

균열된 셸의 파괴역학해석을 위한 선진유한요소기법

Advanced Finite Element Technology for Fracture Mechanics Analysis of Cracked Shells

우 광 성*
Woo, Kwang Sung

요 약

선형탄성파괴역학에서 특히 균열 셸의 응력집중계수 산정을 위해 p-version 유한요소법에 기초한 선진 유한요소 기법이 제안되었다. 세 가지 균열된 셸 예제를 통해 응력집중계수 산정은 종래의 h-version 유한요소모델에 비하여 p-version 유한요소 모델이 수렴성과 정확도 면에서 훨씬 더 적합함을 보여주고 있다. 이 기법의 주요 이점은 근사해의 정확도가 요소분할이나 균열선단요소 또는 혼합형 변분원리등의 특별 고려가 없이 확보될 수 있다는 데 있다.

Abstract

A new finite element technology based on the p-version of E.F.M. is discussed with reference to its potential for application to stress intensity factor computations in linear elastic fracture mechanics, especially cracked cylindrical shells. It is shown that the p-version model is far better suited for computing the stress intensity factors than the conventional h-version models with the help of three test problems. The main advantage of this technology is that the accuracy of approximation can be established without mesh refinement or the use of special procedures such as crack-tip element and mixed variational approach.

1. 서론

셸구조는 이상적인 하중지지구조(load-carrying structure)이므로 송수관(pipeline), 압축용기(pressure vessel), 수조차(tank car), 항공기몸체, 원자로, 유류탱크등에 널리 사용되고 있다. 그러나 사용되는 재료는 제조 또는 조립과정에서 용접과 재료상의 결함(defects)과 표면에 흠집이 생기는

등의 초기균열(initial flaws)이 일어날 수 있으며 시간이 경과함에 따라 균열크기는 증가하는데 비하여 구조물의 강도는 감소하여 마침내 전체구조물을 파괴시키는 현상을 Fig.1로 부터 알 수 있다. 이러한 균열은 반복하중에 의한 피로(fatigue), 하중의 조합, 그리고 구조물을 부식시킬 수 있는 유체에 의한 응력부식(stress corrosion) 등에 인하여 발생함과 동시에 전파(propagation)

* 정회원, 전남대학교 공과대학교 토목공학과
이 논문은 1990년도 문교부 지원 학술진흥재단의 자유공
모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

이 논문에 대한 토론은 1991년 9월 30일까지 본학회에
보내주시면 1992년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

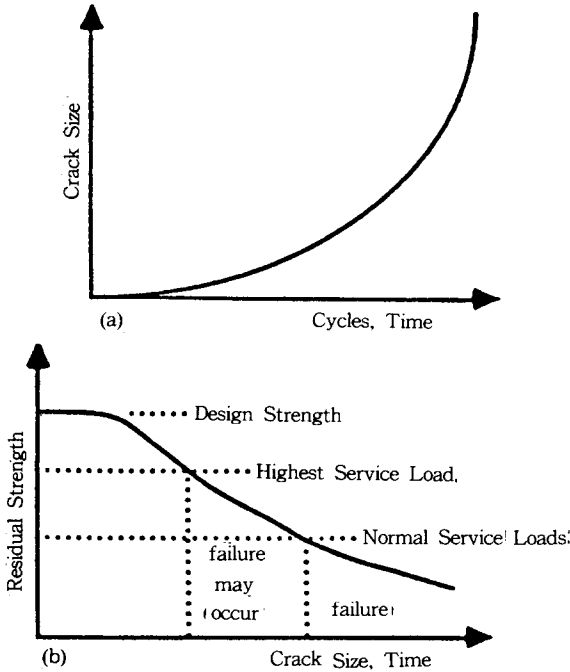


Fig. 1 Effect of Cracks Structures
 (a) Crack Growth Curve
 (b) Residual Strength Curve

되는 것이다. 이런 현상을 사전에 방지하기 위하여 아래와 같은 문제가 우선적으로 규명되어야 한다.

- i) 균열크기(crack size)와 잔류강도(residual strength)
- ii) 임계균열크기(critical crack size)
- iii) 초기균열에서 임계균열까지의 예상수명(life prediction)

위의 문제를 해결하기 위한 가장 큰 문제는 응력집중계수(Stress Intensity Factor)를 산정하는 것이다. 균열문제는 $r^{-1/2}$ 형태의 응력특이성(stress singularity)을 갖게되므로 r 이 0에 접근하면 특이점(singular point) 즉, 균열선단(crack tip)부근의 응력경사(stress gradient)가 매우 크고 응력변화 또한 매우 심한 관계로 많은 연구자의 관심을 끌어왔다. 균열 셀의 응력집중계수 산정을 위한 이론적 접근은 많은 연구자에 의해 시도되어 왔으나 균열크기, 형상비(R/t ratio), 포아송비등의 기하학적 형상과 재료성질 및 하중조건이 단순한 경우

