

# 동적해석 모델링 기법

주 관 정\*

## 1. 일반개요

구조물을 모델링 할때는 일반적으로 두가지 모델링 단계를 밟게 된다. 물리적인 현상을 이해하고 규명하는 물리적인 모델링(physical modeling) 과 파악된 물리적인 특성들에 대한 유한요소 모델링(finite element modeling)의 과정을 거쳐야 한다.

여기서 물리적인 모델링이란, 구조물의 타입, 재질의 특성, 경계조건은 무엇이며, 어떤 타입의 하중이 어떻게 작용하며, 구조체는 어떻게 거동/변형할 것인가 등등의 제반사항을 파악함을 의미한다. 이외에도 구조체가 어느 부분에서 어떻게 항복하는가 하는 문제도 예측해야 한다. 유한요소 모델링이란, 위에서 파악된 사항에 대하여 finite element type은 무엇을 사용할 것이며, mesh size는 어느부분에 얼마로 할 것인가. 또한 시간영역에 대한 모델링은 어떻게 할 것인가를 결정함을 의미한다.

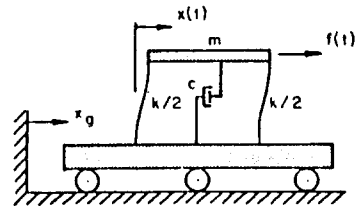
특히, 동적유한요소해석을 행하기 위해서는 구조물에 대한 다음 사항들에 유념하여야 한다.

- 관성에 관한 성질(inertia properties)
- 댐핑에 관한 특성
- 하중의 동력학적 특징(작용하중의 주파수 등)
- 유한요소 분할(spatial and temporal discretiz

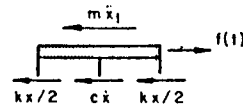
ation)

- 변형속도 변화에 따른 재질의 변화 특성
- 동적해석 방법의 선택

## 2. 동적해석 모델



a) Single-DOF System



b) Free-Body Diagram

그림1. 1자유도(SDOF) 시스템

그림1에 예시된 동적해석의 가장 단순한 1자유도(SDOF)시스템을 예를 들면, 이 모델의 동적운동은 관성력( $m\ddot{x} + m\ddot{x}_g$ )과 댐핑에 의한 힘( $c\dot{x}$ )과 탄성 스프링에 의한 힘( $kx$ )과 외부에서 작용하는 시간에 따라 변화하는 하중  $f(t)$ 이 평형상태를 이루며 거동하게 된다.

\* 정희원, 삼성전기 종합연구소 CAD/CAM실

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) - m\ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

위식에서 문자위의 점(dot)은 시간에 대한 미분을 의미한다. 즉,  $\dot{x}$ 는 속도,  $\ddot{x}$ 는 가속도를 나타낸다.

다자유도(MDOF)시스템에 대한 운동평형방정식은 다음과 같은 시스템 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) - M\ddot{x}_g(t) \quad (2)$$

$M$ : 질량 매트릭스

$C$ : 댐핑 매트릭스

$K$ : 강성 매트릭스

$I$ : 지지점 자유도의 가속도에 대한 영향계수 벡터(=  $K^{-1}K_g$ )

위에서  $K_g$ 는 지지점 자유도에 대한 구조물 지지부위의 강성 매트릭스를 나타낸다. 그림1의 경우에서는  $k_g = k$ 가 되므로 영향계수는 1이 되므로 식(1)이 성립하게 된다.  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ 는 자유도의 (절점의) 변위, 속도, 가속도 벡터를 각각 의미한다.

식(2)로 부터, 구조물의 동적거동은 결국  $M$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $F(t)$ , 요소분할 (spatial discretization)에 의해 특징지어 지므로, 이들 계수 매트릭스 형성에 관한 모델링 지식은 매우 중요하다.

## 2.1 질량모델(Mass Models)

질량을 산정하는 방법은 집중질량 (lumped mass)과 일관성 질량 (consistent mass) 두가지가 있다. 유한요소법을 이용할때에 계산상의 경제적인 면을 고려하여 질량을 절점에 할당하는 집중질량을 많이 사용하곤 하는데 집중질량을 사용하는 경우의 물리적인 의미는 어느 자유도의 가속도는 그 자유도의 관성력에만 영향을 주고 다른 자유도의 관성력에는 전혀 영향을 주지 않음을 의미한다. 집중 질량으로 질량을 모델링할 경우에는, 모델전체에 있는 집중질량의 합은 구조물 전체질량의 크기와 같아야 하며, 구조물의 동력학적 강체운동이 모델의 운동과 같도록 모델과 구조물의 질량중심이 가능한 같도록 하여야 한다. 아울러 집중질량들에 대한 질량1차 모멘트가 실구조물

의 질량1차 모멘트와 되도록 같도록 한다.

