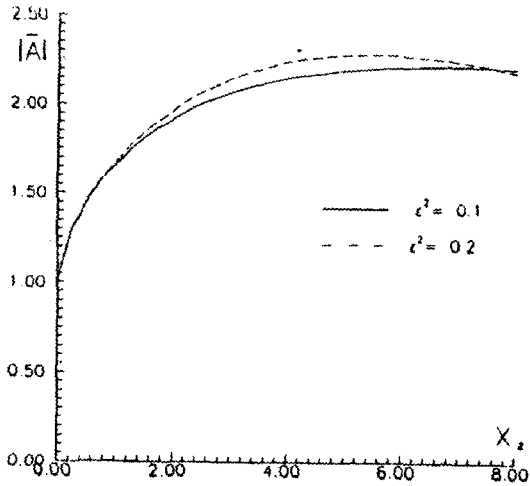


Fig.2 Variation of Wave Amplitude along the Wedge for $kA_0 = 0.1$ and $K/2k = 0.1$

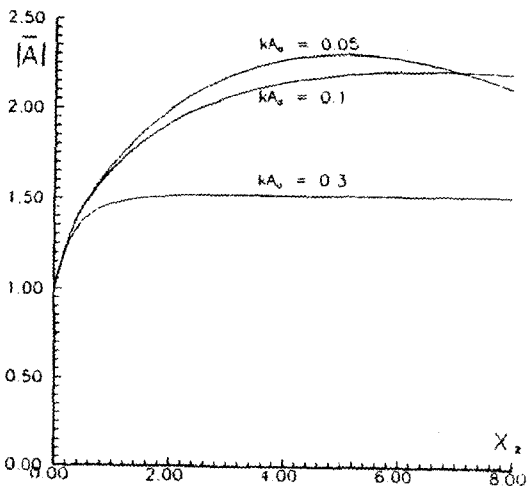


Fig.3 Variation of Wave Amplitude along the Wedge for different wave slopes with $\epsilon^2 = 0.1$ and $K/2k = 0.1$

행하였다. 이에 대응하는 δ 의 값은 각각 $\delta = (1582, 0.3163, 0.9489$ 와 $0.1118, 0.2236, 0.6708$ 이다. 변조비($K/2k$)로 0.1과 0.3를 택하였는데, 이들 값은 Longuet-Higgins의 결과에 의하면 $kA_0 = 0.05$ 는 안정된 경우에, $kA_0 = 0.1$ 과 0.3의

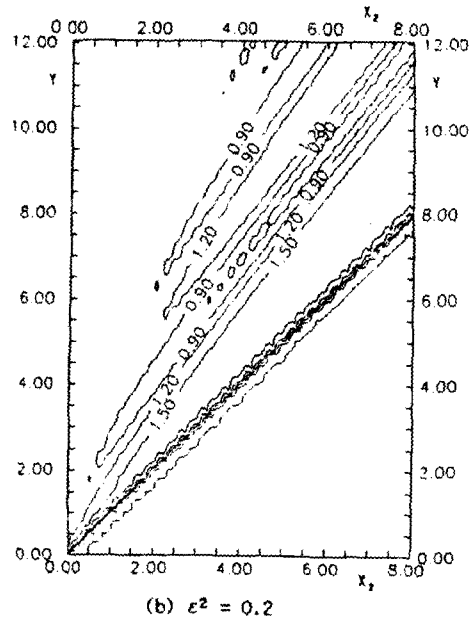
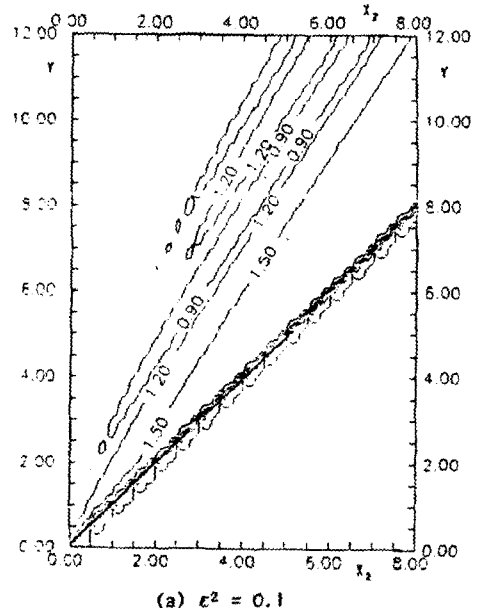
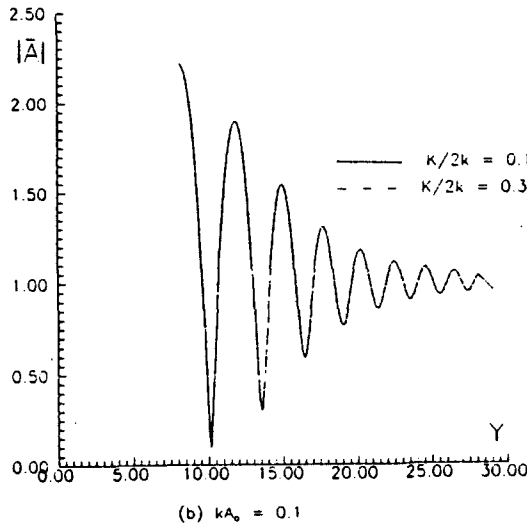
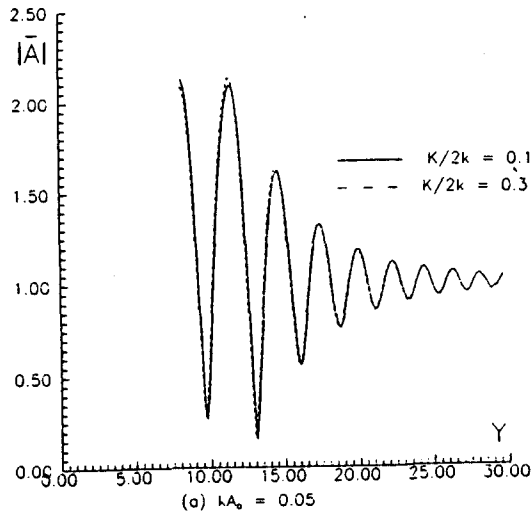