로 국한되므로 그 일반성에 기인하여 여러 수치해석 모델이 제시되었다. 그 중 유한요소법을 이용한 방법이 많이 사용되었는데 Rice¹⁾가 제안한 J-integral method와 에너지방출률법인 가상균열 확장법(virtual crack extension method)를 Hellen²⁾, Parks³⁾등이 제안하여 많이 사용되고 있으나 균열모우드(crack mode)가 서로 복합(coupling)되어 있을 경우에는 적용하기 힘들다. 고로, 에너지법을 사용하여 K_I -mode(opening mode)와 K_{II} -mode(sliding mode)를 분리(decoupling)시키는 연구가 진행중에 있다. 본 연구에서는 경사균열이 발생하는 문제에서 유발되는 K_I , K_{II} 의 분리를 위해 외삽법(extrapolation)에 기초한 C.O.D.(Crack Opening Displacement) 방법이 사용되었다. 한편, P-version 유한요소법으로는 삼각형 계층요소(hierarchic element)를 사용하여 2-D 평면탄성문제가 Mehta⁴⁾, Szabo⁵⁾, Basu⁶⁾ 등에 의해 시도된 바가 있다. 균열 셀 해석 결과는 이론해(analytical solution), 실험해(experimental solutions)와 종래의 유한요소해석과 비교하여 본 연구에서 제안하는 선진유한요소 기법인 P-version 유한요소법의 우월성을 해의 수렴성과 정확도등을 통하여 입증하는 것이 논문의 목적이라 하겠다.

2. 응력집중계수의 산정

2-1 연구범위 및 배경

본 연구에서는 세 경우의 균열 셀 문제를 L.E.F.M. 에 근거하고 Integrals of Legendre Polynomials이 형상함수로 사용되는데 고차 르장드르함수는 $-1 < x < 1$ 구간의 표준영역에서 양단에서의 접선기울기가 매우 가파르므로 응력경사가 매우 큰 특이성 문제에 적합하다. 또한, P-version 유한요소법은 4-절점 subparametric 요소를 사용하고 요소의 크기가 큰 이유로 변형(distortion)경향이 커지므로 정확한 기하학적 형상을 정의하지 않고는 수렴성을 보장할 수 없게 된다. 그러므로 곡선형상을 정확하게 표현할 수 있는 초유한사상(transfinite mapping)이 사용되고 고차함수를 적분하기 위해 12×12 가우스 점을 배열하여 사용되는 형상함수 차수의 변화에 따라

적절한 수의 가우스 점(Gauss Point)이 사용되게 하는 수치적분이 사용된다. 한편, 해석대상이 되는 구조물은 아래와 같다.

- (1) 인장력을 받는 원주방향균열
- (2) 내압을 받는 축방향균열
- (3) 내압을 받는 경사균열

균열 쉘의 이론적인 접근은 Folias⁷⁾, Erdogan⁸⁾, Sanders⁹⁾ 등에 의해 수행되었는데 얇은 쉘(shallow shell)이론에 기초하여 적분방정식(integral equation)의 항으로 표현하고자 했으며 균열되지 않은 쉘에 본래의 하중이 재하된 문제해석과 균열된 쉘의 균열부분에 비균열상태의 동일지점에서 발생하는 응력과 모멘트값을 크기는 같고 방향이 반대인 재하하중으로 작용시키는 문제해석을 중첩시키는 방법을 사용하고 있다. 그러나, 이 방법은 단순한 기하형상과 단순하중에 국한되며 적분방정식 해석을 위해 선택된 몇 개의 점에서 경계조건 값을 적용하는 수치해석적 방법인 선점법(collocation method)이 사용되기도 한다.

유한요소해석은 많은 학자들이 종래요소를 사용하여 균열문제해석을 시도하였으나 균열선단에서 발생하는 무한응력(infinite stress)으로 부터 특이점부근에 위치한 임의의 거리만큼 떨어진 점까지의 응력전이(stress transition)를 표현하기가 힘든 관계로 특별한 균열선단요소(crack tip elements)가 개발되어 균열선단에서는 이 요소를 사용하고 그밖의 영역에서는 종래요소를 사용하여 해석의 신뢰성과 수렴성을 높였는데 Byskov¹⁰⁾, Hardy¹¹⁾, Wilson¹²⁾ 등이 대표적인 연구자이며 또한, Pian과 Tong¹³⁾은 혼합형 변분원리(mixed variational principle)를 사용하여 응력과 변위를 동시에 미지수로 하고 서로 다른 보간함수를 각각 사용한 hybrid element를 적용하였고 Barsoum, Loomis⁴⁾ 등은 종래의 isoparametric mapping을 수정하여 중간절점을 4분점에 위치시켜 Jacobian 매트릭스의 determinant를 0으로 만들어 특이성을 표현하고자한 Quarter Point Element를 개발하여 주로 2-D Plane Elasticity 문제해석을 수행하였으며 균열 쉘의 유한요소해석에 대한 문헌은 흔하지

