

고압 나트륨 램프의 방사에너지 계산 간략화에 관한 연구

A Study on the Simplification of the Calculation of the
Radiation Energy of a High Pressure Sodium Lamp

池 哲 根* · 金 昌 燮**
(Chol-kon Chee · Chaong-Seob Kim)

요 약

본 논문은 방사 지배 아아크 플라즈마에서의 광속과 방사에너지 계산을 간략화하는 기법을 새로이 제안하고 있다. 기존의 모델의 문제점은 아아크 플라즈마내의 계 특성중 특히 국부적 광속과 방사에너지를 계산하기 위하여 전체 플라즈마 공간에 대하여 3중 적분식을 수치해석적으로 풀어야 하므로 상당한 계산시간이 요구된다는 점이다. 본 논문은 이러한 방사 특성과 전체 플라즈마의 상태와의 관계를 미리 계산하고 이를 데이터화함으로써 국부적인 방사 특성의 계산을 간략화할 수 있는 새로운 방법을 제안하고 있다.

Abstract

This paper proposes a simplifying model for the calculation of the radiant flux and radiation energy in an RD(Radiation Dominated) arcplasma. Defects of the previous models are that the radiant flux and radiation energy must be numerically solved by the three dimensional integration, and these calculations demand enormous computing time. Thses attribute to the global properties of radiation transfer. This paper suggests a simple calculation technique of radiation characteristics by considerig the relation between the plasma states and the radiation transfer process and by the systematic tabulation of the relation.

1. 서 론

HPS(High Pressure Sodium) 램프는 나트륨 중

기의 전기적 방전으로 얻어지는 방사 에너지를 이
요하는 고효율 고광도 방전 램프 중의 하나이다.
나트륨 증기에서의 경우 아아크 방전시 발생하는
광출력에서는 나트륨 공진선 D선의 역할이 매우
지배적이며 특히 D선이 가시영역에 있으므로 공진

*正會員 : 서울大 電氣工學科 教授 · 工博

**正會員 : 서울 大學院 電氣工學科 · 工博

선의 광효율에 대한 기여는 매우 높다.

HPS램프의 방사특성에서 관찰되는 중요한 현상으로는 매우 강한 선퍼짐현상과 자기흡수현상 등이 있다. 고압 아아크 방전램프에서의 제 방전특성을 방사전달 과정까지 고려하여 연구한 모델링은 Lowke, Church, Chalek, Dakin, de Groot 등에 의하여 제안되고 있다.^{1)~6)}

방사전달식에 의한 방법은 이론적 엄밀성에서는 뛰어나지만 상당한 계산상의 문제점을 지니고 있다. Lowke의 연구 등 앞서 연구된 내용에 따르면 수치 계산상의 매 시간 단계에서, 한 점에서의 방사 에너지를 구하기 위하여 3번의 적분이 필요한 방사전달식을 풀어야 하였다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 Trigt에 의하여 제안된 escape factor에 의한 방법은 간략화되어진 효과적인 방법이지만 방사특성의 전반적인 이해에는 한계가 있다. 본 논문에서는 방사전달식에 의한 방법을 이용하면서 계산상의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 모델링을 제시하고자 한다.

2. 본 론

2.1 방사 지배 아아크의 방사 특성

HPS램프 발광관 내의 아아크는 가장 전형적인 고압 RD(Radiation Dominated) 아아크이다. RD 아아크의 스펙트럼은 봉입기체의 종류와 압력, 방전관의 기하학적 구조, 그리고 온도분포에 의하여 결정되며 방사전달식(Radiative Transfer Equation)에 의하여 정량적으로 계산된다. 플라즈마 내에서의 광자의 전달과정을 설명하기 위해 다음의 방사전달식을 이용해야 한다.

$$(\Omega \cdot \nabla) I_\nu = -k_\nu I_\nu + k_\nu S_\nu \quad (1)$$

여기에서 K_ν : 흡수계수
 I_ν : 방사세기
 S_ν : 방사 Source

국부적 열역학적 평형상태에서는 S는 Planck 함수로 표현된다.

