

# 무한요소(Infinite Elements)를 이용한 기초공학해석

양 신 추\*

## 1. 서언

공학문제에 있어서, 해석적으로 접근할 수 없었던 많은 경우의 문제들이 유한요소법(Finite Element Methods)의 정형화된 모형화 및 해석과정을 통하여 쉽게 접근되어질 수 있었다. 최근 보다 효율적인 요소개발과 컴퓨터 기술의 발달로 유한요소법은 더욱 효과적인 해석 수단이 되어가고 있다. 그러나 지반공학 문제와 같은 무한영역 문제를 유한요소법으로 해석할 경우, 매우 큰 영역을 모형화하기 위하여 많은 수의 요소가 요구되며 이에 따른 자유도(Degree of Freedom) 수의 증가로 많은 계산시간을 요구하게 된다.

본고는 무한영역 문제를 효과적으로 모형화하기 위하여 연구, 개발되어진 무한요소(Infinite Element)에 대하여 소개하려 한다. 무한요소의 기본 개념과 강성행렬의 형성방법을 보인후, 기초공학 문제를 예로하여 이의 적용방법을 간략하게 설명하였다.

## 2. 무한요소의 소개

기초공학 문제와 같은 무한영역 문제를 유한요소법으로 해석할 경우, 거동이 복잡한 구조물의 기초로부터 가까운 내부영역은 세부화한 유한요소로 모형화하고 거동이 비교적 단순한 외부영역은 크기가 큰 요소로 모형화함으로써 자유도 수를

어느정도 감소시킬 수 있다. 그러나 이러한 방법 역시 만족한 결과를 얻기 위해서는 상당한 수의 자유도가 요구된다. 특히 동적해석의 경우에는, 요소크기에 대한 제한조건(파장의 1/6-1/10 이내)으로 인하여 많은 자유도 수가 요구될 뿐만 아니라, 유한요소로 모형화한 지반영역의 최외각 경계면으로부터 반사된 에너지의 영향으로 실제와는 다른 잘못된 결과를 얻게 된다. 이러한 유한요소만에 의한 해석의 단점을 보완하기 위하여, 해석적으로 구한 외부영역의 해를 병합시키는 방법[1-2], 무한영역을 유한영역으로 변환(Mapping) 하여 해석하는 방법[3], 경계적분 방법[4-5], 점성경계 방법[6] 등등이 사용되어져 왔다.

외부영역을 효과적으로 모형화하기 위한 또 하나의 방법으로 무한요소가 소개되었다[7-13]. 무한요소는 그림 1과 같이 하나의 요소가 한 방향 또는 두 방향으로 무한히 확장되어 있는 요소로서, 하나의 요소가 무한히 큰 영역을 모형화할 수 있도록 고안된 것이다. 요소의 행렬은 유한요소에서와 같은 Variational Functionals 방법이나 Weighted Residuals 방법 등으로 형성되지만, 무한영역 적분을 효과적으로 수행하기 위한 기하학적 형상함수(Geometric Shape Functions)와 무한영역 거동을 나타낼 수 있는 변위 형상함수(Displacement Shape Functions)의 새로운 정의가 요구된다.