않은 관계로 본 연구에서는 연구결과의 비교를 위해 E.P.R.I.(Electric Power Research Institute) Report¹⁵⁾에서 구조해석용 프로그램인 ADINA를 사용하여 균열 쉘 문제를 해석한 결과와 Tada, Paris¹⁶⁾, Zahoor¹⁷⁾ 등의 실험식 및 제한된 이론식이 사용될 것이다.

2-2 유한요소법을 이용한 S.I.F. 산정방법

2-2-1 변위법(Displacement Method)

혼합모우드(mixed mode)가 발생하는 균열문제 해석에 적합한 방법으로 Fig.2에서 균열선단에서 거리 r , 각도 θ 만큼 떨어진 임의의 점에서의 변위 u, v 는 아래 식과 (1), (2)와 같이 표현된다.

$$u(r, \theta) = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2\frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} f_u(\theta) + O(r)^{5/2}$$

$$v(r, \theta) = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2\frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} f_v(\theta) + O(r)^{5/2} \quad (1)$$

$$u(r, \theta) = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} + \cos^2\frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} g_u(\theta) + O(r)^{5/2}$$

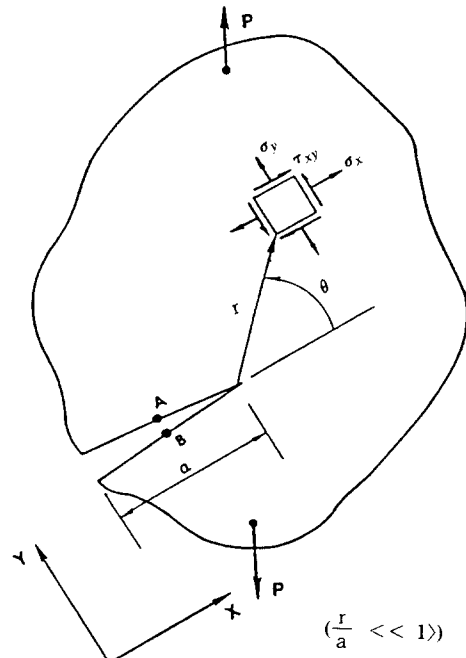


Fig. 2 Crack-Tip Polar Coordinate System

$$v(r, \theta) = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left(\frac{\nu-1}{1+\nu} + \sin^2\frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} g_v(\theta) + O(r)^{5/2} \quad (2)$$

한편, 위의 식은 K_I (opening mode)과 K_{II} (in-plane sliding mode)를 동시에 포함하고 있으므로 이를 K_I, K_{II} 에 대해서 분리하여 나타내기 위해서 $\theta=180^\circ$ 일때의 점 A 와 $\theta=-180^\circ$ 일때의 점 B 에 대한 변위 u_A, u_B 와 v_A, v_B 로 부터 K_I, K_{II} 에 대해 정리하면 아래 식 (3), (4)와 같다.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{v_A - v_B}{\sqrt{r}} \right) \frac{E\sqrt{2\pi}}{8} \quad (3)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{u_A - u_B}{\sqrt{r}} \right) \frac{E\sqrt{2\pi}}{8} \quad (4)$$

위의 식에서 $r=0$ 일 때 응력집중계수를 결정할 수 있으며 Chan, Tuba, Wilson¹⁰⁾ 등은 균열평판문제의 경우 자유도가 약 2000정도 일 때 K_I 값이 5% 정도의 오차를 보이고 있으나 몇 개의 점으로부터 외삽법(extrapolation)을 사용하여 $r=0$ 인 점의 구하는 관계로 해의 정확도는 차치하고 다소 번거로운 방법이라 할 수 있다.

2-2-2 가상균열확장법(Virtual Crack Extension Method)

이 방법은 Rice에 의해 제안되었으며 Parks³⁾, Hellen²⁾ 등이 실제문제에 적용하였는데 이는 에너지방법에 근거하는데 에너지방출률(Energy Release Rate) G 를 구하여 응력집중계수를 정하는 방법이다. 에너지방출률 G 는 식 (5)와 같다.