2.1.1 흡수 계수

흡수현상은 유도방사(induced emission)와 함께 발생하므로 다음의 유효흡수계수로 표현한다.⁷⁾

$K(\nu, \vec{r})$ = 단위길이 진행시 광자의 흡수발생 빈도

$$\begin{aligned} & \text{'' '' 유도방사발생 빈도} \\ & = \sigma_{m\bar{n}} N_n(\vec{r}) - \sigma_{n\bar{m}} N_m(\vec{r}) \quad (2) \\ & = 2\pi^2 r_0 c f_{mn} N_n \left[1 - \exp\left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\} \right] L(\nu, \vec{r}) \\ & \propto N_n f_{mn} \end{aligned}$$

공진선 D선은 Doublet 선으로 589.00nm($3^2S_{1/2} - 3^2P_{3/2}$)의 D₁선과 589.59[nm]($3^2S_{1/2} - 3^2P_{1/2}$)의 D₂선으로 구성되어 있다. 공진선 D선 경우의 주된 선퍼짐 기제는 공진 선퍼짐에 의하므로 line profile은 다음의 Lorentzian profile을 갖는다.

$$L(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{(\Delta\nu_0/2)}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu_0/2)^2} \quad (3)$$

그러나, 공진선 D선의 경우 버피가스인 수은증기로 인하여 이중입자간에 존재하는 van der Waals 선퍼짐 현상이 관찰되므로 D선의 정규화된 line profile에는 van der shift를 보이고 있다. 이러한 나트륨과 수은에 의한 red wing에서의 추가적인 선퍼짐은 다음의 식에 의하여 정량화 되어 진다.⁸⁾

$$\begin{aligned} W(\nu) &= \frac{A_w}{(\nu_0i - \nu)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\pi A_w^2}{\nu_0i - \nu}\right) \nu < \nu_0i \\ &= 0 \quad \nu > \nu_0i \quad (4) \end{aligned}$$

$$A_w = \frac{2}{3} \pi C_6^{1/2} n_{Hg}$$

이러한 van der Waals 선퍼짐까지 고려하면 흡수 계수에 필요한 정규화 line profile L(ν)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \nu > \nu_0i L_i(\nu) &= \frac{1}{\pi} \frac{(\Delta\nu_i/2)}{(\nu_0i - \nu)^2 + (\Delta\nu_i/2)^2} \quad (5) \\ \nu < \nu_0i L_i(\nu) &= \frac{1}{\pi} \frac{\Delta\nu_i/2}{(\nu_0i)^2 + (\Delta\nu_i/2)^2} + W(\nu) \end{aligned}$$

2.1.2 광속과 방사에너지

총 방사계수 ϵ_N (net emission coefficient)와 평균 방사세기 J_ν 는 각각 다음과 같다.

$$\epsilon_N = \nabla \cdot \vec{F}_R = 4\pi \int (\epsilon_\nu - J_\nu K_\nu) d\nu$$

$$J_\nu = \frac{1}{4} \pi \int I_\nu d\Omega \quad (6)$$

Church는 광자전달식으로부터 무한 원통형 플라즈마에서의 반경 방향으로의 광속 F_r 를 구하였고, Lowke는 같은 조건에서의 평균 방사세기를 다음과 같이 각각 구하였다.⁹⁾

$$F_r(r) = -4 \int d\nu \iint_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi dz \cos\phi K_\nu B_\nu G_1(r) \quad (7)$$

$$J_\nu(r) = \frac{1}{\pi} \iint_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi dz K_\nu B_\nu G_0(r) \quad (8)$$

$$G_m(r) = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^m \exp\left[-\frac{\tau}{\sin\theta}\right] d\theta \quad (9)$$

$$\tau = \int_0^z K_\nu(z') dz' \quad (10)$$

2.2 방사 에너지의 계산

방사 에너지는 공진선과 비공진선으로 구성되며 이 종류의 방사는 플라즈마 내에서의 작용이 매우 상이하므로 구분해서 취급한다. 우선 공진선의 방사 에너지의 취급은 다음과 같다.

2.2.1 공진선 D선의 방사에너지

플라즈마 내에서의 방사 에너지는 식(7)에 의하여 구해진다. 그러나 광속 F_r 를 구하기 위하여는 주어진 위치에서 전체 플라즈마 공간에 대한 적분을 수행해야 하며 이 때 필요한 적분은 3차원 적분이 되므로 수치 해석상에 문제점이 발생하게 된다. 본연구에서는 이러한 계산상의 문제점을 극복하기 위하여 다음과 같은 방법을 제시하고자 한다. 주어진 플라즈마 내에서 특정 위치에서의 반경 방향으로의 광속 분포에 영향을 주는 요소는 다음과 같이 정리된다.

