

축 대칭 전방 압출의 극한 해석

김 병민*, 최 인근**, 최 재찬*, 이 종수***

Limit Analysis of Axisymmetric Forward Extrusion

Byung Min Kim*, In Keun Choi**, Jae Chan Choi*, Jong Soo Lee***

Key words : Limit Analysis (극한 해석), Limit Load (한계 하중), Workhardening (가공 경화), Least Upper Bound (최소 상계해), Axisymmetric Forward Extrusion (축대칭 전방 압출), Finite Element Method (유한 요소법)

Abstract

Limit analysis is based on the duality theorem which equates the least upper bound to the greatest lower bound. In this study, limit analysis of axisymmetric forming problem with workhardening materials is formulated by minimizing the upper bound functional and finite element program is developed for forward extrusion. Limit loads, velocity and flow line fields are directly obtained under various process conditions and deformation characteristics such as strains, strain rates and grid distortion are obtained from the optimum velocity components by numerical calculation.

The experimental observation was carried out for extrusion and compared with computed results. The good agreement between theoretical and experimental results is shown that the developed programming is very effective for the analysis of axisymmetric extrusion.

— 기호설명 —

k : 전단 항복 응력 (shear yield stress)

K : 재료 상수

$[K]$: 강성 행렬 (stiffness matrix)

L_1, L_2, L_3 : 면적 좌표계 (area coordinate)

m : 마찰 상수 (friction factor)

n : 가공 경화 지수 (workhardening coefficient)

* 부산대학교 기계설계과

** 부산대학교 대학원

***국방 과학 연구소

N : 반복 횟수 (number of iteration)	α : 다이 반각
N : 형상 함수 (shape function)	β : 벌칙 함수값 (penalty function value)
P_u : 한계 하중 (limit load)	$\bar{\epsilon}$: 유효 변형률 (effective strain)
R : 단면적 감소율 (reduction of area)	$\dot{\bar{\epsilon}}$: 유효 변형률 속도 (effective strain rate)
R_0 : 가공 전의 소재 반경	$\dot{\epsilon}_{ij}$: 변형률 속도 텐서 (strain rate tensor)
R_r : 가공 후의 소재 반경	$\bar{\sigma}$: 유효 응력 (effective stress)
U_a : 접선방향의 속도 불연속의 크기	σ_{ij} : 응력 텐서 (stress tensor)
U_0 : 소재의 입구속도	σ'_{ij} : 편차 응력 텐서 (deviatoric stress tensor)
U_r : 소재의 출구속도	τ : 마찰에 의한 전단 응력
U_r, U_z : r 및 z 방향의 속도성분	Φ : 유동 함수 (stream function)
V : 물체의 총체적	

1. 서 론

금속 성형 과정에서 가공력의 산정, 구조물이나 기계장치의 안전하중 예측, 재료의 한계치를 고려한 최적 설계 등을 얻기 위하여 공학에 있어서 매우 중요하고 필수적인 분야가 된 소성 해석은 일반적으로 극한 해석 (limit analysis) 과 증분 탄소성 해석 (incremental elastic-plastic analysis) 으로 크게 분류할 수 있다. 증분 탄소성 해석은 하중을 단계적으로 증가시켜 모든 하중의 경로를 검토하여 전 탄소성 영역에서 완전한 해를 구하려는 해석으로써, Argyris⁽¹⁾, Mallett와 Yang⁽²⁾, Yamada⁽³⁾ 등에 의해 연구되어졌는데, 대부분의 설계 및 해석 문제의 궁극적 목적이 한계 하중 및 극한 변형 상태를 예측하는 것임을 감안할 때 불필요한 중간 과정의 탄·소성해까지 얻어지는 증분 해석의 적용은 비경제적인 점이었다.

극한 해석은 탄 소성재료의 점근적 거동을 연구하여 극한 상태 (ultimate state) 를 해석하는 것으로서 소성 구조물등에 있어서는 하중을 지지할수있는 최대 능력인 붕괴 하중과 붕괴 모드를, 소성 가공에서는 가공 하중 및 속도장을 직접적으로 결정하는 것이다. 즉 극한 상태 이전의 변형 단계를 고려하지 않음으로써, 극한 해석은 증분 해석에 비하여 시간과 경비가 월등히 절약되며 복잡한 소성 변형기구를 최소한의 계산작업으로 정확하게 필요한 정보만을 얻을 수 있

다.

이러한 극한 해석은 종전까지 소성 문제에 적용하기 위한 수치적 알고리즘이 개발되지 못하여 별 실용성이 없었으나, 최근에 Rockafellar⁽⁴⁾, Temam⁽⁵⁾, Strang⁽⁶⁾ 등이 이원이론 (duality theorem) 을 도입하여 극한 해석에 대한 수학적 근거를 제시하였고, 이를 기초로 Hung⁽⁷⁾, Yang과 Young⁽⁸⁾, Yang⁽⁹⁾ 등이 변분 원리를 이용한 효율적인 알고리즘을 개발함으로써 빔 (beam) 이나 평판 문제에 적용 가능하게 되었다. 또한 Huh⁽¹⁰⁾ 는 평면 응력 상태하에서 극한 해석을 위한 유한 요소 프로그램을 개발 함으로써 여러 형태의 평판에 대하여 붕괴 하중 및 변형 모드를 관찰하였다.

금속 성형 문제에 대한 적용으로는 Lee⁽¹¹⁾ 가 유동 함수를 이용한 수식화로써 평면 단조 및 관개 확장 문제의 해석에 수치적으로 시도하였으며, 그후 Liu⁽¹²⁾ 가 압출 문제에 대하여 극한 해석을 하였으나 평면 변형 상태이고 가공 경화성을 무시한 완전 강소성 재료에 국한 되었다.