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (5)$$

Parks가 제안한 강도미분법(Stiffness Derivative Method)에 의하면 아래 식 (6)과 같이 나타낼 수 있으며 또한 식 (7), (8)과 같은 관계식을 만족하므로 이로 부터 응력집중계수값을 결정할 수 있다. 여기서 Π 는 총 포텐셜 에너지이며 a 는 균열 크기를 나타낸다.

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial a} \quad (6)$$

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{for plane strain} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{for plane stress} \quad (8)$$

3. 계층요소(Hierarchical C⁰-Shell Element)

응력특이점부근에서의 응력분포를 표현하는데는 고차 르장드르함수가 적합하다. 그 이유는 이 함수의 양단에서의 접선의 기울기가 매우 가파르기 때문에 급격한 응력경사(stress gradient)를 표현할 수가 있다. 또한, 함수의 근(roots)들이 중앙보다는 양단에 다소 밀집되어 있으므로 특이점부근의 해에 대한 신뢰도를 높일 수 있다. 한편, 르장드르함수는 직교성(orthogonality)을 갖고 있어서 강도 매트릭스가 well-conditioned 매트릭스가 되며 round-off error가 기하학적 형상비(aspect ratio)과 요소의 변형(distortion)정도 등에 기인한 입력매개변수(input parameters)에 크게 영향을 받지 않으므로 작은 조건수(Condition Number)를 갖는다. 본 연구에서 사용되는 형상함수는 아래 식 (9)와 같다.

$$F_n(x) = \frac{\sqrt{2n-1}}{2} \int_{-1}^x P_{n-1}(t) dt \quad (9)$$

여기서 르장드르함수 $P_n(x)$ 는 Rodrigues Formula로 정의되며 식 (10)과 같다.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

한편, 사상(mapping)은 p-version의 경우 큰 망목(mesh)을 사용하므로 정확한 사상이 필요한데 이것을 해결하기 위해 초유한사상(transfinite mapping) 과 혼합사상(blend mapping)이 사용되었으며 고차함수를 수치적분하기 위해서 1×1 에서 12×12 Gauss Point 까지 확장하여 차수의 증가에 따른 Gauss Point를 식 (11)에 의해 결정한다.

$$n \geq \frac{p+1}{2} \quad \text{where } p = \text{polynomial order} \quad (11)$$

4. 수치해석모델

4-1 인장력을 받는 원주방향균열(A Circumferential Crack Under Tension)

해석모델이 Fig.3에 나타나 있으며 이 문제의 경우는 K_I 를 구하는 것이 관건이 되며 인장력이 작용할 경우의 K_I 는 식 (12)와 같다.

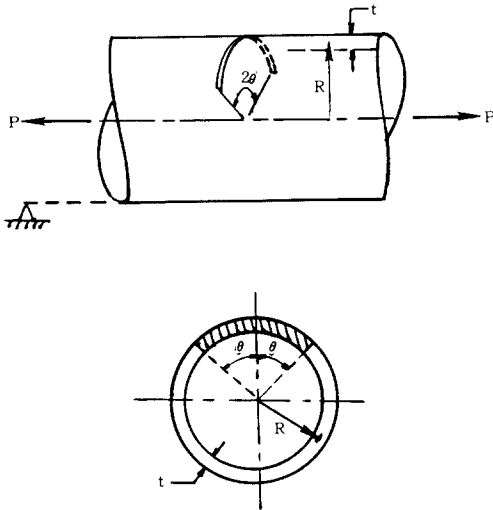


Fig. 3 Circumferential Crack Subjected to Tension

$$K_I = \frac{P}{2\pi R t} \sqrt{\pi a} F(\theta, R/t, \nu) \quad (12)$$

여기서 F 는 무차원량으로 형상계수(shape factor)라 부르며 이 값을 가상균열확장법에 의해 계산되었다. F 는 $\nu=0.3$ 일 때 $\theta, R/t$ 의 함수가 되므로 $R/t=5, 10, 20$ 일 때 $\theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 로 변화함에 따른 형상계수값이 Zahoor¹⁾의 실험식, Kumar¹⁵⁾의 ADINA Software로 24개 9-noded thin shell element(989 nodes)를 사용한 수치계산값, Sanders⁹⁾의 이론식과 비교되었는데 Sanders의 이론식은 R/t 가 10에 가까울 때는 다른 결과치와 비교적 일치함을 Table 1로 알 수 있으나 그렇지 않은 경우는 $\theta < 40^\circ$ 인 짧은 균열(short crack)에서만 정당함을 Fig.4로 부터 알 수 있다. p-version의 p 의 차수가 증가함에

Table 1. F-values for a Circumferential Crack under Tension [R/t = 10, $\nu=0.3$]

