論文91-28B-12-3

비선형 시스템의 Dynamic Feedback을 이용한 합성

(Synthesis Problems of the Nonlinear Systems Via Dynamic Feedback)

李 鴻 奇,* 全 洪 兌**

(Hong Gi Lee and Hong Tae Jeon)

要 約

본 논문에서는 dynamic feedback을 전제한 structure algorithm을 정의하고, 이를 이용하여 비선형 시스템의 입출력 합성문제의 충분조건들을 구했다. 우리가 여기서 고려하는 합성문제들은 입출력 decoupling, 입출력 선형화, 선형 시스템으로의 immersion 등이다.

Abstract

In this paper, we give a structure algorithm for the synthesis problems of the nonlinear system via dynamic feedback. Using our algorithm, sufficient conditions for the input-output synthesis problems are discussed. The problems we consider in this paper include dynamic input-output decoupling input-output linearization, and immersion into a linear system.

I. 서 론

선형시스템에 대한 입출력 합성(synthesis) 문제[22,23] 들을 비선형 시스템에 대해서까지 확장시키는 노력이 과거 10여년 동안 꾸준히 계속돼 왔다. 대표적인 연구로는 static feedback을 사용한 입출력 decoupling[3,4,7,8,20,21] 입출력 선형화,[10,11,13] 선형 시스템으로의 immersion[1,14,15,16] 등이다. 최근에는 static feedback으로서 풀리지 않는 입출력decoupling 문제를 보다 강력한 dynamic feedback을사용함으로써 푸는 시도가 행해졌다.[2,5,9,12,17,18] 본 논문에서는 기존의 structure algorithm[10,13,22]을 일반화한 dynamic feedback을 전제한 structure algorithm을 정의하고, 이를 이용하여 입출력 합성문제들(입출력 decoupling, 입출력 선형화, 선형 시스템으로의 immersion 등)을 푼다.

우선 다음과 같은 affine 비선형 시스템을 고려하자.

$$\frac{dx}{dt}=f(x(t))+g(x(t))u(t) \qquad (1)$$
$$y(t)=h(x(t))$$

여기서, $x\in R^n$, $u\in R^m$, $y\in R^q$ 이고 f, g, h는 analytic 인 함수들이라고 가정한다. 시스템(1)에 대한 dynamic feedback을 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{z}=\phi(x,z)+\psi(x,z)w \qquad (2a)$$
$$u=\alpha(x,z)+\beta(x,z)w \qquad (2b)$$

즉, 시스템(1)의 제어입력u를 dynamic 시스템 (2a)

*正會員, 中央大學校 制御計測工學科
(Dept. of Control and Instrumentation Eng., Chungang Univ.)
**正會員, 中央大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chungang Univ.)

接受日字 : 1991年 9月 3日
(※ 본 논문은 1990년도 문교부 지원 한국 학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.)

의 state z와 시스템의 state x, 그리고 새로운 입력 w의 함수(2b)로 걸어준다. 이 방법은 제어규칙에 dynamic시스템(즉, 적분기)이 포함되기 때문에 dynamic feedback이라고 한다. 시스템(1)과 (2)는 state 를 $x_E=[x\ z]^T$라고 두면 다음과 같은 extended 시스템으로 생각할 수 있다.

$$\dot{x}_E=f_E(x_E)+g_E(x_E)w$$
$$y=h_E(x_E) \tag{3a}$$

여기서,

$$f_E(x_E)=\begin{bmatrix} f(x)+g(x)\alpha(x,z) \\ \phi(x,z)\end{bmatrix}$$
$$g_E(x_E)=\begin{bmatrix} g(x)\beta(x,z) \\ \psi(x,z)\end{bmatrix} \tag{3b}$$

Dynamic 입출력 decoupling 문제의 정의는 참고문헌[12,17]에서 발견할 수 있으므로 생략하고, dynamic입출력 선형화 문제를 정의한다. 비선형 시스템 (1)의 출력은 선형 시스템인 경우와 달리 closed 형태로 나타낼 수 없고 식(4)와 같은 "Volterra series"로 쓸 수 있다.

$$y(t)=w^{(0)}(t,x)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t w_i^{(1)}(t,\tau_1,x)u_i(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\int_0^t\int_0^{\tau_1} w_{i_1i_2}^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2,x)u_{i_1}(\tau_1)u_{i_2}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \cdots \tag{4}$$

여기서 $w^{(j)}$는 j^-th Volterra Kernel 이라고 한다.

[정의 1] 만일 $\{w_i^{(1)}, 1\leqq i\leqq m\}$이 초기 state x의 함수가 아니고 $w_i^{(j)}=0, 1\leqq i\leqq m$ & $j\geqq 2$이면, 시스템(1)은 입출력 선형화가 되었다고 정의한다.