본 논문에서는 이를 발전시켜 가공 경화성을 고려하여 축대칭 금속 성형문제의 극한 해석을 위한 새로운 수치적 알고리즘을 제시하고 축대칭 압출가공을 해석 하기위한 유한 요소 프로그램을 개발 함으로써, 성형에 필요한 한계 하중 및 최적 속도장을 직접적으로 구하는데 목적을 두었다. 수립되어진 최적 속도장

으로 수치적 계산을 수행하여 각 요소에서의 변형률 속도, 변형률 분포, 격자 변형등을 구함으로써 가공에 따른 변형 특성도 파악하였다. 프로그램의 타당성 검증을 위하여 구조용 탄소강을 이용하여 압출 실험을 행함으로써 한계 하중의 이론치와 실험 결과치를 비교 검토하였으며, 유통 특성을 관찰하기 위하여 격자 왜곡(grid distortion) 실험을 하여 수치 계산에서 구한 격자 변형 패턴과 비교 하였다.

2. 이론 해석

2.1 극한 해석

극한 해석을 수학적으로 뒷받침하는 전형적인 이원 이론의 형태는 다음과 같다.

$$\text{Max}_{\sigma} \text{Min}_{u} P(\sigma, u) = \text{Min}_{u} \text{Max}_{\sigma} P(\sigma, u) \quad (1)$$

여기서 하중 P는 응력장 σ 와 속도장 u의 일반적인 함수이고 좌변은 최대 하계해(greatest lower bound)를, 우변은 최소 상계해(least upper bound)를 각각 의미한다.

따라서 이원 이론은 가장 큰 하계와 가장 작은 상계를 같게 놓음으로써 성립되며 한계 하중을 구하기 위하여는 어느 한쪽 방향에서도 접근할 수 있다.

일반적으로 금속 성형 공정의 해석에서 한계 해에 접근하기 위해서는 상계 해를 최소화 시키는 방법이 편리하다. 본 논문에서는 축대칭 압출 문제의 극한해석을 위하여 다음과 같이 가정한다.

- 1) 압출시 소재는 등방성과 균질성을 가지며 Von-Mises 항복조건을 만족한다.
- 2) 재료는 탄성 변형을 무시한 강소성체로써 구성 식으로 $\bar{\sigma} = K(\bar{\epsilon})^n$ 으로 가정한다.
- 3) 정상상태의 압출에 대하여 적용하며, 마찰은 일정한 전단 응력으로 가정한다.

2.2 하계 수식화 과정

축대칭 문제의 경우, 원통 좌표계에서 물체력이 없는 경우의 평형 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{i,j,j} = 0 \quad (2)$$

이원 수식(dual formulation)을 유도하기 위하여 식(2)를 Von-Mises 항복 조건과 정적 경계조건을 만족하는 임의의 응력장에 대하여, 구속조건을 가진 최대 하계해의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && P \\ & \text{subject to} && \sigma_{i,j,j} = 0 \\ & && \sigma_{i,j} \sigma_{i,j} \leq 2k^2 \\ & && \text{Static B, C.} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 k는 강소성 재료에 대한 전단 항복 응력을 나타낸다.

2.3 상계 수식화 과정

비압축성 조건과 속도 경계 조건을 만족하는 가용 속도장 U^* 에 대하여 평형 방정식으로부터 다음과 같은 가상 일(virtual work)의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_{i,j} U_i^* dV &= 0 \\ &= \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \\ &\quad - \iint_S F_i U_i^* dS \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)의 우측 두번째 항을 경계 조건에 따라 분리하면

$$\begin{aligned} \iint_S F_i U_i^* dS &= \iint_{S_u} \sigma_{ij} n_j U_i dS_u \\ &\quad + \iint_{S_f} \sigma_{ij} n_j \Delta U_i^* dS_f \end{aligned} \quad (5)$$

가 된다.

S_u 는 속도가 규정된 면으로써 압출의 경우는 펀치 또는 램과 소재의 접촉면을 나타내고, S_f 는 건인력이 규정된 표면으로써 다이와 컨테이너의 접촉된 면을 나타낸다.

속도가 규정된 면에서

$$\iint_{S_u} \sigma_{ij} n_j U_i dS_u = P A_o U_o \quad (6)$$

이되며, 다이와 소재사이의 마찰이 작용하는 면에서

$$\iint_{S_F} \sigma_{ij} n_j \Delta U^* dS_F = - \iint_{S_F} \tau \Delta U^* dS_F \quad (7)$$

가 된다. 따라서 식(6)과 (7)을 식(4)에 대입하면 식(3)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

Maximize P

$$\text{Subject to } P = \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \iint_{S_F} \tau \Delta U^* dS_F$$

$$\begin{aligned} U_0 \cdot \Pi R_0^2 &= 1 \\ \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij} &\leq 2k^2 \end{aligned} \quad (8)$$

비압축성 조건으로부터

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* = \hat{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (9)$$

로 되며, Schwarz 부등식과 항복 조건식으로 부터 다음 관계식이 성립한다. ⁽¹³⁾

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* &\leq \sqrt{\hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*} \\ &\leq \sqrt{2k} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*} \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 식(10)을 식(8)에 대입하면

$$\begin{aligned} \text{Max. } P &= \text{Max.} \left\{ \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \iint_{S_F} \tau \Delta U^* dS_F \right\} \\ &\leq k \iiint_V \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*} dV + mk \iint_{S_F} |U_s| dS_F \\ &= P^* \end{aligned} \quad (11)$$

이 된다. 여기서 $\tau = mk$ 이며, p^* 는 최대 하계해에 대한 상계를 의미한다.