질량모델링시의 주의사항은 아래와 같다.

1) 구조체 내부에 놓인, 비교적 강체 (rigid body)로 간주할 수 있는 중량이 큰 기계같은 비구조체(nonstructural elements)는 집중질량으로 모델링 한다. 상용 구조해석 컴퓨터 프로그램에는 offset coordinate option을 이용하므로써 이와같은 비구조체의 집중질량을 해당 자유도에 lumping시킬 수 있도록 되어 있다.

2) 집중질량으로 구조물의 질량을 모델링하면, 실구조물의 관성특성치를 과잉산정하게 된다. 따라서, 집중질량모델을 사용해서 계산한 주파수는 실구조물의 주파수보다 작은 값을 갖는다. 반면에, 보통사용하는(변위법에 의한) 유한요소법에 의한 formulation은 upper bound solution을 제공한다. 즉, 유한요소법에 의한 모델의 실구조물보다 더욱 강하게되므로, 결과적으로 보면 집중질량 모델을 사용하더라도 위의 2가지 효과가 상호 보완적으로 작용하므로 관성특성 과도 산정으로 인한 동적거동에 관한 계산오차는 매우 적게된다. 구조물의 mode shape, 응력, 변형을 등의 정확도 측면에서 종합적으로 비교해 보면 일관성 질량 모델이 집중질량 모델보다 낫다고 볼 수 있으나, 집중질량 모델을 이용하는 경우에 비해 동적문제해석시간이 매우 길어지게 되므로, 비선형 동적해석문제와 같은 경우에는 이점을 고려해야 한다.

3) 평형방정시스템(식(2))의 해법으로는 직접해법(direct method)과 순환해법(iterative method)이 있는데, 직접해법의 경우는 일반적으로 질량 자유도수의 제한이 있게되므로 실구조물의 동적거동과 유사한 거동응답을 나타낼 수 있도록 큰 질량절점만을 선택해야 한다.

4) 질량이 없는 자유도는 평형방정시스템을 풀기 전에 static condensation에 의해 condensed out 시켜야 한다.

5) 질량절점(질량자유도)을 선택할때에 질량이 큰 절점순으로 또는 질량 대 강성비가 큰 절점순으로 선택한다. 실제에 있어서 주절점(master nodes)은 전체절점수의 10~20% 정도로 선택한다.

## 2.2 댐핑모델(Damping Models)

모든 구조시스템은 동력학적 거동을 하면서 에너지를 잃고 있다. 이는 시스템이 운동(거동)을 하므로써 기계적인 에너지가 열의 형태로 소실(energy dissipation)되기 때문에 시스템의 kinetic energy와 potential energy의 합이 시간이 경과함에 따라 감소되는 현상으로 나타난다.

진동 시스템에 대한 갖가지 종류의 에너지소실(흡수)의 형태는 댐핑으로 표기하게 되는데 이 댐핑의 종류 즉, 주요에너지의 소실은 다음과 같이 분류하고 있다.

1) Viscous 댐핑 : 점성이 있는 유체내에서 작용하는 충격완충기(shock absorbers) 같은 dashpot가 viscous 댐핑의 한 예인데 공기나 기름과 같은 유체내에서 진동하는 시스템에서 유발되는 에너지소실.

2) Coulomb 댐핑 : 서로 접촉하고 있는 구조체들간의 상대운동으로 인한 마찰에 의한 에너지소실. 철구조물에 사용되는 볼트나 리벳연결부위에서도 이런 현상이 나타남.

3) Hysteretic 댐핑 : 재질의 항복강도를 넘는 응력을 받을때 재질의 plastic work에 의해 소실되는 에너지.(예 : steel)

4) Radiation 댐핑 : 연속매체를 통한 진행되는 wave propagation 과정에서의 에너지소실로서 주로 구조물과 다공질연속매체간의 상호작용 과정에서 크게 나타남.

구조시스템에 있어서 댐핑량이 매우 적은 경우 즉, 한계댐핑(critical damping)의 2% 이하인 경우에는 댐핑영향은 무시할 만큼 작다. 그러나 하중의 가진주파수와 중요한 자유진동 주파수(구조물의)의 비 즉, frequency ratio가 0.5~2 사이인 경우에는 적은 댐핑이라 할지라도 댐핑의 영향이 클 수 있으므로 댐핑을 포함시켜 해석함이 보통이다.