즉, 만일 시스템(1)이 입출력 선형화가 되었으면, 출력의 입력에 종속(dependent)한 부분이 입력과 선형인 관계에 있다. (물론, zero-input response인 $w^{(0)}(x,t)$는 초기 state x의 비선형 함수가 될 수 있다.)

[정의 2] 시스템(1)에 대해, extened시스템(3)이 입출력 선형화가 되는 dynamic feedback(2)가 존재하면, 시스템(1)은 dynamic 입출력 선형화가 가능하다고 정의한다.

다음은 immersion 문제를 정의한다.

$$\dot{\bar{x}}=\bar{f}(\bar{x})+\bar{g}(\bar{x})\bar{u}$$
$$y=\bar{h}(\bar{x}) \tag{5}$$

여기서 $\bar{x}\in R^{\bar{n}}$, $u\in R^m$, $y\in R^q$이고, $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$는 analytic 이다.

[정의 3] 만일 임의의 초기 state $x\in R^n$에 대하여, 시스템(5)의 초기 state $\bar{x}$를 $\bar{x}=\tau(x)$라고 두었을 때, 시스템(1)의 출력과 시스템(5)의 출력이 같게 되는 analytic map $\tau: R^n\rightarrow R^{\bar{n}}$가 존재하면, 시스템(1)은 시스템(5)로 immersed 되었다고 정의한다.

[정의 4] 시스템(1)이 immersed 되는 선형 시스템이 존재하면, 시스템(1)은 선형 시스템으로 immersed 되었다고 정의한다.

시스템(1)이 다음과 같은 선형 시스템 (6)으로 immersed 되었다고 가정하자

$$\dot{\eta}(t)=A\eta(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t) \tag{6}$$

시스템 (1)의 출력과 초기 state η를 $\eta=\tau(x)$ 라고 둔 시스템 (6)의 출력이 같으므로,

$$y(t)=Ce^{At}\tau(t)+\int_0^t Ce^{At}Bu(\tau)d\tau$$

즉, 시스템(1)의 출력은 입력u와 초기 state x의 어떤 함수 $\tau(x)$에 대해 jointly linear이다. 즉, 입출력 선형화 문제는 출력의 zero-input response는 무시하고 입력에 종속(dependent)한 부분만 선형이면 되지만, immersion 문제는 더 강력하다. 즉, 시스템(1)의 입출력 관계를 시스템(6)으로 복제(reproduce)할 수 있다. (단순히 시스템(6)의 초기 state를 $\eta=\tau(x)$라고 둠으로써).

[정의 5] 시스템(1)에 대하여, extended시스템(3)이 선형 시스템으로 immersed 되는 dynamic feedback를 사용하여 선형 시스템으로의 immersion이 가능하다고 정의한다.

이상과 같이 입출력 합성 문제들을 정의했는데 이 정의들에 익숙하지 않으면, 참고문헌[6,19]를 참조할 수 있다. 2절에서는 dynamic feedback을 전제한 structure algoritm을 정의하고, 이를 이용하여 3절에서 위에 정의한 합성문제들에 대한 충분 조건들을 구한다. 마지막으로 간단한 example을 4절에서 다룬다.

Ⅱ. Dynamic Feedback를 이용한 합성문제에 대한 Structure algorithm

우선, y_1부터 y_q에 대하여, $y_i^{(\rho i)}$가 u의 함수가 되는 가장 작은 정수를 ρ_i라고 정의한다. Dynamic Feedback 사용을 전제로 한 Structure algorithm은 크게 두 부분으로 나눌 수 있는데, 그 첫부분은 참고문헌[12]에서 주어진 바와 같이 적분기들을 입력에 연결해서 소위 precompensator를 구성하는 단계이고, 두번째

부분은 위에서 구한 precompensator(즉, danamic feedback)를 사용한 extended system에 대하여 어떤 조건하에서 system이 출력의 R-space중 입력에 independent한 basis들을 추출해내는 단계이다.

Precompensator구성

Step 0 : $A(x, u) = [y_1^{(\rho 1)} \cdots y_q^{(\rho q)}]^T$라고 하고 $\tilde{u}^0 = u$ 라고 한다. 또, r_0를 $\partial A(x, u)/\partial \tilde{u}^0$ 의 rank로 정의한다. 만일 $r_0 = q$이면, algorithm을 끝낸다.