최적의 동적 가용 속도장을 구하기 위하여, 위에서 구한 p^* 를 최소화 시키면 다음과 같은 최소 상계 수식이 성립된다.

Minimize P^*

$$\begin{aligned} \text{s.t. } P^* &= k \iiint_V \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \\ &+ mk \iint_{S_F} |U_s| dS_F \end{aligned}$$

$$U_0 \cdot \Pi R_0^2 = 1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{U_r}{r} = 0$$

Kinematic B.C

강소성 재료의 유동응력(flow stress)으로

$$\bar{\sigma} = K(\bar{\epsilon})^n \quad (13)$$

을 도입하여 전단 항복 응력 $k = \bar{\sigma} / \sqrt{3}$ 을 식(12)에 대입하면, 한계 하중을 구하기 위한 상계 수식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} P_V &= \frac{P^*}{K} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\iiint_V (\bar{\epsilon})^n \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \right. \\ &\quad \left. + m \iint_{S_F} (\bar{\epsilon})^n |U_s| dS_F \right] \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 K 는 재료의 상수이다.

비압축성 조건을 자동적으로 만족시키기 위해 유동 함수(stream function) Φ 를 도입하면 각 속도 성분은

$$\begin{aligned} U_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ U_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ U_s &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \end{aligned} \quad (15)$$

이 된다.

변형률 속도의 항으로 표현된 상계 수식(14)에는

Φ 에 대한 이차 미분 형태가 존재하기 때문에 일차 미분이 반드시 연속이 되어야하며, 따라서 각 요소경계면 사이의 속도 불연속은 벌칙 함수 (penalty function)를 도입 함으로써 해결할 수 있다. 요소 경계면 사이의 속도 불연속을 고려하여 유동 함수의 형태로 표현한 최종 상계 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 P_v = & \iiint_V \frac{(\bar{\epsilon})^n}{\sqrt{3}} \left\{ 2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \right]^2 \right. \\
 & + 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \right]^2 + 2 \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]^2 \\
 & + \left. \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right]^2 \right\}^{1/2} dV \\
 & + \beta \iint_{S_d} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 dS_d + m \iint_{S_f} \frac{(\bar{\epsilon})^n}{\sqrt{3}} \\
 & \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| dS_f \quad (16)
 \end{aligned}$$

2.4 유한요소 방정식의 정식화

상계 수식 (16)을 유한 요소 방정식으로 정식화하기 위하여 사용된 요소 형태는 비적합성을 고려하기 위하여 10개의 자유도를 가진 4절점 삼각형 요소¹⁴⁾를 사용하였으며, 요소 내에서의 Φ 를 형상 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\Phi = \{\Phi_e\}^T \{N\} \quad (17)$$

그리고 식 (16)에 나타나는 Φ 의 각 미분항은 다음과 같은 매트릭스 형태로 표현 되어질 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \{\Phi_e\}^T \{M_1\} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \{\Phi_e\}^T \{M_2\} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} &= \{\Phi_e\}^T \left\{ \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial \{M_1\}}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial r} \right\} \right\} \\
 &= \{\Phi_e\}^T \{M_{11}\} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \{\Phi_e\}^T \left\{ \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial \{M_2\}}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial z} \right\} \right\} \\
 &= \{\Phi_e\}^T \{M_{22}\} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} &= \{\Phi_e\}^T \left\{ \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial \{M_1\}}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial z} \right\} \right\} \\
 &= \{\Phi_e\}^T \{M_{12}\}
 \end{aligned} \quad (18)$$

따라서 상계 범함수 P_u 를 유한 요소 방정식으로 만들기 위하여, 식 (18)을 식 (16)에 대입하여 이차 형태 (quadratic form)의 매트릭스 식으로 나타내고 최소해를 찾기 위하여 단순 반복 기법 (simple iteration technique)¹²⁾을 도입하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 P_u = & \sum \int_0^1 \int_0^{1-L_2} \{\Phi_{e1}\}_N^T \{K_{e1}^*\}_{N-1} \{\Phi_{e1}\}_N dL_1 dL_2 \\
 & + \sum \int_{I_d} \{\Phi_{e2}\}_N^T \{K_{e2}^*\}_{N-1} \{\Phi_{e2}\}_N dI_d \quad (19) \\
 & + \sum \int_{I_f} \{\Phi_{e3}\}_N^T \{K_{e3}^*\}_{N-1} \{\Phi_{e3}\}_N dI_f
 \end{aligned}$$

여기서 N 은 현재 반복 횟수를 나타내며, $N-1$ 은 이전의 반복 횟수으로써 이미 알려져 있는 값을 나타낸다. 그리고 각 요소의 강성 매트릭스는

$$\begin{aligned}
 [K_{e1}^*]_{N-1} &= \left[\frac{(2/\sqrt{3})\pi J (\bar{\epsilon})^n \{K_{e1}\}}{\sqrt{\{\Phi_{e1}\}^T \{K_{e1}\} \{\Phi_{e1}\}}} \right]_{N-1} \\
 [K_{e2}^*]_{N-1} &= \frac{2\pi\beta}{r} [K_{e2}]_{N-1} \quad (20) \\
 [K_{e3}^*]_{N-1} &= \frac{(2/\sqrt{3})\pi m (\bar{\epsilon})^n [K_{e3}]_{N-1}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{N-1}}
 \end{aligned}$$