댐핑값이 작고 공진주파수 크기에 근접하는 주파수성분을 갖는 동적하중에 대해서는 구조시스템의 거동이 매우 예민하게 반응하므로 이런 경우는 특히 댐핑의 산정에 유의하여야 한다.(공진주파수의 산정에서의 10% 오차가 시스템거동에

100% 이상의 오차를 초래할 수도 있다.)

## 2.3 강성모델(Stiffness Models)

구조체의 강성모델링 과정에서도 매우 주의를 기울여야 한다. 강성의 적은량의 변화는 구조물 고유진동 주파수의 변화를 초래하므로 동적하중의 주파수성분의 스펙트럼 분포에 따라서 큰 변화의 response를 초래할 수도 있다. 일반적으로, 이러한 영향 때문에, 구조요소들간의 연결부위, 구조물의 지지점 및 개개의 구조요소들 강도에 대해 상한치와 하한치를 설정하여 구조물의 거동을 예측한다.

강성모델링시의 주요사항은 다음과 같다.

1) 구조요소와 주파수(고유진동수)군이 정해진 하한 임계주파수(cut-off frequencies) 이상이면 강체로 간주할 수 있다.(이러한 구조요소는 모델링시 절점질량으로 간주한다.) 하한 임계주파수는 작용하는 하중의 진동주파수분포의 대역폭(band)에 따라 다를 수 있으나 일반적으로 200~250 cps를 사용한다.

2) 구조물의 다른 부위보다 강도가 매우 적은 구조요소나 구조 부착물은 비구조체(nonstructural components)로 모델링하고, 동적해석시 단지 그들의 질량만 포함시켜 해석한다. Piping insulation 이 이에대한 예다.

3) 충격하중이나 폭발하중같은 변형률속도를 크게 야기시키는 하중들에 대해서는 정력학적 하중상태 하에서와는 다르게 재질특성치를 보상해 주어야 한다. 지진, 풍하중과 같은 동력학적 하중 하에서는 구조적인 철근과 콘크리트의 강도(strength, stiffness)가 10%~20% 증가된 상태로 거동하는게 보통이다.

4) 기초지반의 효과를 해석에 포함시킬 경우에는 지반의 토질특성이 작용하는 주파수나 진폭의 크기에 크게 좌우된다. 따라서 비선형문제가 됨은 물론이다. 실제 설계때는 토질특성의 상한치와 하한치 각각의 경우를 해석하여 토질의 영향을 예측한다.

## 2.4 요소분할(Spatial Discretization)

동적해석문제에 있어서 유한요소분할은 분할된 유한요소모델이 실구조물의 mode shapes들이 정확히 표현(재현)될 수 있도록 해야한다. 이러한 기본조건을 좀더 구체화 시키면,

1) 작용하는 동적하중의 주파수 성분들이 매우 낮을 경우 실구조물의 lower modes만이 중요하므로(가진되므로) 유한요소의 크기를 너무 작게할 필요는 없다.

2) 상당히 고주파성분의 주파수를 갖는 하중의 경우는 유한요소모델이 고주파에 상응하는 mode shape을 표현할 수 있을 정도로 유한요소의 크기를 사용해야 한다.

결국 유한요소 모델은 작용하는 하중이나 예상되는 하중에 적합하도록(compatible) 요소분할 되어야 한다.

유한요소의 크기를 정하는 유용한 기준은 동적하중의 중요한 주파수 성분의 파장(wave length)이다. 요소의 크기가 파장의 1/8정도 이하가 되면 어느정도 정확한 결과를 얻을 수 있다.

## 3. 모델링 가이드

1) 구조물의 비틀림 거동(torsional response)이 중요한 경우는 구조물을 3차원으로 모델링하여야 한다. 구조물의 질량중심과 강성중심간의 거리가 크면 클수록 비틀림 현상이 현저해진다. 빌딩내부에 전단벽들이 있을때 이런현상을 보게된다.(그림2 참조)

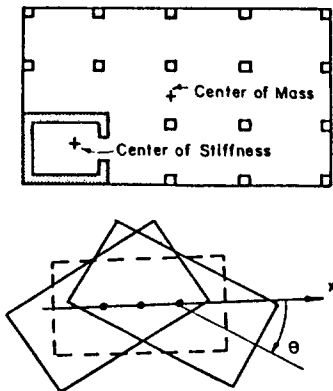


그림2. 비틀림 진동

2) 비틀림 주파수가 중요 횡방향 진동 주파수들 중의 어느 하나의 값에 가까이 접근하게되면, 횡방향하중만 작용하더라도 구조물은 횡방향으로 진동할뿐 아니라 비틀림 진동도 함께 발생한다.