Step i : $\partial A^{(i)}/\partial \tilde{u}_j^{i-1} \neq 0$이면 $\tilde{u}_j^i = \tilde{u}_j^{i-1}$라고 하고, 그렇지 않으면 $\tilde{u}_j^i = \tilde{u}_j^{i-1}$이라고 두어서 $\tilde{u}_1^i, \cdots, \tilde{u}_m^i$를 얻은 다음 $\tilde{u}^i = [\tilde{u}_1^i \cdots \tilde{u}_m^i]^T$라고 한다. 이와 같이 정의하면, $\partial A^{(i)}/\partial \tilde{u}$ 는 $x, \tilde{u}^1, \cdots, \tilde{u}^{i-1}$의 함수이다. 만일 $r_i [\equiv \text{rank} [[\partial A^{(i)}/\partial \tilde{u}^i]] = q$이면, algorithm을 끝내고 그렇지 않으면 Step i+1로 간다.

$r_0 \leqq r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots$이고, 모든 r_i들은 $\min(q, m)$보다 작으므로 $\{r_0, r_2, r_2, \cdots\}$의 최대치 r^*가 존재하고 algorithm은 유한한 step내에 끝난다. algorithm이 STEP k에서 끝났다고 가정하자.

참고문헌[12]에 있는 바와 같이 precompensator를 다음과 같이 정의한다 :

1. $\tilde{u}^k = [u_1^{(\lambda 1)} \ u_2^{(\lambda 2)} \cdots u_m^{(\lambda m)}]^T$이면, dynamic compensator의 state z를 $z = \{z_{i,j}, 1 \leqq i \leqq m \text{ and } 1 \leqq j \leqq \lambda_i\}$ 라고 정의한다. 즉 state의 갯수는 모두 $\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$이다

2. 만일 $\lambda_i = 0$이면 $u_i = v_i$라고 하고, 그렇지 않으면,

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i,j} &= z_{i,j+1} \ \ for \ \ 1 \leqq j \leqq \lambda_i - 1 \\ \dot{z}_{i,\lambda_i} &= v_i \\ u_i &= z_{1,i} \end{aligned} \tag{7}$$

라고 정의한다.

위와 같이 정의하면

$$z_{i,j} = u_i^{(j-1)}, for \ \ 1 \leqq i \leqq m \ \ and \ \ 1 \leqq j \leqq \lambda_i \tag{8}$$

임을 쉽게 알 수 있다.

이상과 같은 dynamic feedback를 사용하면, closed-loop시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bv \\ u &= Cz + Dv \end{aligned} \tag{9b}$$

와 같다. 이 식을 $x_E = [x \ z]^T$ 라고 정의하면 다음과 같은 extended시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= f_E(x_E) + g_E(x_E)v \\ y &= h_E(x_E) \end{aligned} \tag{10}$$

여기서

$$f_E(x_E) = \begin{bmatrix} f(x) + g(x)Cz \\ Az \end{bmatrix}$$

$$g_E(x_E) = \begin{bmatrix} g(x)D \\ B \end{bmatrix}, \ \ h_E(x_E) = h(x)$$

이다.

[정의 6] R를 실수 field라고 하고 $K(C^\omega)$를 $R^n \times R^\mu$의 real analytic함수 ring에 대한 quotient field라고 정의할 때, entry가 $R^n \times R^\mu$의 real analytic 함수인 p×l행렬 $M(x, z)$에 대하여 $\rho(M(x, z))$를 $M(x, z)$의 row에 의하여 generate 되는 R-vector space의 dimension 이라고 정의하고 $\sigma(M(x, z))$를 $K(C^\omega)$-vector space의 dimension이라고 정의한다.

extended시스템 (10)에 대하여

$$T_i(x_E) = L_{g_E} L_{f_E}^i (h_E(x_E)), \ i \geqq 0 \tag{11a}$$

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} T_0(x_E) & T_1(x_E) & \cdots & T_i(x_E) \\ 0 & T_0(x_E) & \cdots & T_{i-1}(x_E) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_0(x_E) \end{bmatrix} \tag{11b}$$

라고 정의하고

$$\sigma(\Theta_i(x_E)) = \rho(\Theta_i(x_E)), \ \ i \geqq 0 \tag{12}$$

라고 가정한다. (12)의 가정하에서 extended시스템 (10)에 대한 structure algorithm을 다음과 같이 정의할 수 있다[10,11]

Step 1 : 가정(12)와 row operation에 의하여

$$V_1 T_0(x_E) = \begin{bmatrix} S_1(x_E) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

이고 $S_1(x_E)$의 모든 row들이 (r_1개라고 가정한다) 선형독립(linearly independent over $K(C^\omega)$)한 nonsingular 실수 행렬

$$V_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ K_1^1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

을 발견할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= r_1 \\ \gamma_1(x_E) &= P_1 h(x_E) \\ \bar{\gamma}_1(x_E) &= K_1^1 h(x_E) \end{aligned} \tag{15}$$

라고 정의하면,

$$L_{g_E}\gamma_1(x_E)=S_1(x_E) \qquad (16)$$
$$L_{g_E}\bar{\gamma}_1(x_E)=0$$

가 된다. 만일 $T_0(x_E)=0$인 경우는 P_1은 0×0 행렬이고 K_1^1은 단위(identity) 행렬이라고 한다.