중심축 온도	T_a
관벽 온도	T_w
온도 분포 계수	nT
나트륨 증기압	$P-Na$
수은 증기압	$P-Hg$
방전관 반경	R

그러므로, 반경 방향의 특정위치에서의 방사 에

너지는 위의 6가지 변인에 의하여 결정될 수 있고 이때 방사 에너지는 식(7)-(10)에 의하여 구해진다.

본 연구에서는 반경 r 에서의 방사 에너지를 다음의 trial 함수의 형태로 표현하였다.

$$\begin{aligned}
 U_{i0} = & U_{i0}(T_a^*, T_w^*, nT^*, P, Na^*, P, Hg^*, R^*) \\
 & \times \text{function1}(\Delta T_a) \\
 & \times \text{function2}(\Delta T_w) \\
 & \times \text{function3}(\Delta nT) \\
 & \times \text{function4}(\Delta P - Na) \\
 & \times \text{function5}(\Delta P - Hg) \\
 & \times \text{function6}(\Delta R) \\
 \Delta T_a = & T_a - T_a^* \\
 \Delta T_w = & T_w - T_w^* \\
 \Delta nT = & nT - nT^* \\
 \Delta P - Na = & P - Na - P^* - Na^* \\
 \Delta P - Hg = & P - Hg - P^* - Hg^* \\
 \Delta R = & R - R^* \\
 & * : \text{표준상태}
 \end{aligned} \quad (11)$$

표준 상태하에서의 방사 에너지 U_{i0} 를 반경 방향으로 나타내면 그림 1과 같은 결과를 얻을 수 있다.

반경 방향의 각 node에서의 방사 에너지 U_{i0} 의 중심축 온도 T_a 에 대한 의존성(T_a dependence)은 $\text{function1}(\Delta T_a)$ 로 표현되며 $\text{function1}(\Delta T_a)$ 로 표현되며 $\text{function1}(\Delta T_a)$ 를 얻는 과정도 다음과 같다. T_a 를 제외한 나머지 변인도 표준상태로 놓으면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

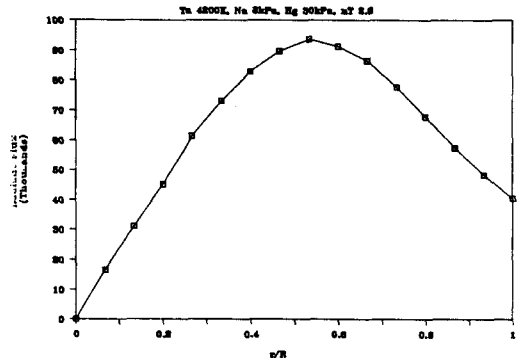


그림 1. 표준 상태에서의 광속 분포의 계산 결과
Fig. 1. Calculated radiant flux density profile under the standard condition.

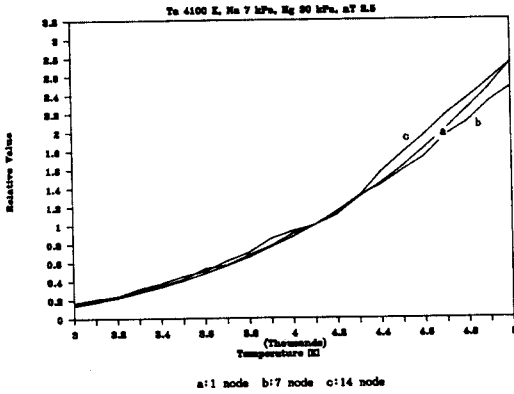


그림 2. 표준 상태 방사에너지와 중심축 온도에 의한 방사에너지 비교.

Fig. 2. Comparison of the standard radiation energy and the radiation energy as a function of axis temperature.

$$\text{function}(\Delta T_A) = \frac{U_{io}(\Delta T_A)}{U_{io}^*(T_A^*)} \quad (12)$$

Ta를 변화시키면서 Uio를 구한다. 계산결과 Uio/Uio*의 중심축 온도 Ta에 대한 의존성을 반경 방향의 각 node별로 표현하면 다음 그림 2와 같다. 또한 나머지 변인들에 대한 방사에너지의 의존성도 위와 같은 과정에 의하여 구할 수 있다.

위와 같은 과정에 의하여 방사 에너지의 앞에 소개된 6개 변인에 대한 의존성을 확인할 수 있다. 위의 결과에서 볼 수 있듯이 대부분의 의존성은 2차 다항식꼴로 회귀가 될 수 있으나 실제 계산과정에서의 계산시간을 짧게 하기 위하여 위의 의존성을 회귀식으로 정리하지 않고 각 node별 그리고 100[K]간격의 온도별의 데이터로 정리하여 실제 계산에서는 interpolation에 의하여 각 node의 방사에너지 Uio를 구하였다. 예를 들면

$$\text{function}(\Delta T_A) = a_n[i, j] + (a_n[i, j] - a_n[i, j + 1]) \times \left(\frac{T_A}{100} - \text{trunc}\left(\frac{T_A}{100}\right) \right) \quad (13)$$

과 같다.