θ	θ/π	Sanders	Zahoor	Kumar	SHLPV (P=8)
15°	0.08333	1.15586	1.12870	1.12	1.11629
30°	0.16667	1.40258	1.37210	1.40	1.36265
45°	0.25000	1.72656	1.71886	1.78	1.74020
60°	0.33333	2.18678	2.20387	2.45	2.23713
75°	0.41667	2.87710	2.89223	3.35	2.92403
90°	0.50000	3.91682	3.87804	4.15	3.94276

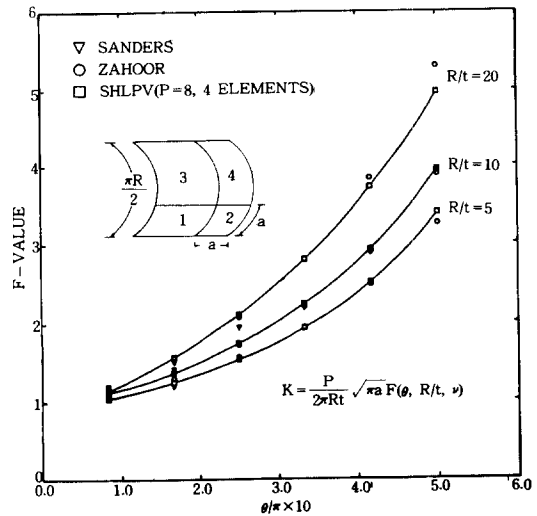


Fig. 4 Comparison of elastic solutions for a circumferential crack under tension : R/t=5, 10, 20

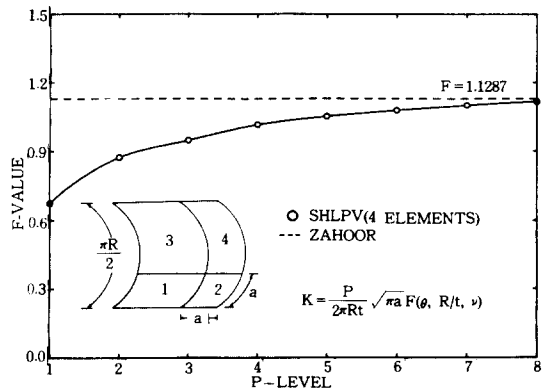


Fig. 5 F-values with different p-level : R/t=10 and 2θ=30%

따른 수렴성이 Fig.5에 나타나 있다. 즉, $R/t=1$ 0. $\theta=45^\circ$ 인 경우 p-version 모델($p=8$, 4-elements)에 의하면 $F=1.74020$ 이며 Sandes의 Short Crack Expression은 $F=1.72656$ 을 갖게 한다. 또, $R/t=5$, $\theta=45^\circ$ 인 경우 동일한 p-version 모델에 의해 $F=1.52953$ 이고 Zahoor의 실험식에 의하면 $F=1.56254$ 이다. 한편, $R/t=20$, $\theta=45^\circ$ 일 때 동일한 p-version 모델에 의하면 $F=2.10615$ 이고 Zahoor는 $F=2.07459$, Kumar는 $F=1.974$ 를 나타내고 있다.

4-2 내압을 받는 축방향균열(An Axial Crack Under Internal Pressure)

축방향으로 균열이 간 해석모델이 Fig.6에 나타나 있으며 내압에 의해 발생하는 균열의 형태는 역시 K_I 가 되며 식 (13)에 나타나 있다.

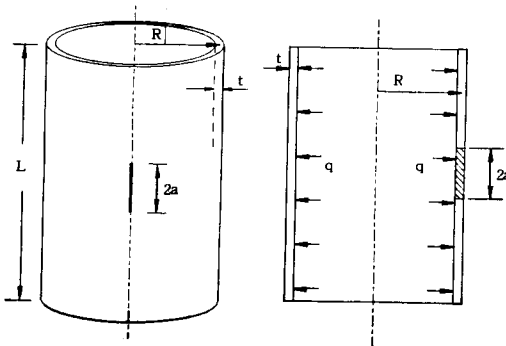


Fig. 6 Longitudinal crack under internal pressure

$$K_I = q \frac{R}{t} \sqrt{\pi a} F(\beta) \quad (13)$$

여기서 형상계수 F 는 β 의 함수이며 $\beta^2 = a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}/8Rt$ 로 표시되며 이에 대한 결과는 Tada, Paris, Irwin의 Crack Handbook⁽⁶⁾의 실험식과 비교되었다. 즉, $\beta=0.6$ 일 때 p-version($p=8$, 4-elements) 해석은 $F=1.45834$ 를 보이는데 이는 Tada의 $F=1.44548$ 과 매우 근접함을 알 수 있다. 한편, $\beta=1.0$ 일 때 동일한 p-version 모델은 $F=1.98711$ 을 그리고 Tada는 $F=2.00033$ 을 보인다. 이에 대한 결과가 Table 2에 있으며 Fig.7에 서로 비교되어 표시되어 있다. 그리고 p 의