로 되며, 특히 변형에너지에 관한 강성 매트릭스 $[K_{e1}]$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 [K_{e1}] = & 2 \left[\frac{1}{r^2} \{M_2\} - \frac{1}{r} \{M_{12}\} \right]^T \left[\frac{1}{r^2} \{M_2\} - \right. \\
 & \left. \frac{1}{r} \{M_{12}\} \right] + \left[\frac{1}{r} \{M_{12}\} \right]^T \left[\frac{1}{r} \{M_{12}\} \right] \\
 & + 2 \left[-\frac{1}{r^2} \{M_2\} \right]^T \left[-\frac{1}{r^2} \{M_2\} \right] \quad (21) \\
 & + \left[-\frac{1}{r} \{M_{22}\} - \frac{1}{r^2} \{M_{11}\} + \frac{1}{r} \{M_{11}\} \right]^T \\
 & \times \left[-\frac{1}{r} \{M_{22}\} - \frac{1}{r^2} \{M_{11}\} + \frac{1}{r} \{M_{11}\} \right]
 \end{aligned}$$

2.5 상계 범함수의 최소화

각각의 요소에 대하여 반복 기법이 적용된 이차 형태의 상계 범함수인 식 (19)를 전 영역에 걸쳐 조합하여 총체적으로 표현하면

$$[P_v]_{N-1} = \{\Phi\}_N^T [K^*]_{N-1} \{\Phi\}_N \quad (22)$$

로 되고, 최소 상계 하중을 구하기 위해서는 미지수 벡터 Φ 에 대하여 다음과 같은 최소화 식이 성립되어야 한다.

$$\frac{\partial [P_v]_{N-1}}{\partial \{\Phi\}_N} = 0 \quad (23)$$

식 (23)으로부터 미지수 벡터 $\{\Phi\}_N$ 을 각각 구한 후, 식 (22)에 대입하게 되면 N-1번째 반복에서의 상계 해가 얻어지며 이러한 반복은 다음과 같은 판정 식에 의해 수렴 범위 내에 도달할 때까지 계속된다.

$$|[P_v]_{N-1} - [P_v]_N| \leq \eta \quad (24)$$

여기는 η 는 입력시 지정된 수렴 공차를 나타낸다. 또한 유효 변형률 속도를 구하기 위해, 각 요소에

서 구해진 변형률 속도 성분으로 부터 계산하면

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}} &= \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\epsilon}_{rz}^2)} \\ &= \left[\frac{1}{3} [K_{e1}] \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (25)$$

이 되며, 매트릭스 $[K_{e1}]$ 은 식 (21)에 나타나 있다. 유효 변형률 $\bar{\epsilon}$ 은 식 (25)에서 구한 유효 변형률 속도를 유선을 따라서 시간에 대한 수치 적분을 함으로써 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \int_{t_0}^t \dot{\bar{\epsilon}} dt \\ &= \int_{z_0}^z \left[\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{U_z} \right] dz \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 z_0 는 유효 변형률이 0인 변형 영역 내에서 적분을 위한 유선의 기준점이 된다.

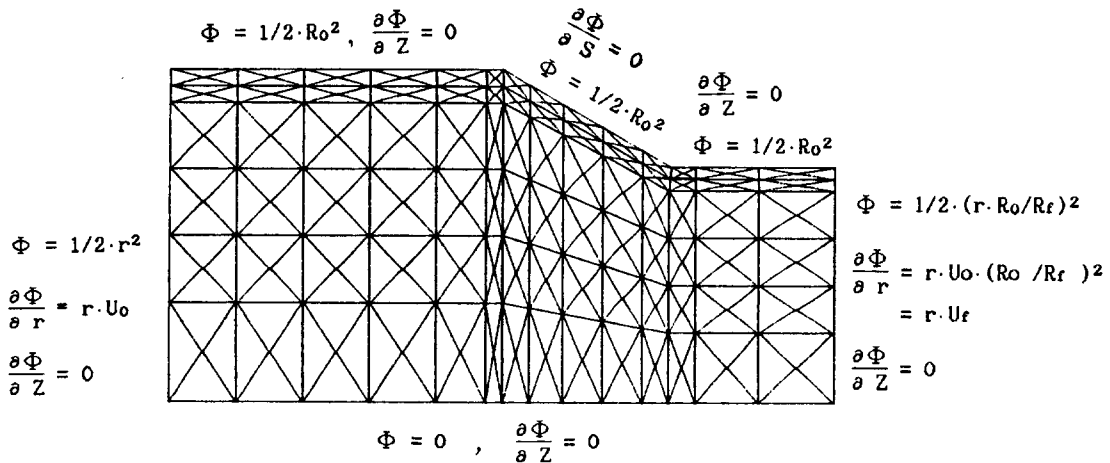


Fig.1 Mesh system and boundary conditions for axisymmetric extrusion

3. 유한 요소 모델링 및 계산 과정

축대칭 압출 공정을 해석하기위해 사용된 요소는 1개의 4각형 요소에 4개의 3각형 요소로 구성되어 있으며 그 격자 계(mesh system) 및 경계 조건은 Fig. 1과 같다.

Fig. 1은 다이 반각 30°, 단면 감소율 50%일때의 유한 요소 모델이며 변형이 심한 다이의 입 출구부분과 경계면 상의 요소를 비교적 조밀하게 구성 함으로써 해의 정확성을 꾀하였다.

그리고 격자 및 절점 번호 등을 자동으로 생성되게 하여 유한 요소 해석과정의 전 처리 과정에서 소요되는 시간을 극소화 하였고 최소한의 데이터를 대화식(interactive)으로 입력함으로써 데이터 입력의 효율성을 기하였다.