Fig.4 Contour of Diffracted Waves along the Wedge for $kA_0 = 0.3$ and $K/2k = 0.1$

경우 $K/2k=0.1$ 은 불안정한 경우에 그리고 $K/2k=0.3$ 은 안정한 경우에 해당한다. 균속도로 진행되는 입사파의 포락선 하나가 선수를 통과 하는데 소요되는 시간은 $T_0=\pi/\mu$ 이며 포락선의 길이는 $X_1=\pi/2\mu$ 이다.

Fig.2는 x 에 따른 산란파 파고의 변화를 보이고 있다. 실선($\epsilon^2=0.1$)은 췌기의 반각(α)이 17.55° 인 경우에 그리고 점선($\epsilon^2=0.2$)은 $\alpha=24.09^\circ$ 인 경우에 해당된다. 입사파의 기울기와 변조비는 두 경우 모두 $kA_0=0.1$ 과 $K/2k=0.1$ 이다. 여기서 횡축 X_2 는 식(22)에서 정의한 장척



도 길이며, 종축은 진폭비의 절대값이다. 산란파는 x 에 따라 처음에는 단순 증가하다가 점차 감소하는 경향을 보이고 있으며 췌기각(즉, 입사각)이 크면 파고가 높아짐을 알 수 있다.

Fig.3에는 $\alpha=17.55^\circ$, $K/2k=0.1$ 인 경우 입사파의 기울기에 따른 산란파 파고의 상대적 차이를 도시하였다. x 에 따른 변화는 위에서와 같은 경향을 보이고 있으며, 입사파의 기울기가 크면 산란파의 파고는 상대적으로 감소함을 확인할 수 있다.

Fig.4는 $kA_0=0.3$, $K/2k=0.1$ 에 대한 산란파의 contour를 보이고 있다. 그림에 표시된 숫자는 진폭비의 절대값을 나타내며, 횡축은 $X_2 (=k\epsilon^2x)$ 종축은 $Y (=k\epsilon y)$ 으로 실제 거리가 서로 다르게 무차원화되었다. 전반적인 모습은 췌기각이 20° 보다 조금 작을 경우나(Fig.4a)조금 클 경우(Fig.4b) 모두 별다른 차이없이 서로 비슷하다. 췌기벽에서 일정구간까지 stem파가 존재하며, 그 영역은 벽을 따라 거의 선형적으로 증가하고 있다.

stem파 영역을 실제 좌표계로 환산하면 전자는 7.2° , 후자는 7.0° 에 대응하여 입사각이 작을 때 그 폭이 조금 넓어진다.