Table 2. F-values for an axial crack under internal pressure

β	Tada et al.	P-version(P=8)
0.2	1.05879	1.03488
0.4	1.21827	1.22678
0.6	1.44548	1.45834
0.8	1.72027	1.71609
1.0	2.00033	1.98711
1.2	2.28040	2.27461

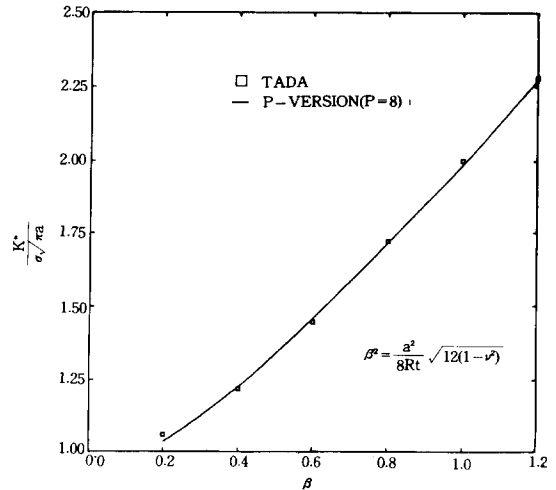


Fig. 7 Comparison of elastic solutions with different β for an axial crack under internal pressure

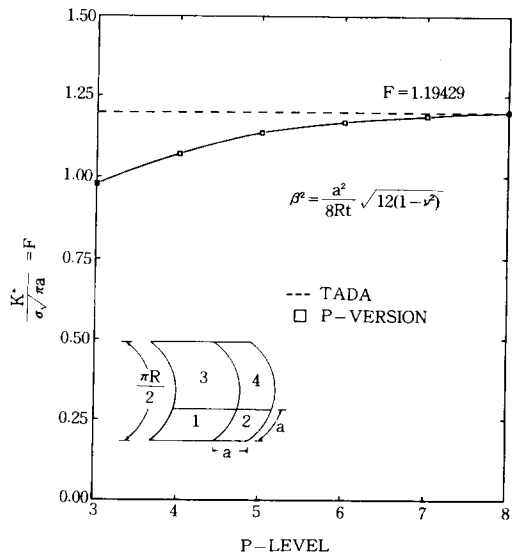


Fig. 8 F-values with different p-level: $\beta=0.375$

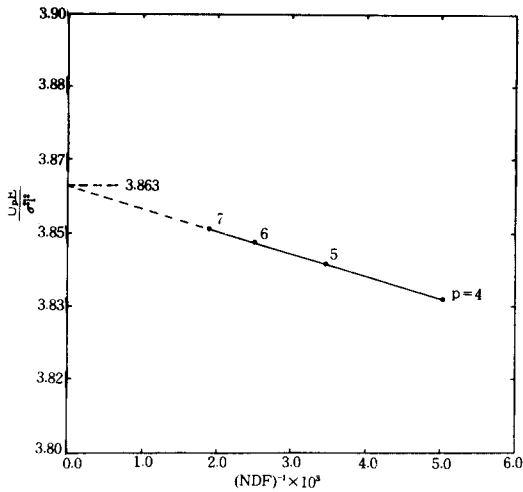


Fig. 9 Strain energy vs. $(NDF)^{-1}$ in axial crack problem

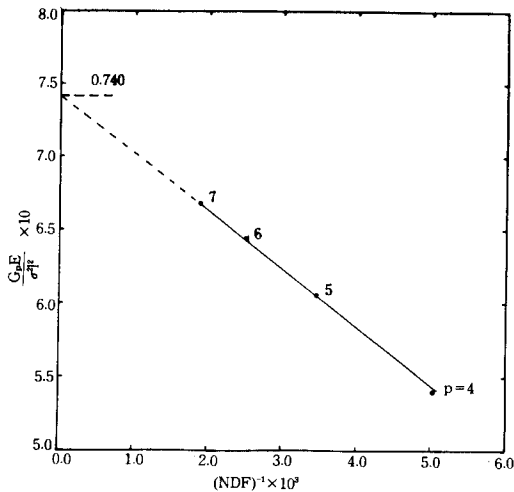


Fig. 10 Strain energy release rate vs. $(NDF)^{-1}$ in axial crack problem

차수의 증가에 대한 수렴성이 Fig.8에 $\beta=0.375$ 인 경우가 나타나 있다. 무차원 변형에너지(strain energy)와 변형에너지방출률(strain energy release rate)값의 $(NDF)^{-1}$ 에 대한 관계가 Fig.9와 Fig. 10에 표시되어 있는데 강한 선형성(linearity)을 갖고 있음을 주목하게 되는데 이는 이미 2-D Plane Elasticity문제에서 Mehta에 의해서도 이미 밝혀진 바가 있다. Fig.10에서 extrapolated exact value(즉, $p \rightarrow \infty$)는 $\beta=0.375$ 인 경우 $G=0.740\sigma^2 I/E$

가 되므로 형상계수 $F=1.253$ 이며 이는 Tada의 $F=1.194$ 와 비교할 수 있다.