Step i : 다음과 같은 행렬을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} L_{g_E}\gamma_1(x_E) \\ \vdots \\ L_{g_E}\gamma_{i-1}(x_E) \\ L_{g_E}L_{f_E}\bar{\gamma}_{i-1}(x_E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i-1}(x_E) \\ L_{g_E}L_{f_E}\bar{\gamma}_{i-1}(x_E) \end{bmatrix} \qquad (17)$$

역시, 가정(12)와 row operation에 의하여

$$V_i\begin{bmatrix} L_{g_E}\gamma_1(x_E) \\ \vdots \\ L_{g_E}\gamma_{i-1}(x_E) \\ L_{g_E}L_{f_g}\bar{\gamma}_{i-1}(x_E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i(x_E) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

이고 $S_i(x_E)$의 모든 row들이 $(r_i(\geq r_{i-1})$개라고 가정한다.) 선형독립(linearly independent over $K(C^\omega)$)한 nonsingular실수 행렬

$$V_i=\begin{bmatrix} I_{r_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_{r_{\delta_{i-1}}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_i \\ K_1^i & \cdots & K_{i-1}^i & K_i^i \end{bmatrix} \qquad (19)$$

을 발견할 수 있다.

$$\delta_i=r_i-r_{i-1}$$
$$\gamma_i(x_E)=P_iL_{f_E}\bar{\gamma}_{i-1}(x_E) \qquad (20)$$
$$\bar{\gamma}_i(x_E)=K_1^i\gamma_1(x_E)+\cdots+K_{i-1}^i\gamma_{i-1}(x_E)+K_i^iL_{f_E}\bar{\gamma}_{i-1}(x_E)$$

라고 정의하면,

$$\begin{bmatrix} L_{g_E}\gamma_1(x_E) \\ \vdots \\ L_{g_E}\gamma_i(x_E) \end{bmatrix} = S_i(x_E)$$
$$L_{g_E}\bar{\gamma}_i(x_E)=0 \qquad (21)$$

만일 행렬(17)의 마지막 $q-r_{i-1}$ row들이 처음 r_{i-1} row들에 dependent하면 degenerate step이 되어 P_i는 0×0 행렬이고 K_i^i는 단위(identity) 행렬, $\delta_i=0$, $S_i(x_E)=S_{i-1}(x_E)$라고 한다.

다음은 algorithm의 FINAL step을 설명한다.

(1). $$\begin{bmatrix} L_{g_E}\gamma_1(x_E) \\ \vdots \\ L_{g_E}\gamma_{k-1}(x_E) \\ L_{g_E}L_{f_E}\bar{\gamma}_{k-1}(x_E) \end{bmatrix} \qquad (22)$$

의 q row들이 모두 linearly independent(over $K(C^\omega)$)한 k가 존재하면, algorithm을 끝내고 P_k과 V_k를 단위 행렬이라고 하고

$$\gamma_k=P_kL_f\bar{\gamma}_{k-1}(x_E)$$
$$\bar{\gamma}_k=0 \qquad (23)$$

라고 한다. 그러면,

$$\begin{bmatrix} S_{k-1}(x_E) \\ L_{g_E}\gamma_k(x_E) \end{bmatrix} = S_k(x_E) \qquad (24)$$

이고 $K_1^k, \cdots, K_k^k$들은 0×0행렬이 된다.

(2).(1)의 경우가 아니면 (즉, 행렬 (22)의 row 들이 full rank가 되는 정수 k가 존재하지 않으면), k를 algorithm의 맨 마지막 nondegenerate step이라고 하고 STEP k를 마지막 step이라고 정의한다. 그러면 $(q-\delta_1-\delta_2-\cdots-\delta_k)\times1$ matrix $\bar{\gamma}_k(x_E)$는

$$L_{g_E}L_{f_E}^i(\bar{\gamma}_k(x_E))=0, \quad i\geq0 \qquad (25)$$

을 만족한다.

Ⅲ. Dynamic Feedback을 사용한 합성문제

2절에서 Dynamic Feedback을 전제한 structure algorithm을 제시하였는데, 이 절에서는 이를 이용한 여러가지 합성문제들의 조건들에 대해 논의한다. 1절에서 설명한 바와 같이 우리가 고려하는 입출력 합성문제들은 입출력 decoupling(정리7), 입출력 선형화(정리8), 선형 시스템으로의 immersion(정리9) 문제이다.