이러한 방사에너지 계산의 간략화 과정의 타당성을 검증하기 위하여 간략화 모델링에 의한 결과와 직접계산에 의한 결과를 그림 3에서 비교하였다. 그 결과 간략화 모델에 의한 추정치와 계산치가 매

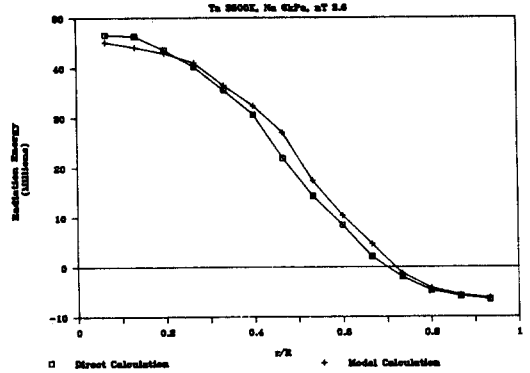


그림 3. 방사에너지 간략화 모델링에 의한 방사에너지 계산결과와 광전달식에 의하여 계산된 방사에너지 비교.

Fig. 3. Comparison of the radiation energies calculated by the simplified modelling and by original equations.

우 잘 맞고있음을 알 수 있다.

2.2.2 비공진선의 방사에너지

de Groot와 van Vliet, 그리고 Waszink 등은 escape factor 방법에 의하여 공진선과 비공진선의 방사에너지를 계산한 바 있고 de Groot와 van Vliet는 전형적인 HPS 램프의 정격 동작 중에서 비공진선의 escape factor의 값이 약 0.45에 해당된다는 연구 결과를 발표한 바 있다. 본연구에서는 이 결과를 이용하였다. HPS램프의 비공진선의 방사에너지는 다음과 같다.¹⁰⁾

$$U = nh\nu\theta \quad \theta = 0.45 \quad A : \text{자발 천이 확률 계수} \quad \theta : \text{escape factor} \quad (14)$$

2.3 HPS램프의 해석을 위한 지배방정식의 구성

RD아아크 플라즈마의 방사 특성과 플라즈마의 온도, 압력의 역학적 특성을 해석하기 위하여는 광자와 입자의 상호작용을 고려한 모델링이 요구된다. HPS램프의 RD아아크 플라즈마의 특성을 모델화하기 위하여 주요한 전제조건을 가정하면 다음과 같다.

- (1) 방전관 내에서 국부적 열역학적 평행상태를 가정한다.
- (2) 램프는 수직 점등이며, 방전에 관계된 제 특성은 수직 방향으로 모두 균일하고, 관중심에 대하여 반경방향으로 대칭이다.
- (3) 방전관 내의 가스 압력은 공간적으로 균일하다. ($\nabla P=0$)
- (4) 방전관 재질인 PCA의 열 관성이 크므로 관벽온도는 방전아아크의 변화에 관계없이 항상 일정하다.
- (5) 방전관 내의 기체는 이상 기체로 본다.
- (6) 램프의 작동중 증기화된 수은과 나트륨의 총량과 구성비는 일정하다.

2.3.1 지배 방정식 구성

Boltzmann식으로부터 HPS램프의 해석을 위한 지배방정식을 구성하면 다음과 같다.

에너지 보존식

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma E^2 - \nabla \cdot (k \nabla T) - U_{rad} \quad (15)$$

기체 총 질량의 상수화

$$M = \int \rho 2\pi r dr \quad (16)$$

상태방정식

$$P = \rho RT \quad (17)$$

이 연립 편미분 방정식의 주변 경계조건은 다음과 같다.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T = \text{const} \Big|_{r=R} \quad (18)$$