빌딩의 주위에 column들이 좁은 간격으로 배치된 형태의 tube-like 구조물의 경우에는 비틀림 진동주파수가 횡방향 진동주파수보다 훨씬 크기 때문에 이와같은 coupling 진동현상은 좀처럼 발생하지 않는다.

3) 구조물의 유한요소분할시에 요소의 크기는 하중에 의해 야기되는 중요한 진동 mode shapes을 충분히 재현할 수 있을 만큼 작아야 한다.

구조물내의 어느 구조요소의 fundamental frequency가 구조물의 고유진동주파수보다 훨씬 크다면 그 구조요소는 강체질량절점으로 간주해도 된다. 이때 기준이 되는 cut-off frequency는, 기계류와 같은 구조요소의 충격해석시에는 200~250Hz가 쓰이고, 지진공학의 경우에는 333Hz가 쓰인다.

4) 어느 구조요소에 의해 지지되는 집중질량하중이 있는 경우, 이 질량이 지지구조요소의 자체 질량과 비교하여 훨씬크면, 그 구조요소의 자체 질량은 무시해도 동적거동은 별다른 차이가 없다. 그러나 그림3에 나타나 있는 바와 같이 보요소에 의해 모터가 지지되어 있는 경우처럼 집중질량체가 가진주파수  $\omega_p$ 를 갖는 가진력을 갖는 경우, 이 가진주파수가 보요소의 fundamental frequency

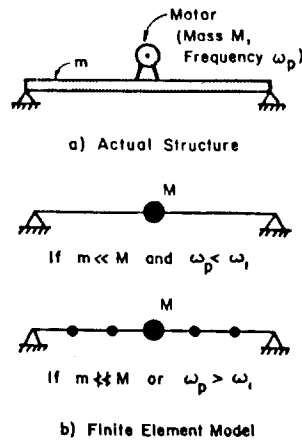


그림3. 집중질량과 보요소

ncy보다 크면 보의 자체질량을 포함시켜(유한요소 해석시) 해석해야 한다.

5) 가해지는 하중의 주파수대역을 알 수 있다면 이로부터 집중질량절점의 수나 일관성질량 산출을 위한 유한요소의 크기를 산출할 수 있다. 단순지지된 보에 있어서 등분포질량  $m$ , bending stiffness  $EI$ , 하중의 주파수 대역의 상한치에 근접한 주파수의 값이  $f$ 일때, 그리고 이 주파수가  $n$ 번째 주파수 일때, 질량절점의 수 즉, span length 의 길이는(그림4 참조).

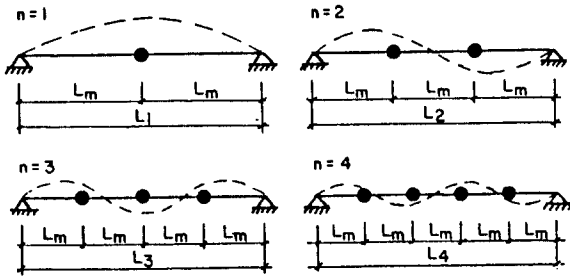


그림4. 질량절점 모델링

$$L_n = \frac{n\pi}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (3)$$

긴 파이프 시스템의 모델링시 이런 산출식이 널리 쓰인다.

6) 충격이나 폭발과 같은 shock type 하중이 작용하는 경우 유한요소의 크기는 파장의 1/4보다 작도록 해야 만족할만한 결과를 얻는다.

탄성연속체내에서의 파장은

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E}{m}} = \frac{c}{\omega} \quad (4)$$

여기서  $\omega$ : 하중의 주파수(Hz)

$E$ : 탄성계수

$m$ : 질량밀도

$c$ : wave speed

7) 풍하중이나 지진하중을 받는 고층건물(또는 다층건물)의 거동은 건물의 몇몇 lowest modes 에 의해서 영향을 받게되고 특징지어진다. Fundamental mode의 영향이 빌딩거동의 90% 정도까지도 된다. 그러나 각층별 전단변위등을 파악하고자 할 경우에는 좀더 higher modes를 해석에

포함시켜야 한다. 일반적으로 십여개의 modes 넘지 않도록 한다.

8) 동적해석시 isoparametric plate나 shell 요소를 사용할때는 reduced integration을 사용하면 더 좋은결과를 얻을 수 있고 또한 자유진동해석을 할 경우에는 비적합(incompatible)요소를 사용하면 좋으나 모달 응력이나 모달 변형률을 알고자 할 경우에는 적합요소를 사용함이 좋다.