[정리 7] 만일 $r^*=q$이면, 시스템(1)은 dynamic feedback을 사용하여 local 입출력 decoupling이 가능하다.
증명 : 참고문헌[12] 참조

[정리 8] 만일 가정(12)가 성립하면, 시스템(1)은 dynamic feedback을 사용하여 local 입출력 선형화가 가능하다.

[증 명] 만일 가정(12)가 성립하면, 2절에서 보인 바와 같이 structure algorithm을 적용하여 $\gamma_1(x_E)$, $\gamma_2(x_E)$, $\cdots$, $\gamma_k(x_E)$와 $\bar{\gamma}_k(x_E)$를 얻을 수 있다.

$$\Gamma(x_E)=\begin{bmatrix} \gamma_1(x_E) \\ \vdots \\ \gamma_k(x_E) \end{bmatrix} \qquad (26)$$

라고 두면, $L_{g_E}\Gamma(x_E)(=S_k(x_E))$의 γ_k row들은 모두 linearly independent (over $K(C^\omega)$)이므로 $R^{n+\mu}$의 어떤

open dense subset U에서

$$[L_{g_E}\Gamma(x_E)]a(x_E) = -L_{f_E}\Gamma(x_E) \quad (27a)$$
$$[L_{g_E}\Gamma(x_E)]b(x_E) = [I_{r_k\times r_k}\ \ 0] \quad (27b)$$

를 만족하는 m×1행렬 $a(x_E)$와 m×m행렬 $b(x_E)$를 구할 수 있다.

$$v = a(x_E) + b(x_E)w \quad (28)$$

식(28)에 주어진 것과 같이 extended 시스템(10)에 대한 static feedback을 가해주면 (여기서, w는 새로운 가상의 입력),

$$\dot{x}_E = f_E(x_E) + g_E(X_E)a(X_E) + g_E(x_E)b(x_E)w$$
$$y = h_E(x_E) \quad (29)$$

이 전체 closed-loop시스템(29)는 입출력 선형화가 이루어 졌음을 보이겠다. 우선, $\Gamma(x_E)$와 $\bar{\gamma}_k(x_F)$를 출력으로 했을 때 입출력 관계가 (물론, 초기조건을 무시하였을 때) 선형이라는 것을 보인다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Gamma(x_E) &= L_{f_E+g_Ea(x_E)+g_Eb(x_E)w}(\Gamma(x_E)) \\ &= L_{f_E}(\Gamma(x_E)) + L_{g_E}(\Gamma(x_E))a(x_E) + L_{g_E}(\Gamma(x_E))b(x_E)w \\ &= [I_{r_k\times r_k}\ \ 0]w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{r_k}\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (30)$$

이고

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{\gamma}_k(x_E) &= L_{fE}(\bar{\gamma}_k(x_E)) + L_{g_E}(\bar{\gamma}_k(x_E))a(x_E) + L_{g_E}(\bar{\gamma}_k(x_E))b(x_E)w \\ &= L_{f_E}(\bar{\gamma}_k(x_E))\end{aligned} \quad (31)$$

(식(25)에 의하여)

식(30)과 식(31)에 의해

$$\frac{d^k}{dt^k}V_kV_{k-1}\cdots V_1h_E(x_E) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{d}{dt}\bar{\gamma}_k(t)\end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_{\sigma_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{\sigma_k} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(k-1)} \\ \bar{w}_2^{(k-2)} \\ \vdots \\ \bar{w}_k \\ \bar{w}_{k+1}\end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서,

$$\bar{w}_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{r_1}\end{bmatrix},\ \bar{w}_2 = \begin{bmatrix} w_{r_1+1} \\ \vdots \\ w_{r_2}\end{bmatrix}, \cdots,$$

$$\bar{w}_k = \begin{bmatrix} w_{r_{k-1}+1} \\ \vdots \\ w_{r_k}\end{bmatrix},\ \bar{w}_{k+1} = \begin{bmatrix} w_{r_k+1} \\ \vdots \\ w_m\end{bmatrix}$$

이다. structure algorithm에 의하여 $d\bar{\gamma}_{k(t)}/dt$는 입력 w에 independent하다. 따라서 식(32)에 의하여 $V_k V_{k-1}\cdots V_1 h_{x_E}(x_E)$의 입력 w에 종속(dependent)한 부분도 선형이다. $V_1, V_2, \cdots, V_k$들은 nonsingular인 상수 행렬이므로 $h_{x_E}(x_E)$의 입력w에 종속(dependent)한 부분도 선형이다. 즉, dynamic feedback 식(9b)와 식(28)로서 시스템(1)을 입출력 선형화 시킬 수 있다.

(증명 끝)

[정리 9] 시스템(1)이 다음의 두 조건을 만족한다고 가정한다.