\* 정회원, 한국과학기술원 박사과정

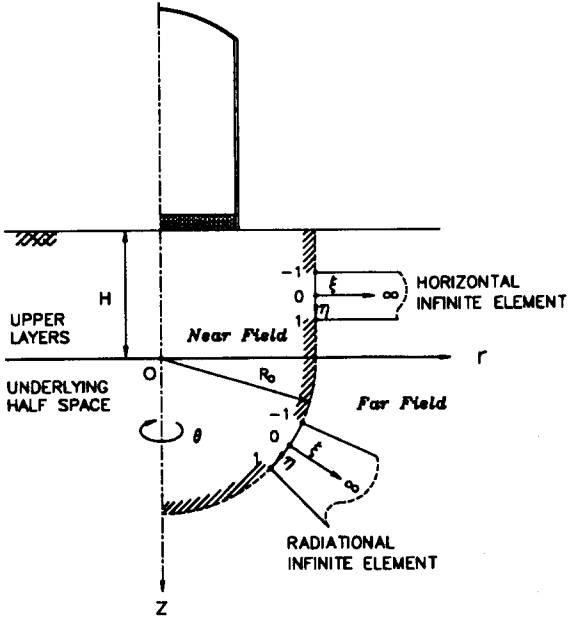


그림 1. 무한요소

### 3. 무한요소의 형성

무한요소는 하나의 요소가 무한대에 걸친 영역의 거동을 나타내므로 보다 정확한 요소가 되기 위해서는 형상함수가 해석하려는 문제의 외부영역 거동을 나타낼 수 있어야 한다. 따라서, 무한요소에서는 유한요소와는 달리 해석하려는 문제에 따라서 각 문제에 알맞는 여러 형태의 형상함수들이 존재할 수가 있다.

무한요소의 형상함수는 유한요소의 형상함수에 부과되었던 적합조건(Conforming Condition)외에, 유한조건(Finiteness Condition)과 방사조건(Radiation Condition)을 만족시키도록 구성되어야 한다. 여기서 유한조건이란 무한대 지점에서 형상함수와 그 미분 값은 유한한 값을 가져야 한다는 것으로 요소행렬 구성시 나타나는 적분이 정의될 수 있기 위한 조건이며, 방사조건은 에너지원으로부터 외부로 향하는 파를 나타낼 수 있어야 한다는 것으로 에너지 발산효과가 고려되기 위한 동적 무한요소에서만 요구되는 조건이다. 탄성지반 문제와 파동문제를 해석하기 위하여 개발된 형상

함수들의 예를 들면 다음과 같은 것이 있다.

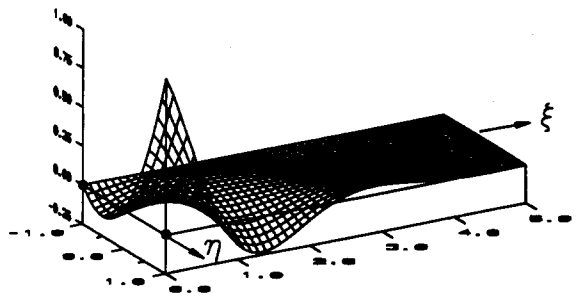
1) 정적무한요소의 형상함수(탄성지반 문제)

$$N_j = e^{(x_i-x)/L} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n-1} \left( \frac{x_l-x}{x_l-x_j} \right) \quad (1)$$

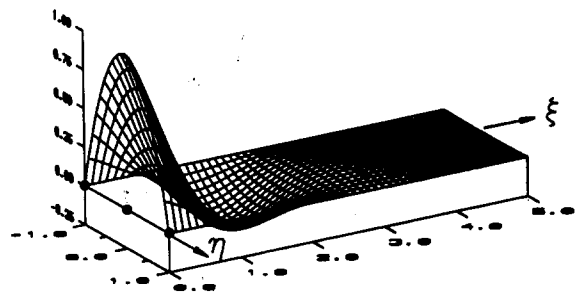
2) 동적무한요소의 형상함수(파동해석 문제)

$$N_j = e^{(x_i-x)/L} e^{ikx} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n-1} \left( \frac{x_l-x}{x_l-x_j} \right) \quad (2)$$

여기서  $L$ 은 임의의 상수이며,  $k$ 는 wave number 이며,  $j$ 는 요소의  $j$ 번째 자유도, 그리고  $n$ 은 요소의 유한방향으로의 차수이다. 그림 2는 그림 1에서 보인 3-절점 동적무한요소의 형상함수들을 나타낸 것이다.



(a) 바깥절점에 대응하는 형상함수



(b) 가운데 절점에 대응하는 형상함수

그림 2. 3-절점 동적무한요소의 형상함수

이제, 여러 방법에 의하여 형상함수가 구성되면 무한요소의 질량 및 강성행렬의 구성은 매개변수 방법을 사용하여 다음과 같이 형성할 수 있다.