9) 기계회전과 같은 하모닉 하중을 받는 구조물해석은 steady state 진동해석을 해서 구조물의 고유진동모드가 공진되지 않도록 구조물을 설계하게 된다. 특히, 댐핑을 포함하지 않는 steady state 진동해석의 경우에는 정력학 해석용 컴퓨터 프로그램을 이용해서 풀 수도 있다. 정력학 해석용 프로그램을 이용할 경우에는 구조물 각각의 자유도에 스프링을 인위적으로(경계요소 지정 option을 이용해서) 지정해 주어야 한다. 스프링 상수는 " $-\omega_p^2 M_i$ "가 되도록 해야한다. 여기서,  $\omega_p$ 는 가진 주파수이고,  $M_i$ 는 자유도 "i"에 관계된 질량(tributary mass)을 의미한다.

10) 모드 중첩법(modal superposition)에 의한 time history analysis는 주로 선형 transient analysis에 적합하다. 식(2)를 direct time integration으로 풀 경우는 모드와 주파수 계산없이 결과를 얻을 수 있으나 작용하는 외부하중에 대한 구조설계를 위해서는 모드와 주파수 분석이 필요하므로, 실제에 있어서는 모드중첩법이 효율적일 수 있다.

11) 해석에 포함시키려는 모드의 수는 구조물의 거동에 결정적인 역할을 하는(공진주파수에 가까운) 하중의 주파수중에서 최대 주파수에 의해 좌우된다고 할 수 있다.

하중에 대한 response spectrum이나 frequency spectrum이 있으면 영향을 크게 미치는 주파수들을 쉽게 알 수 있다.

12) 일반적으로 구조물의 lowest mode 10개 정도를 동적해석에 포함시키나 하중의 주파수 대역폭에 따라서 높은 주파수를 포함시켜야될지를 결정할 수 있다.

13) Direct time integration시의 time step size는 해석에 포함되는 최대주파수로 부터 결정할 수 있고 또는 작용하중의 시간에 따른 변화정도를

고려하여야 한다.

$$\Delta t \leq \min(\Delta t_s, \frac{T_m}{10}) \quad (5)$$

여기서,  $\Delta t_s$ : 하중의 시간함수 입력시의 sampling point들간의 간격.

$T_m$ : 해석에 포함되는 최고 모드의 주기

만일 Newmark method 등과 같은 unconditionally stable implicit 알고리즘을 사용할 경우에는 time step size는 크게해도 수치적분상의 stability에는 문제는 없으나, 결과의 정확도를 고려하여 위와 같은 제한을 만족시켜야 한다.

14) 구조물의 고유진동모드의 주파수들이 좁은 주파수 대역폭에 밀집되어 있는 경우에는 일반적으로, 해석시 많은 모드를 포함시켜야 한다. 따라서 direct time integration에 의한 time history analysis가 바람직하다. 매우 높은 주파수를 포함할수록 time step size가 작아야 하므로 explicit integration 알고리즘이 경제적이다. Direct time integration은 비선형 동적 해석시에 가장 많이 쓰인다.

15) Response spectrum method는 time history analysis처럼 정확도를 갖지 못하지만, 실제적으로, 정확도를 높이 요구하지 않는 경우에는 이방법이 적합하다.

Time history analysis에 비해 계산시간이 훨씬 적게 든다. 그러나 이방법을 적용하려면 design spectrum이 가용해야 된다.

16) 만일 구조물의 유한요소모델의 고유진동수가 매우 넓게 주파수대역에 분포하는 경우, 그들

각각의 고유진동수에 대한 spectrum response들을 SRSS(the square root of the sum of the square) method를 이용하곤 한다.

17) 동적해석을 행할때(행한후)에는 구조물의 강도특성이 적절히 모델링 되었는가를 확인하기 위해서 반드시 정적해석을 실시해야 한다.

18) 구조물의 실험적인 측정 데이터가 가용한 경우에는 실험데이터와 유한요소모델의 모달특성치 즉, 진동모드와 진동주파수가 잘 부합될때까지 구조물의 유한요소모델의 질량이나 강성을 적절히 (정확히) 모델링하는데 활용할 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. K.J. Bathe and E.L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
2. C. Meyer, Finite Element Idealization, ASCE, New York, 1987.
3. R.R. Craig, Jr., Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods, John Wiley & Sons, New York, 1981.
4. T.J.R. Hughes, The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
5. R.W. Clough and J. Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, Inc., N.Y., 1975.
6. R.D. Cook et al, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.