4-3 내압을 받는 경사균열(An Inclined Crack Under Internal Pressure)

경사각 α 를 갖는 균열이 일어나는 실린더에 내압이 Fig.11에서와 같이 작용하고 있다. 이 경우는 균열형태가 K_I 와 K_{II} 가 동시에 복합되어 있다. 이 경우 각각의 균열모우드를 분리시키기 위해 C.O.D.방법이 사용되었다. 균열부분에 21개 점에서의 $\Delta u/\sqrt{r}$ 와 $\Delta v/\sqrt{r}$ 을 구해 거리 r/a 의 변화에 따른 그림이 Fig.12와 Fig.13에 $\alpha=30^\circ$ 와 $\alpha=60^\circ$ 일 때가 표시되어 있다. 경사균열의 경우는 균열부분의 국소좌표축(local reference)이 현재 유한요소모델이 사용되는 전체좌표축(global reference)과 다르므로 좌표변환(coordinate transformation)을 하여야 한다. 이 결과는 Lakshminarayana¹⁹⁾의 이론식과 비교하였는데 p-version 모델($p=8, 6$ -elements)의 경우 $\alpha=30^\circ$ 일 때 $K_I=0.796$ 과 $K_{II}=0.444$ 를 얻은 반면 Lakshminarayana는 $K_I=0.891$ 과 $K_{II}=0.453$ 을 보이고 $\alpha=60^\circ$ 인 경우 동일한 p-version모델은 $K_I=0.261, K_{II}=0.435$ 를 Lakshminarayana는 $K_I=0.302, K_{II}=0.440$ 을 나타내고 있다.

5. 결론

서로 다른 세가지의 균열 셀 문제가 새로 제안

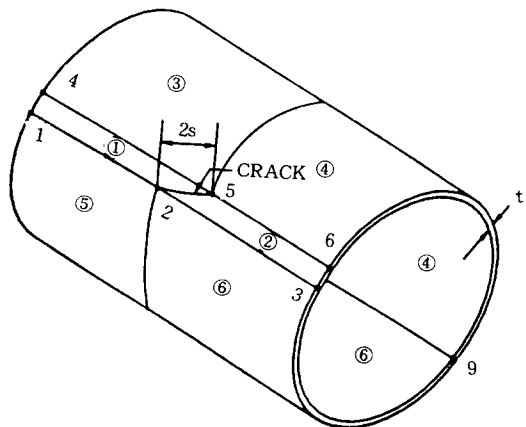


Fig. 11 Configuration and mesh refinement of inclined crack under internal pressure

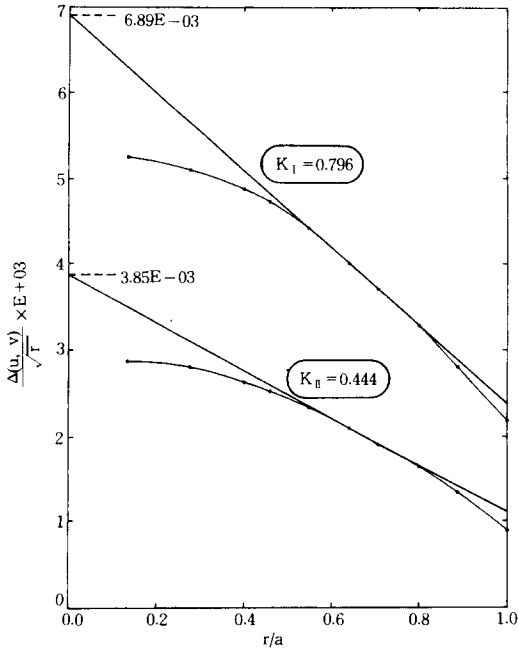


Fig. 12 Estimation of stress intensity factors based on crack surface displacements for the inclined crack : $\alpha=30^\circ$, $p=8$