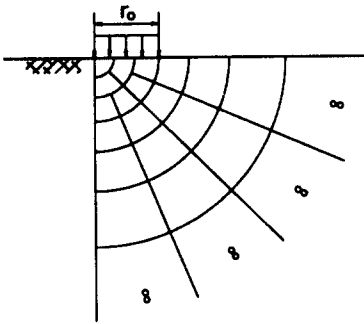
$$[M]^e = \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} [N]^T \rho [N] |J| d\xi d\eta \quad (3)$$

$$[K]^e = \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (4)$$

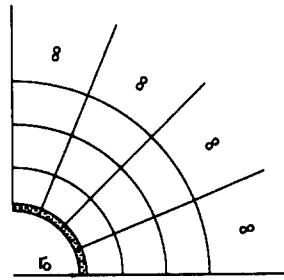
여기서  $[N]$ 은 무한요소의 형상함수행렬이고,  $[B]$ 는 변형률과 절점변위의 관계행렬이고,  $[D]$ 는 응력과 변형률의 관계행렬이며, 그리고  $|J|$ 는 자코비안 행렬식이다. 식 (3)과 (4)에 나타나는 적분은 유한방향( $\eta$ -방향)에 대하여 Gauss-Legendre 적분방법을 사용하고 무한방향( $\xi$ -방향)의 적분은 Gauss-Laguerre 적분방법[11]이나, Newton-Cote 적분방법[12]을 사용함으로써 계산될 수 있다.

#### 4. 무한요소를 이용한 지반공학문제의 해석

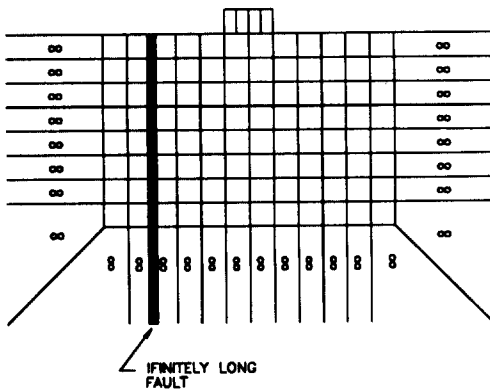
무한요소는 적은 자유도로 무한지반을 모형화할 수 있고, 비교적 정확한 해석결과를 주므로 여러 종류의 기초공학문제를 해석은 수단으로 사용되어져 왔다. 무한요소를 사용하여 해석되어온 기초공학문제는 주로, 지표면에서 가해지는 여러형태의 하중으로 인한 지반내의 응력과 변위를 해석하는 Boussinesq 문제[7-9], 매립된 지하구조물[10], 무한히 긴 단층이 존재하는 암반위에 설치된 기초 [13], 지반에 설치된 실제구조물[14] 등이었다. 그림 3은 각각의 해석에 사용되어진 모형들을 나타낸 것이다. 외부영역을 무한요소로 모형화하는 방법면에서는 같으나, 해석에 사용된 무한요소



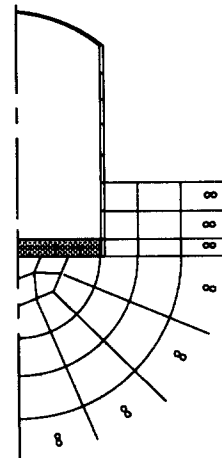
(a) 등분포 하중을 받는 탄성지반



(b) 매립된 지하구조물



(c) 단층이 존재하는 암반에 설치된 기초



(d) 지진 하중을 받는 원자력 발전소 격납 구조물

그림 3. 무한요소를 이용한 기초공학문제의 해석

의 형상함수는 해석하려는 문제의 외부영역거동을 잘 표현할 수 있도록 각각 다르게 구성되었다.