(i) $\sigma(\Theta_i) = \rho(\Theta_i)$, $i \geq 0$

(ii) $\Psi \equiv \mathrm{span}_R\{\bar{\gamma}_k(x_E), L_{f_E}\gamma_k(x_E), L^2_{f_E}\bar{\gamma}_k(x_E), \cdots\}$ 의 dimension이 유한하다. 그러면, 시스템(1)은 dynamic feedback을 사용하여 선형 시스템으로의 immersion이 가능하다.

[증 명] 정리 9의 증명은 다음의 보조정리 (29)를 이용하면 간단하다.

보조정리 : 시스템(1)이 선형시스템으로 immersed 하기 위한 필요충분 조건은 다음((i)과 (ii))과 같다.

(i) $\Phi \equiv \mathrm{span}_R\{h(x), L_fh(x), L^2_fh(x), \cdots\}$의 dimension이 유한하고

(ii) $L_gL^i_fh(x) = \mathrm{constant}$, $i \geq 0$

보조정리 1에 따르면 정리9를 증명하기 위해서는 dymnamic feedback 식(9b)와 식(27)을 사용하여

(iii) $\Phi_c \equiv \mathrm{span}\{h_E(x_E), L_{\tilde{f}_E}(h_E(x_E)), L^2_{\tilde{f}_E}(h_E(x_E)), \cdots\}$의 dimension이 유한하고

(iv) $L_{\tilde{g}_E}L^i_{\tilde{f}_E}h_E(x_E) = \mathrm{contant}$, $i \geq 0$

임을 보이기만 하면 된다. 여기서,

$$\tilde{f}_E = f_E(x_E) + g_E(x_E)a(x_E)$$
$$\tilde{g}_E = g_E(x_E)b(x_E)$$

우선, 조건(iv)가 성립하는 것은 정리 6의 증명에서 보였으므로 조건(iii)만 보이면 된다.

$$\begin{aligned}\Phi_c &\equiv span\{h_E(x_E), L_{\tilde{f}_E}(h_E(x_E)), L^2_{\tilde{f}_E}(h_E(x_E)), \cdots\} \\ &= span\{\Gamma(x_E), \bar{\gamma}_k(x_E), L_{\tilde{f}_E}(\Gamma(x_E)), L^2_{\tilde{f}_E}(\bar{\gamma}_k(x_E)), L^2_{\tilde{f}_E}(\Gamma(X_E)), L^2_{\tilde{f}_E}(\bar{\gamma}_k(x_E)), \cdots\} \\ &= span\{\Gamma(x_E), \bar{\gamma}_k(x_E), L_{\tilde{f}_E}(\bar{\gamma}_k(x_E)), L^2_{\tilde{f}_E}(\bar{\gamma}_k(x_E)), \cdots\}\end{aligned} \quad (33)$$

식(33)의 마지막 등호는 $L^{i}_{\tilde{f}_E}(\Gamma(x_E))=0,\ i\geq 1$이기 때문이다. 따라서, 정리10의 조건(ii)가 만족하면 조건(iii)이 만족한다는 것을 알 수 있다(증명 끝).

이 절에서는, dynamic feedback을 사용한 합성문제들의 충분조건을 structure algorithm를 사용하여 제시하였다. 이 조건들이 필요조건까지 될 수 있는가는 더 많은 연구가 요구된다. 다음 절에서는 간단히 example을 고려하여 본 논문에서 제시한 정리들의 유용성을 보인다.

Ⅳ. Example

Example : 다음과 같은 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}_1=x_1u_1 \quad \dot{x}_2=x_3-x_3u_1 \quad \dot{x}_3=x_1u_2$$
$$y_1=x_1 \quad y_2=x_2 \quad y_3=x_1+x_2 \tag{34}$$

시스템(34)는 static feedback으로서는 입출력 선형화가 불가능한데,[10] dynamic feedback을 허용할 경우는 어떤지 살펴보기로 한다.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=x_1u_1\\ \dot{y}_2&=x_3-x_3u_1\\ \dot{y}_3&=x_3+(x_1-x_3)u_1\end{aligned} \tag{35}$$

이므로

$$A(x,u)=\begin{bmatrix} x_1u_1\\ x_3-x_3u_1\\ x_3+(x_1-x_3)u_1\end{bmatrix} \tag{36a}$$

$$\frac{\partial A(x,u)}{\partial \tilde{u}^0}=\begin{bmatrix} x_1 & 0\\ -x_3 & 0\\ x_1-x_3 & 0\end{bmatrix} \tag{36b}$$

이다. 여기서 $\tilde{u}^0=u$이다. 따라서, $r_0=1(<2)$이다.