종전의 강소성 프로그램에서는 최소화 과정에서 뉴턴-랩슨 방법을 주로 사용하였기 때문에 압출 해석시 상계 속도장과 같은 초기 속도장을 사용하지 않음

면 해의 수렴에 대한 보장성에 어려움이 있었으나 본 프로그램에서는 상계 범함수를 이차 형태로 나타내어 단순 반복기법으로 최소화 시킴으로써 초기 속도장의 정확성에 크게 구애받지않고 쉽게 해가 수렴되어진다. 따라서 근사적인 초기 속도장은 단면 감소율 및 다이 반각에 의해 체적 일정 조건에 따라 프로그램 내에서 자동으로 지정 되어지게 하였다.

해의 수렴성 기준으로써 N번째와 N-1번째 반복 계산에서의 한계 하중(P_n)의 차이가 어느 규정치 이내에 도달하면 수렴하는 것으로 판단하였다.

Fig. 2에서는 다이 반각 30°에서 각 단면 감소율에 대하여 위에서 자동으로 지정된 초기속도장으로 수렴 한계치를 0.001로 적용했을때의 계산의 수렴 특성을 보여준다.

여기서는 각 단면 감소율에 관계없이 수렴 특성이 거의 같은 경향을 보이고 있으며 2번째 반복 횟수부터는 한계 하중에 급격히 접근하고 그 이후 단조롭고 극히 미소하게 감소함을 보이고 있다.

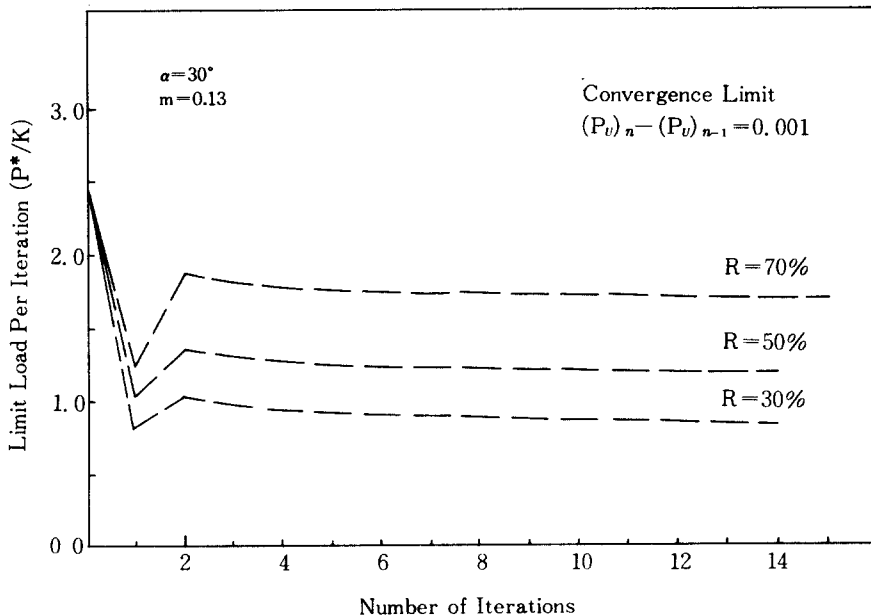


Fig. 2 Convergence characteristics of limit analysis in axisymmetric extrusion

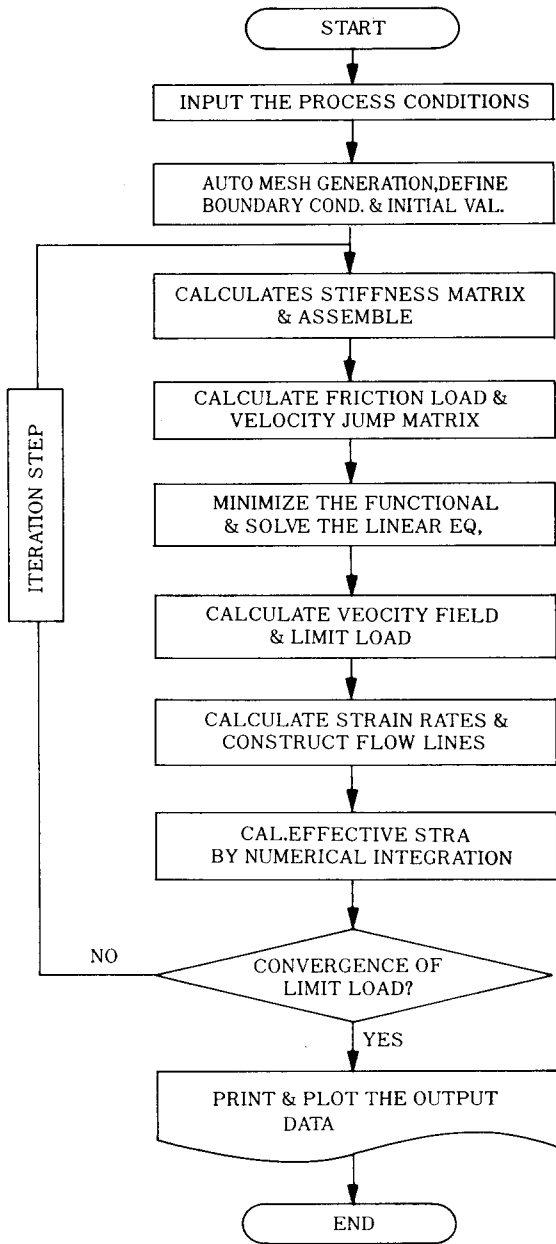


Fig. 3 Flow chart for limit analysis of axisymmetric extrusion

Fig. 3에는 유한 요소법을 이용한 극한 해석의 수치적 해법 과정을 흐름도(flow chart)로써 도시하였는데 전 반복 횟수에서 계산된 변형률은 다음 횟수의

데이터로 들어가 한계 하중과 속도장을 구하고 이 한계 하중이 어느 범위내에 수렴될 때 까지 반복 계산되는 과정으로 구성되어 있다.