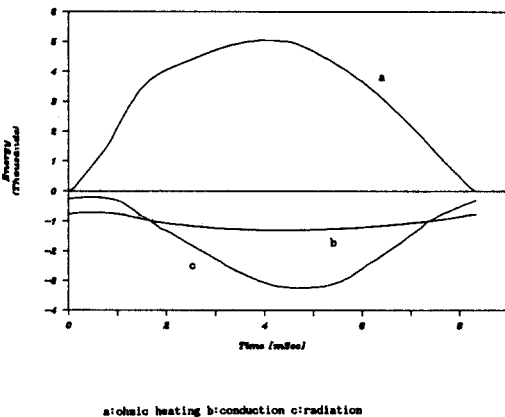


그림 4. 220V 인가시 계산된 에너지 분포
 Fig. 4. Calculated energy distributions under 220V

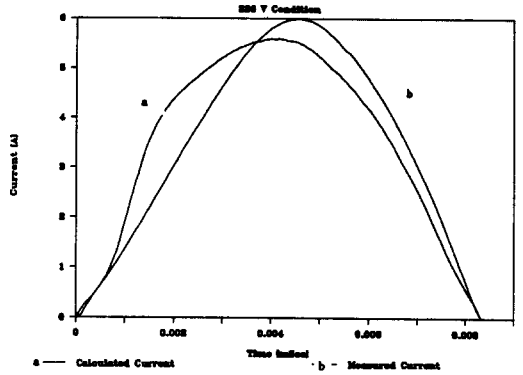


그림 5. 220V 인가시 전류의 계산치와 측정치 비교
 Fig. 5. Comparison between calculated and measured current under 220 V.

2.3.2 계산 결과

방사에너지 계산의 간략화 기법을 지배방정식에 적용하여 HPS램프의 시간에 따른 에너지 분포 특성을 계산하면 그림 4와 같다. 또한 전체 모델링의 타당성을 확인하기 위하여 전류의 측정치와 계산치를 비교하면 그림 5와 같다.

3. 결 론

본 논문은 플라즈마내에서의 광자와 입자간의 상호작용에 의한 방전특성의 변화를 고찰하고 이를 이용하여 주어진 조건하에서의 아아크 플라즈마 방사특성 및 전기적 특성을 해석하는 모델링을 제안하고 있고 실험을 통하여 측정된 결과와의 비교를 통하여 그 타당성을 확인하였다. 여기에서 본 모델링의 적용대상으로는 가장 전형적인 RD rc의 특성을 지니고 있는 고압 나트륨 램프를 이용하였다. 본 연구의 특징은 다음과 같다.

- (1) 광전달식의 엄밀한 이론적 토대위에서 플라즈마내에서의 광속과 방사에너지를 구할 수 있는 매우 효과적인 계산 기법을 제시하고 있다.
- (2) 방사특성의 시간에 대한 변화를 예측할 수 있다. 이러한 간략화 기법에 의하여 플라즈마내에서의 광자와 입자간의 상호작용을 정량적으로 해석할 수 있으며 앞으로의 주요한 연구과제는 Stark 선퍼짐 현상에 의한 광전달과정까지 해석할 수 있도록 해야 한다.

참고 문헌

- 1) Carrington, C.G. Stacey, D.N. and Cooper, J., "Multipole relaxation and transfer rates in the impact application to the resonance interaction," J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., pp.417-432, 1973.
- 2) Holstein, "Imprisonment of Resonance Radiation in Gases II," Phys. Rev., Vol.83, pp.1159-1168, 1951.
- 3) Lee, H.E. and Cram, L.E., "On the theory of radiation-dominated wall-stabilized arcs," J. Phys. D: Appl. Phys., Vol.18, pp.1561-1573, 1985.
- 4) Rockwood, S.d., "Elastic and inelastic cross sections for electron-Hg scattering from Hg transport data," J.Phys. A, Vol.8, pp. 2348-2358, 1973.
- 5) Self, A., "The Boundary Layer between Electrodes and a thermal plasma," IEEE. trans. on Plasma Sci., Vol.PS-11, No.4, pp.279-285, 1983.
- 6) Vliet, J.A. van and Nederhmd, B.R., "Time dependent measurement and model calculations of high pressure Na-Ne discharges," (29th Gaseous Electronics Conf., Cleveland) Bull. Am. Phy. Soc., Vol.22, pp.195, 1977.
- 7) Elenbaas W., The high pressure mercury vapour discharge.
- 8) Waszink, J.H., "A non-equilibrium calculation on an optically thick sodium discharge," : J. Phys. D: Appl. Phys., Vol.6, pp.1000-1006, 1973.
- 9) Lowke, J.J., "Characteristics of radiation-dominated electric arcs," J. Appl. Phys. Vol.41, pp.2588-2600, 1970.
- 10) Groot de, The high pressure sodium lamp, Phillips tech rev. 35, pp.334-342, 1975.