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} x_1u_1{}^2+x_1u_1{}^{(1)}\\ x_1u_2-x_1u_1u_2-x_3u_1{}^{(1)}\\ x_1u_1{}^2+x_1u_2-x_1u_1u_2+(x_1-x_3)u_1{}^{(1)}\end{bmatrix} \tag{37}$$

이므로 $\partial A^{(1)}/\partial \tilde{u}_1{}^0\neq 0$이고 $\partial A^{(1)}/\partial \dot{\tilde{u}}_0{}^0=0$의 되어서, $\dot{\tilde{u}}^1=[u_1{}^{(1)}\ u_2]^T$이다. 따라서

$$\frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tilde{u}^1}=\begin{bmatrix} x_1 & 0\\ -x_3 & x_1-x_1u_1\\ x_1-x_3 & x_1-x_1u_1\end{bmatrix} \tag{38}$$

이 되고 $r_1=\mathrm{rank}(\partial A^{(1)}/\partial \tilde{u}^1)=2$이므로, precompensator를 구성하는 algorithm은 끝난다. $\tilde{u}^1=[u_1^{(1)}\ u_2]^T$ 이므로 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=0$이다. 따라서,

$$\dot{z}=v_1 \quad u_1=z \quad u_2=v_2 \tag{39}$$

(39)의 dynamic feedback을 사용하면 closed-loop 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1z\\ x_3-x_3z\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&x_1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$
$$=f_E(x,z)+g_E(x,z)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \tag{40a}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=h(x)=h_E(x,z)=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_1+x_2\end{bmatrix} \tag{40b}$$

따라서, $x_E=[x\ z]^T$라고 하면,

$$T_0(x_E)=L_{qE}(h_E(X_E))=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} \tag{41a}$$

$$T_1(x_E)=L_{gE}L_{fE}(h_E(x_E))=\begin{bmatrix}x_1&0\\ -x_3 & x_1-x_1z\\ x_1-x_3 & x_1-x_1z\end{bmatrix} \tag{41b}$$

$$T_2(x_E)=L_{gE}L_{fE}(h_E(x_E))=\begin{bmatrix}2x_1z&0\\ 0&0\\ 2x_1z&0\end{bmatrix} \tag{41c}$$

식(48)로부터 $\sigma(\Theta_i)=\rho(\Theta_i),\ i\geq 0$ 임을 알 수 있다. 따라서, 정리8에 의해 시스템(34)는 dynamic feedback를 사용하여 입출력 선형화가 가능하다. 실제로, structure algorithm을 수행함으로써 입출력 선형화를 시키는 dynamic feedback을 구해보자

(41a)로부터 $V_1=I=[K_1^1]$, $\bar{\gamma}_1=h_E(x_E)$, $\delta_1=0$ (여기서 $r_1=0$이므로 γ_1은 0×0행렬이다). Step2로 가서, (41b)로부터 $r_2=2$이고

$$V_2=\begin{bmatrix}1&0&\vdots&0\\ 0&1&\vdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ -1&-1&\vdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_2\\ K_2^2\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2(x_E)=P_2L_{fE}(\bar{\gamma}_1(x_E))=\begin{bmatrix}x_1z\\ x_3-x_3z\end{bmatrix}$$
$$\bar{\gamma}_2(x_E)=K_2^2h_E(x_E)=0 \tag{42}$$

$\bar{\gamma}_2=0$이므로, 이후의 Step들은 degenearate step이 되므로, last nondegenerate step인 Step2에서 algorithm이 끝난다. (즉, $k=2$).

식 (27a) 와 식 (27b) 는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ -x_3 & x_1-x_1z \end{bmatrix} a(x_E) = -\begin{bmatrix} x_1z^2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (43a)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ -x_3 & x_1-x_1z \end{bmatrix} b(x_E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (43b)$$

따라서,

$$a(x_E) = -\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ -x_3 & x_1-x_1z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1z^2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} z^2 \\ \dfrac{z^2}{x_1-x_1z} \end{bmatrix} \qquad (44a)$$

$$b(x_E) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1} & 0 \\ \dfrac{1}{x_1(x_1-x_1z)} & \dfrac{1}{x_1-x_1z} \end{bmatrix} \qquad (44b)$$

$$v = -\begin{bmatrix} z^2 \\ \dfrac{z^2}{x_1-x_1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1} & 0 \\ \dfrac{1}{x_1(x_1-x_1z)} & \dfrac{1}{x_1-x_1z} \end{bmatrix} W \qquad (45)$$

시스템 (34)를 입출력 선형화 시키는 dynamic 식 (39)와 식(45)로부터, feedback은

$$\dot{z} = -z^2 + \frac{1}{x_1} w_1 \qquad (46)$$

$$u = \begin{bmatrix} z \\ -\dfrac{z^2}{x_1-x_1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{x_1(x_1-x_1z)} & \dfrac{1}{x_1-x_1z} \end{bmatrix} w \qquad (46)$$

참고문헌[12]에 있는 Example과 위 Example을 비교하면 dynamic 입출력 선형화와 dynamic 입출력 decoupling의 차이를 이해하는데 도움이 된다.