대개의 기초공학 문제들은 많은 계산시간을 요구하고, 지반의 반무한성을 고려하기 위한 특별한 기술을 요구한다. 제안된 방법들이 문제에 따라 장단점이 있지만, 무한요소는 해석적 외부영역해(A analytical Far-Field Solution)가 존재하지 않아 경계해법(Boundary Solution Method)을 적용하기 어려운 반무한 적층 지반(Layered Half Space) 과 같은 문제나, 경계적분법(Boundary Integral Method)의 사용이 어려운 비선형 점탄성 지반 문제등의 해석이 용이하다. 그러나, 모형시 큰 내부영역을 필요로 하는 깊은기초나 파일기초 문제 등의 해석에는 다소 많은 계산시간이 요구되는 단점이 있다.

## 5. 결론

본 고에서는 무한영역 문제를 해석하기 위하여 개발되어진 무한요소의 형성방법과 이를 이용한 기초공학 해석방법을 간략히 소개하였다.

무한영역문제를 해석하기 위한 대부분의 해석방법들이 특별한 해석과정을 필요로 했던 것에 반하여, 무한요소는 유한요소와 같은 범함수(Functional)로부터 유도되기 때문에 특별한 해석과정이 필요치 않으며, 기존의 유한요소 프로그램에 쉽게 연결되어질 수 있다. 무한요소는 적은 자유도수의 추가만으로 외부영역을 모형화할 수 있고, 에너지 발산효과가 고려된 형상함수를 사용함으로써 자동적으로 지반의 무한성을 고려할 수 있어서, 여러 형태의 기초공학 문제들의 해석에 사용되어지고 있다. 최근, 더욱 개선된 유한요소프로그램과 컴퓨터 기술의 발전으로 무한영역 문제의 해석에 무한요소를 이용하는 방법이 더욱 효과적 인 방법으로 되어 가고 있다.

## 참 고 문 헌

1. Wood W.L., "On the finite element solution of an exterior boundary value problem", Int. J. Num. Meth. Engng, 10, 885-891, 1976
2. Tzong T.-J. and Penzien J., "Hybrid modelling

- of soil-structure interaction in layered media", Report No.UCB/EERC-83/22, Earth. Engng. Research Center, 1983.
3. Nath B. "The w-plane finite element method for the solution of scalar field problems in two dimensional", Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 15, 361-379, 1980
4. Silvester P. and Hsieh M. S., "Finite-element Solution of 2-dimensional exterior-field problems", Proc. I.E.E., 118, No 12, 1743-1747, 1971
5. McDonald B. H. and Wexler A., "Finite-element solution of unbounded field problems", I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Technoques, Vol. MTT-20, NO 12, 841-847, 1972
6. Lysmer J. and Kuhlemeyer R. L., "Finite dynamic model for infinite media", J. of the Engng. Mech. Div. ASCE, 95, No. EM4, 859-877, 1969
7. Bettess P., "Infinite elements", Int. J. for Num. Methods in Engng., 11, 53-66, 1977
8. Bettess P., "More on infinite elements", Int. J. for Num. Methods in Engng., 15, 1613-1626, 1980
9. Lynn P.P. and Hadid H.A., "Infinite elements with  $1/r^n$  type decay", Int. J. for Num. Meth. in Engng, 17, 347-355, 1981
10. Beer G., "Infinite domain elements in finite element analysis of underground excavations", Int. J. for Num. and Analytical Meth. in Geom., Vol. 7, 1-7, 1983
11. Chow Y.K. and Smith I.M., "Static and periodic infinite solid elements", Int. J. for Num. Meth. in Engng., 17, 503-526, 1981
12. Medina F. "Modelling of soil-structure interaction by finite and infinite elements" Report NO. UCB/EERC-80/43, Earth. Engng. Research Center, 1980
13. Chuhan Z. and Chongbin Z., "Coupling method of finite and infinite elements for strip foundation wave problems", Earth. Enging. and Struc. Dyn. 15, 839-851, 1987
14. 양신추, 윤정방, 이인모, "지반-구조물의 상호작용 해석을 위한 무한요소", 전산구조공학회지, 제2권 3호, 1989.9, 85-95