이상의 수치결과는 서론에서 설명한 실험에

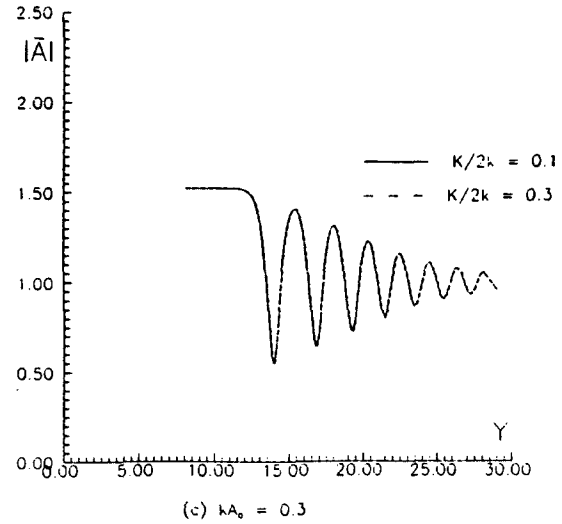


Fig.5 Lateral Variation of Wave Amplitude at $X_2=8$ for different modulation ratios with $\epsilon^2=0.1$ and $K/2k=0.3$

서 관측된 현상과 일치하고 있다. 그러나 변조비의 변화에 따른 영향은 극히 미미하여 지금까지의 그림에 도시하지 않았다. 이를 좀 더 자세히 살펴보기 위하여 Fig.5를 마련하였다. 이 그림은 $\alpha=17.55^\circ$ 일때 (a) $kA_0=0.05$, (b) $kA_0=0.1$, (c) $kA_0=0.3$ 인 각 경우 변조비가 $K/2k=0.1$ (실선)과 $K/2k=0/3$ (점선)에 대하여 $X_2=8.0$ 에서의 산란파의 Y 에 따른 변화를 보여주고 있다. 모든 경우에 변조비는 별다른 영향을 미치지 못하고 있음을 알 수 있다.

또한 stem파는 입사파의 기울기가 비교적 클 때($kA_0=0.3$)에만 형성됨을 발견할 수 있다. 입사파의 기울기가 작을 때에는 벽근처에 stem파가 형성되지 않으며 이웃하는 파의 높이가 더 크게 얻어진다.

6. 결 론

본 논문에서는 포텐셜유동이란 가정하에 쇄기에 입사하는 변조된 비선형파의 산란문제를 해석하였다. 입사각이 비교적 작을 때에 유효한 포물형 근사를 이용하여 산란파는 Zakharov 방정식으로 표시될 수 있으며, 또한 정현변조의 경우에는 3차 Schrödinger 방정식으로 표시할 수 있음을 밝혔다. 정현변조에 대한 수치계산결과는 실험에서 관측된 산란파의 일반적 특성을 잘 반영하고 있으나, stem파는 입사파의 기울기가 매우 클 경우에만 얻어졌다. 변조에 의한 분산성은 3차 Schrödinger 방정식의 선형항으로 나타나지만 그 영향은 극히 미약하여 비선형성의 영향이 지배적이란 결론을 얻게 된다.

끝으로 본 연구는 한국과학재단이 지원한 1987년도 목적기초연구 “선박의 유체동역학적 특성 규명을 위한 기초연구 - 비선형 해석 -”의 제2세부과제 “쇄파현상과 쇄파중에서의 부유체의 운동해석”의 일환으로 수행하였음을 밝히며 상기 재단에 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

[1] Benjamin, T. B. and Feir, J. E. "The disin-

tegration of wave trains on deep water", Part I Theory, JFM Vol. 27, p.417~430, 1967.

[2] Berger, U. and Kohlhasse, S. "Mach reflection as a diffraction problem", Proc.15th Conf. Coastal Eng, 1976.

[3] Chen, T. C. "Experimental study on the solitary wave reflection along a straight sloped wall at oblique angle of incidence", U. S. Beach Erosion Board Tech. Memo. 124, 1961.

[4] Miles, J. W. "Diffraction of solitary waves. Z. angew.", Math. und Physik Vol. 28, p.889~902, 1977.

[5] Mei, C. C. "The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves", Wiley Interscience, 1983.

[6] Nielsen, A. H. "Diffraction of periodic waves along a vertical breakwater for small angles of incidence", Univ. California, Berkeley, IER Tech. Report 99-3, 1962.

[7] Perroud, P. H. "The solitaty wave reflection along a straight vertical wall at oblique incidence", Univ. California, Berkeley, IER Tech. Report 99-3, 1957.

[8] Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. "Nonlinear Dynamics and Chaos", John Wiley and Sons, 1986.

[9] Wiegel, R. L. Oceanographical Engineering, Prentice-Hall, 1964.

[10] Yue, D. K. P. and Mei, C. C. "Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge", JFM Vol.99, p.33-52, 1980.

[11] Yuen, H. C. and Lake, B.M. "Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves", Advances in Appl. Mech. Vol.22, p.67-229, 1982.

[12] Zakharov, V. E. "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid", J. Appl. Mech. Tech. Phys. Vol.2 p.190~194, 1968.