參 考 文 獻

[1] D Claude M. Fliess, and A. Isidori "immersion directe et par bouclage, d'un systeme nonlinearie dans un linearie" *C. R. Acad. Sci. Paris,* vol. 296, pp. 237-240, 1983.

[2] J. Descusse and C.H. Moog, "Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems" *International Journal of Control,* vol 42, pp. 1387-1398 1985.

[3] E. Freund, "Decoupling and pole assignment in nonlinear systems" *Electronics Letters,* vol 9, pp. 373-374, 1973.

[4] I J. Ha and E.G. Gilbert "A complete characterization of decoupling control laws for a general class of nonlinear systems," *IEEE Trans Autom. Control,* vol. 31, pp. 823-830, 1986.

[5] A. Isidori, "Control of nonlinear systems via dynamic state feedback," Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, *M. Fliess and M. Hazewinkel (ed.), Reidel* pp. 121-145, 1986.

[6] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems* 2nd ed. Spring Verlag 1989.

[7] A. Isidori and J.W. Grizzle, "Fixed modes and nonlinear noninteracting control with stability," *IEEE Trans Autom. Control,* vol. 33, pp. 907-914, 1988.

[8] A. Isidori, A.J. Krener C. Gori-Giorgi and S. Monaco, "Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach, *IEEE Trans Autom. Control* vol. 26, pp. 331-345, 1981

[9] A. Isidori, C.H. Moog and A. De Luca, ' A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback," Proceedings of 25th IEEE Conference on Decision and Control, Athens Greece pp. 203-208, 1986.

[10] A. Isidori and A.Ruberti "On the synthesis of linear input output responses for nonlinear systems" *Systems & Control Letters,* vol. 4, pp. 17-22, 1984.

[11] H.G. Lee Linearization of Nonlinear Discrete Time Control Systems, Ph.D. Dissertation Department of Electrical and Computer Engineering The University of Texas at Austin, Austin, TX, August 1986.

[12] H.G. Lee H.T. Jeon, and W.Y. Yang, A simplified algorithm for synthesis problems via dynamic feedback," *KITE J. of Electronics Engineering* vol. 1, pp. 22-27, 1990.

[13] H.G. Lee and S.I. Marcus "On input-output linearization of discrete time nonlinear systems" *Systems & Control Letters* vol 8, pp. 249-259, 1987.

[14] H.G Lee and S I. Marcus "Immersion and immersion by nonsingular feedback of a discrete time nonlinear system into a linear system," *IEEE Transaction on Automatic Control vol.* 33, no. 5, pp. 479-483, 1988.

[15] S. Monaco and D. Norman-Cyrot "The immersion under feedback of a multidimensional discrete-time nonlinear systems into a linear system," *Int J. Contr*, vol. 38, pp. 245 261, 1983.

[16] S. Monaco and D. Norman-Cyrot, "On the immersion of a discrete-time polynomial analytic system into a polynomial affine one' *Syst Contr. Lett*, vol 3, pp. 83-90, 1983.

[17] H. Nijmeijer 'Local (dynamic) input output decoupling of discrete time nonlinear systems" *IMA Journal of Mathematical Control & Information* vol 4, pp. 237 250, 1987.

[17] H. Nijmeijer 'Local (dynamic) input-ouput decoupling of discrete time nonlinear systems' *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, vol pp. 237-250, 1987.

[18] H. Nijmeijer and W. Respondek, "Dynamic input output decoupling of nonlinear control systems' *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol 33, pp. 1065-1070, 1988.

[19] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft, Non linear Dynamical Control Systems Springer Verlag New York, Inc., 1990.

[20] W.A. Porter "Diagonalization and inverses for nonlinear system," *International Journal of Control* vol 11, pp. 67-76, 1970.

[21] A.J. van der Schaft "Linearization and input-output decoupling forgeneral nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 5, pp. 27 33, 1984.

[22] L.M. Silverman, "Inversion of multivariable linear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol 14, pp. 270-276, 1969.

[23] W. Wonham, Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, 2nd ed., Springer Verlag New York Inc, 1979.

著 者 紹 介

李 鴻 奇(正會員)
1958年 11月 28日生. 1981年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1983年 2月 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사). 1986年 8月 Texas대학 박사학위 취득. 1986年 8月~1989年 2月 Louisiana 주립대학 조교수로 근무. 1989年 3月 이후 중앙대학교 제어계측공학과에 현재 부교수로 재직. 주관심분야는 비선형 시스템 제어이론, 로보트 공학 등임.

全 洪 兌(正會員) 第26卷 第10號 參照
현재 중앙대학교 전자공학과 부교수