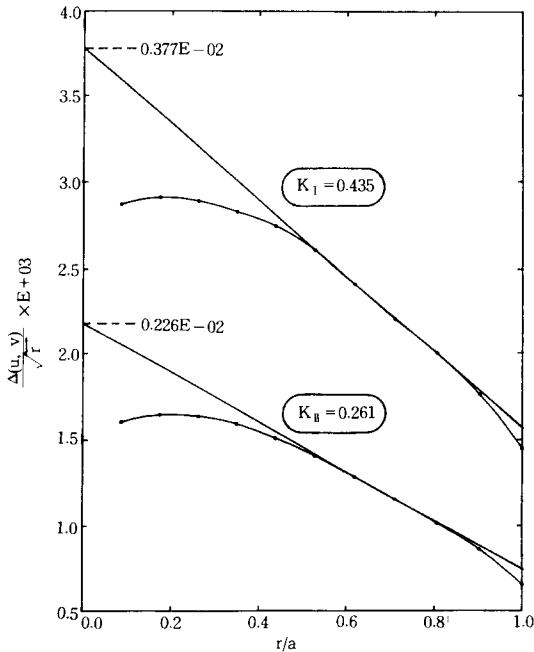


Fig. 13 Estimation of stress intensity factors based on crack surface displacements for the inclined crack : $\alpha=60^\circ$, $p=8$

되는 선진유한요소기법인 p-version 유한요소법을 사용하여 가상균열확장법(virtual crack extension method)와 Crack Opening and Sliding Method를 사용하여 해석하였다. 형상함수로는 Integrals of Legendre Polynomial을 사용하였으며 사상(mapping)으로는 초유한사상과 혼합사상을 적용하였다. 이에 따른 해석 결과는 이론식, 실험식 및 기존의 h-version 프로그램의 수치해석값과 비교되어 해의 신뢰성(reliability)과 정확도(accuracy)를 만족시켜 주고있을 뿐만 아니라 사용자(User)의 시간, 즉 입력자료의 간편성과 CPU 시간의 절감을 가져온다. 또한, 알고리즘의 효율성 측면에서 형상함수가 직교성을 갖고 계층적 성질(hierarchical nature)을 갖고 있어 well-conditioned 매트릭스가 된다.

6. 참고문헌

1. Rice, J. and Tracey, D., Computational Fracture Mechanics in Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S.J. Fenves, et. al., Eds., Academic Press, N.Y., pp.555-624, 1974
2. Hellen, T.K., On the Method of Virtual Crack Extensions, Int. J. Numer. Mech. Eng., Vol. 9, pp.181-207, 1975
3. Parks, D.M., A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, Int. J. Fracture, Vol. 10, No.4, pp.487-502, 1974
4. Mehta, A.K., P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics, Doctoral Dissertation, Washington University, St. Louis, Missouri, 1978
5. Szabo, B.A., Estimation and Control of Error Based on P-convergence, Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations Edited by I. Babuska et al., John Wiley & Sons Ltd., 1986
6. Basu P.K., Dimensional Reduction of Structural Plates and Shells, NSF Research Report, Grant No. CEE-84115675, Vanderbilt University, 1986

7. Folias, E.S., A Circumferential Crack in a Pressurized Cylindrical Shell, *Int. J. Frac. Mech.*, Vol.3, pp.1-11, 1967
8. Erdogan, F. and Delale, F., Transverse Shear Effect in a Circumferential Cracked Cylindrical Shell, *Quarterly of Applied Mechanics*, Vol.37, pp.239-258.
9. Sanders Jr., J. Lyell, Circumferential Through-Cracks in Cylindrical Shells under Tension, *J. Appl. Mech.*, Vol.49, pp.103-107, 1982
10. Byskov, E., *Int. J. Frac. Mech.*, Vol.6, No.2, pp.159-167, 1970
11. Hardy, R.H., A high-order finite element for two-dimensional crack problems, Ph.D. Dissertation, Georgia Inst. Tech., 1974
12. Wilson, W.K., *Finite Element Methods for Elastic Bodies Containing Cracks*, mechanics of Fracture, G.C. Sih, ed. Noordhoff International, Leyden, 1973
13. Tong, P. and Pian, T.H.H., On the convergence of the finite element method for problems with singularity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.9, pp.313-321, 1973
14. Barsoum, R.S. and Loomis, R.W., Analysis of through cracks in cylindrical shells by the quarter-point elements, *Int. J. Fracture*, Vol.15, pp.259-280, 1979
15. Kumar, V. et al., *Advances in Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, NP-3607 Research Project 1237-1, General Electric Company prepared for E.P.R.I., 1984
16. Tada H., Paris P. and Irwin G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Second Edition, Paris Productions Inc., 1985
17. Zahoor, A., Closed Form Expressions for Fracture Mechanics Analysis of Cracked Pipes, *J. Pressure Vessel Tech.*, Vol.107, pp.203-205, 1985(18) Chan, S.K., Tuba, I.S. and Wilson, W.K., On the finite element method in linear fracture mechanics, *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 2, pp.1-17, 1970

(접수일자 : 1991. 4. 30)