계산을 수행하기 위하여 VAX11-750 컴퓨터를 사용하였고 격자 시스템, 그리고 격자 변형, 유선 및 속도 분포등을 캘컴 플로터(Calcomp 965A plotter)를 이용하여 가시화 시켰다.

4. 실험

압출 실험을 하기 위하여 200톤 유압 프레스(AC-S/200/300)을 사용하였고 냉간 압출가공을 위한 전용 실험장치를 설계, 제작 하였다. 압출 금형의 인서트 부분은 금형 공구강(SKD11)을 사용하였고 보강 링은 합금강(SCM4)으로 열박음하였다. 램과 다이는 SKD11 공구강을 정밀 가공한 후 열처리 하였으며 다이 형상은 다이 반각 15°, 25°, 30°, 45°, 60°에 대하여 각각 단면 감소율 30, 50, 55, 60, 70%가 되도록 제작하였다.

소재로써는 구조용 탄소강(SM15C)을 기계 가공한 후 풀림 처리하여 사용하였고, 시편 끝 부위에 다이와 같은 각도의 기울기를 주고 또한 시편 길이를 충분히 길게 함으로써 정상상태의 압출이 가능하도록 하였다. 재료의 기계적 성질을 알기위해 동일 재료로써 유압 프레스를 이용하여 압축시험을 실시하였고, 구해진 실험 데이터를 커브 피팅하여 다음과 같은 응력-변형률 관계식을 얻었다.

$$\bar{\sigma} = 68.7(\bar{\epsilon})^{0.15} \text{ (kgf/mm}^2\text{)} \quad (27)$$

소재와 금형사이의 윤활을 위하여 칼슘그리스에 MoS₂ 분말을 중량비로 10% 섞은 윤활제를 사용 하였으며 마찰 상수를 결정하기 위하여 동일 조건에서 링 압축시험을 행한 결과 μ 이 0.13으로 나타났다.

압출시 램의 속도는 2mm/min로 하여 실험하였고 압출 하중은 로드 셀(load cell)을 이용하여 측정하였다. 또한 소성 유동 현상을 실험적으로 구하기 위해 2등분으로 분할된 한쪽 시편의 종단면에 격자선을 그은다음, 다른 시편과 합쳐 금형에 넣고 압출을 행한 후 시편을 꺼내어 유동 패턴을 관찰하였다.⁽¹⁵⁾

5. 결과 및 고찰

본 프로그램의 타당성을 검증하기 위해 여러 공정 조건에서 이론치와 실험치를 비교하였는데, 수치 계산시 실험 조건과 동일하게 하기 위하여 다이 랜드 부위($\ell=4\text{mm}$) 및 콘테이너 면의 마찰까지 고려하였다.

Fig. 4에서는 단면 감소율 50%의 압출 조건에서 다이 반각 15° , 30° , 45° , 60° 에 대하여, 그리고 Fig. 5에서는 다이 반각 30° 에서 단면 감소율 50, 60, 70%로 변화시켰을 때 각각의 실험 및 이론 결과치를 비교 도시한 것을 나타낸다.

여기서 압출 하중은 다이 반각 및 단면 감소율이 증가 할수록 점차 커짐을 알 수 있고, 이론치와 실험치는 서로 잘 일치하면서 이론치가 약간 높은 값을 지니는데 이는 한계 하중이 최소 상계해로써 정의되기 때문이라 볼 수 있다.

Fig. 6은 실험과 계산에서의 내부의 격자변형 패턴을 보여주고 있는데 이들 간에 변형 모양이 거의 유사하게 나타남으로써 본 해석으로 금속의 유동을 비교적 정확히 예측할 수 있음을 알 수 있다. Fig. 7은

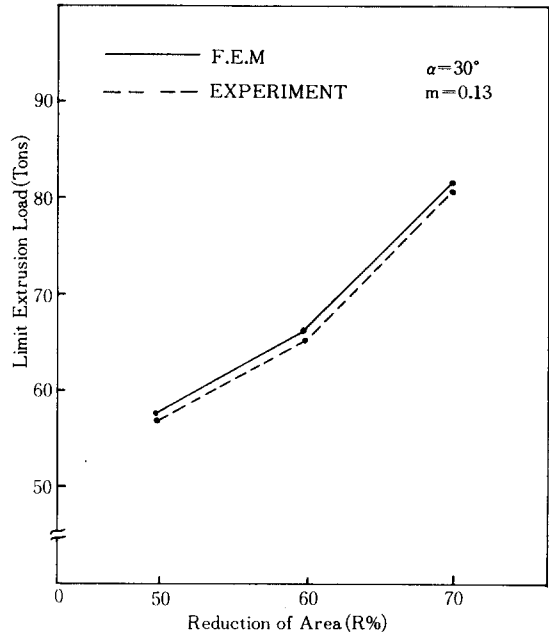


Fig. 5 Comparison of experimental and computed extrusion loads for each reduction of area

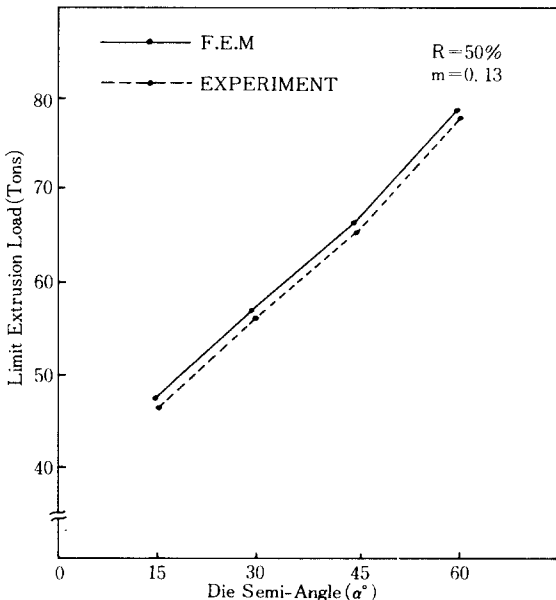


Fig. 4 Comparison of experimental and computed extrusion loads for each die semi-angle

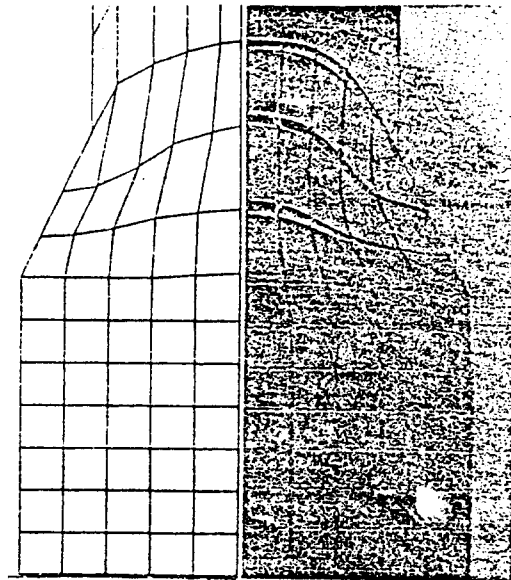


Fig. 6 Comparison of theoretical and experimental flow pattern

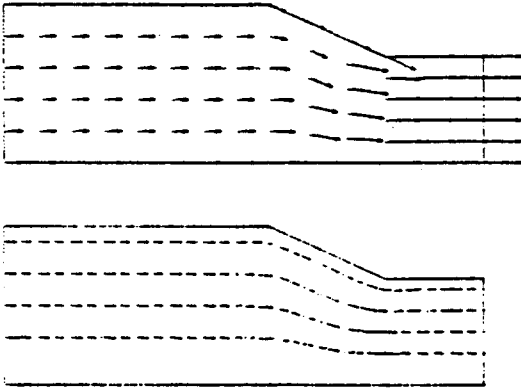


Fig. 7 Velocity fields and stream lines in axisymmetric extrusion

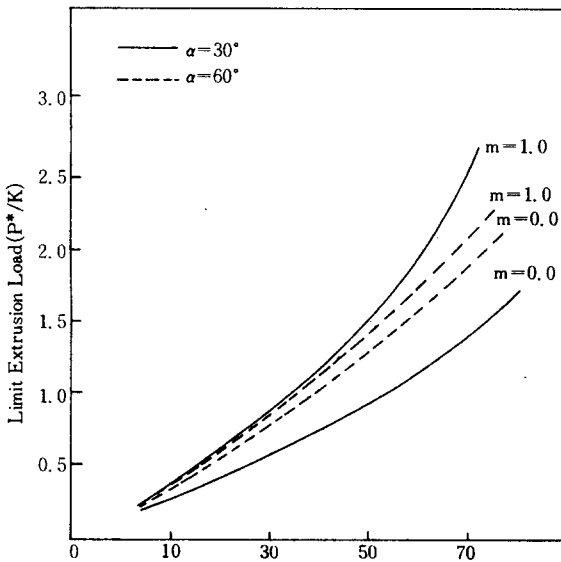


Fig. 8 Relation between limit extrusion loads and reduction of area for each die semi-angle

계산에서 구한 속도장의 분포와 유선의 흐름을 플로터로써 도시한 것을 나타낸다.

Fig. 8은 다이 반각 30°, 60°에서 마찰 조건이 완전 윤택($m=0$) 및 무 윤택($m=1.0$) 상태에 대하여 단면 감소율이 따른 압출 하중의 이론치를 나타낸 것으로 단면 감소율이 증가함에 따라서 두 마찰 상수에 대한 하중의 폭은 점점 커지며, 다이 반각 30°인 경우가 60°인 경우에 비하여 더욱 큰 차이를 보이는데 이

는 높은 감소율 및 작은 다이 반각에서는 마찰 에너지의 영향이 상대적으로 커지기 때문이다.

Fig. 9~10에서는 다이 반각 30, 단면 감소율 30%에 대하여 수립된 최적 속도장을 이용하여 수치적 계산을 수행함으로써 변형 특성을 구한 결과를 나타낸다.

Fig. 9는 유효 변형률 속도의 분포로써 $\dot{\epsilon}$ 가 10^{-3} 이하가 되는 영역은 더이상 소성 영역이 아닌 강체 부분 (rigid body)으로써 간주하였으며, 변형 영역에서는 다이 입구 및 출구 모서리에서 비교적 높은 값을 가지고 다이 중심부로 갈수록 낮아지는 경향을 보인다. Fig. 10은 총 유효 변형률의 분포를 나타낸 것으로 전 변형 영역에 걸쳐 입구에서 출구부위로 가면서 유효 변형률 값은 누적되어 커지고 있으며 출구 부분에서는 중심축 상에서부터 증가하기 시작하여 재료의 표면에서 가장 큰 값을 가진다.

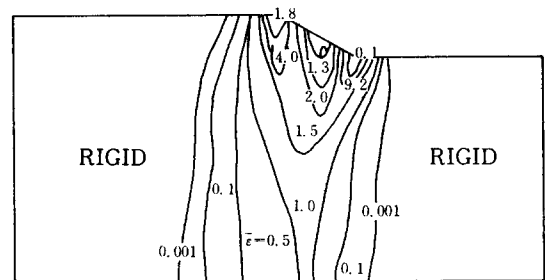


Fig. 9 Effective strain rate distribution for $\alpha=30^\circ$, $R=30\%$, $m=0.13$

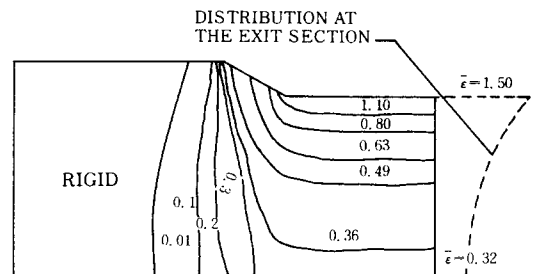


Fig. 10 Total effective strain distribution for $\alpha=30^\circ$, $R=30\%$, $m=0.13$

6. 결 론

가공 경화성을 고려하여 축대칭 성형문제의 극한 해석을 위한 새로운 수치적 알고리즘을 제시하고 그에 따른 유한 요소 프로그램을 개발하여 축대칭 압출의 해석에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 극한 해석으로써 한계 하중 및 최적 속도장을 직접적으로 구하고 이를 이용하여 유선, 변형률 속도, 변형률 및 격자 변형등을 계산함으로써 압출시 성형에 필요한 상세한 정보들을 신속하게 얻을 수 있었다.

(2) 프로그램의 검증을 위하여 계산결과 얻은 한계 하중과 격자 변형이 구조용 강을 이용한 압출 실험치와 비교한 결과 잘 일치 함으로써 본 프로그램의 타당성이 입증되었다.

(3) 최소한의 데이터를 대화식으로 입력하고 격자 시스템 및 초기 속도장이 자동으로 생성되게 함으로써 입력에 소요되는 시간을 단축하였고, 초기 속도장의 정확성에 크게 구애받지 않고 쉽게 수립 됨으로써 수립 특성이 비교적 안정 되었다.

(4) 개발된 프로그램을 수정, 응용함으로써 향후 한계 하중 및 변형 모드 해석에 있어 다양한 성형 가공 문제에 적용할 수 있다.

후 기

본 연구는 1989-91년도 한국 과학 재단의 기초 연구비 지원(893-0909-022-2)에 의하여 수행 되었으며 이에 관계자 여러분께 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

(1) Argyris, I. H. and Kleiber, M., "Incremental Formulation in Non-linear Mechanics and Large Strain Elastic-Plasticity-Natural Approach", Part I, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 11, pp. 215-247,

1977.

- (2) Lee, E. H., Mallett, P. L. and Yang, W. H., "Stress and Deformation Analysis of the Metal Extrusion Process", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 10, pp. 319-353, 1977.
- (3) Yamada, Y. and Yoshimura, N., "Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for The Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method", Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 343-354, 1968.
- (4) Rockafellar, R. T., "Duality and Stability in Extremum Problems Involving Convex Functions", Pacific J. Math., Vol. 21, No. 1, pp. 167-187, 1967.
- (5) Temam, R. and Strang, G., "Duality and Relaxation in the Variational Problems of Plasticity", J. Mecanique, Vol. 19, No. 3, pp. 493-527, 1980
- (6) Strang, G., "A Minimax Problem in Plasticity Theory", Lecture Notes 701 Springer-Verlag, Berlin, pp. 319-337, 1979.
- (7) Hung, N. D., "Direct Limit Analysis via Rigid-Plastic Finite Elements", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 8, pp. 81-116, 1976.
- (8) Yang, W. H. and Young, S. L., "Limit Analysis of Plates by Finite Element Approach", FENOMECH 84, Stuttgart, Sept. 10, 14, 1984.
- (9) Yang, W. H., "A Variational Principle and an Algorithm for Limit Analysis of Beam and Plates", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 33, pp. 575-582, 1982.
- (10) Huh, H., "Limit Analysis in Plane

- Stress", Ph.D. Dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, 1986.
- (11) Lee, J. S., "Plastic Flows of Tubes and Blocks", Ph.D. Dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, 1983.
- (12) Liu, K. H., "Limit Analysis of Plane Strain Extrusion", Ph.D. Dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, 1986.
- (13) Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, Oxford, 1975.
- (14) Huebner, K. H., "The Finite Element Method for Engineers," John Willey and Sons, Inc., New York, 1975.
- (15) 양동열, 이중홍, "강소성 유한 요소법을 이용한 축대칭 전방압출의 해석", 대한기계학회 논문집, 제9권 제4호, pp. 452-462, 1985.

- 알 림 -

사단법인 한국비파괴검사학회(The Korean Society For Nondestructive Testing)는 아래와 같이 극동지역 비파괴 학술대회를 개최할 예정입니다.

관심있는 회원들의 많은 참석을 바랍니다.

- 일 시 : 1991. 11. 15
- 장 소 : 라마다 르네상스 호텔(서울)
- 발표논문수 : 약 50편

(Session IA : Ultrasonic I-Detection Sizing and Automation 外 12Session)

- 참 가 비 : 회원 : 20,000원 비회원 : 30,000원
- 참 가 문 의 : (02) 582-2743, 583-7564