

## 波 Saint-Venant 方程式을 이용한 數値解의 精度分析

An Analysis of Precision of Numerical Solutions  
by Using the Wave Saint-Venant Equations.

우 효 섭\* 김 현 준\*\*  
Woo, Hyo Seop Kim, Hyeon Jun

## Abstract

The Saint-Venant equations of the continuity and momentum principles of one-dimensional, unsteady, open-channel flow are expressed in terms of the phase velocities of constant depth, velocity, and discharge, which results in unique relationships between these phase velocities and channel velocity. A case study shows that these unique relationships developed in this study can be used as an indicator of precision of numerical solutions of the Saint-Venant equations. Further physical interpretation of these relationships and utilization to the numerical analyses of the Saint-Venant equations are to be investigated.

## 요 지

개수로에서 1차원 부정류의 연속성과 운동량 보존 법칙의 Saint-Venant 방정식을 일정 수심, 유속, 유량의 전파속도 향으로 표시하였으며, 이러한 각 전파속도와 수로속도는 일정한 관계가 있음이 밝혀졌다. 한 사례연구에 의하면, 본 연구에서 제시된 이러한 일련의 관계들을 이용하여 Saint-Venant 방정식의 수치해의 정도를 가늠할 수 있다. 이러한 일련의 관계들의 물리적 해석과 Saint-Venant 방정식의 수치 해석에 다양한 활용 방안은 계속 연구중이다.

## 1. 서 론

자연하천에서의 홍수파의 전파나 기타 개수로에서의 부정류의 해석 등 수리학적 추적은 흐름을 통상 1차원 부정류로 가정하여 해석된다. 이러한 개수로에서의 1차원 부정류의 해석은 Saint-Venant 방정식이라 불리우는 연속방정식과 운동(량) 방정식을 연

립하여 풀므로써 가능하다. 이러한 Saint-Venant 방정식은 개수로의 부정류해석뿐 아니라 댐의 파괴에 의한 홍수파의 전파나 지표류 등 여러 형태의 부정류에 널리 적용되고 있다.

Saint-Venant 방정식은 그 공학적 중요성 때문에 그 해법에 관해 많은 연구가 진행되어 왔으며,

\*한국건설기술원, 수자원 연구실, 수석연구원

특히 컴퓨터를 이용한 수치해석은 이미 실용화 단계에 도달하였다. 개수로에서의 1차원 부정류의 수치해법으로는 특성법, 유한차분법, 유한요소법 등 크게 3가지가 있으며, 그중 유한차분법의 한 종류인 P. reissman의 4점 음해법은 해의 안정성 및 차분간격의 융통성 등 여러가지 이점이 있어 다른 방법들에 비해 널리 사용되고 있다.

우리나라의 경우, '80년대 초부터 하천의 홍수파 추적에 수치해석을 이용한 여러 연구들이 발표되어 왔다. 그중 특히 선우중호(1983)는 4점음해법을 급강 하류부의 홍수 전파에 적용한 바 있으며, 최근에 김현영과 박승우(1989)는 양해법을 급강하류부에 적용하여 홍수파의 해석을 시도한 바 있다. 또한 우리나라 주요하천의 홍수예경보 시스템의 설계시 하류부에 하구둑이 있는 급강, 영산강 등의 홍수파해석에 Saint-Venant 방정식이 이용되고 있다(전설부, 1989).

주지하다시피, Saint-Venant 방정식은 유속과 수심이나 유량과 수심 등 두 변량의 시공간적 변화를 유체의 연속성과 운동량의 보존 법칙을 이용하여 미분방정식으로 표시한 것이다. 지금까지의 Saint-Venant 방정식에 관한 대부분의 연구는 그 방정식 자체의 해석적, 수치적 해법에만 주된 관심을 기울여 온 반면, 그 밖에 그 방정식의 새로운 물리적 해석이나 수치해의 정확도를 검사하는 방법 등에는 관심이 적어 왔다. 따라서, 본 연구에서는 Saint-Venant 방정식의 물리적 의미를 전파속도(Phase velocity)의 개념을 이용하여 또 다른 면에서 해석하고, 이러한 전파속도를 이용하여 표시된 Saint-Venant 방정식으로 기존의 해법으로 구한 수치해의 정확도를 가늠하고자 한다.

## 2. 波 Saint-Venant 방정식

유량 Q와 수심 y를 종속변수로 하는 경우에 측방류가 없는 균일수로에서의 1차원 점변류의 Saint-Venant 방정식은 다음과 같이 연속방정식과 운동량 방정식으로 각각 표시된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (1)$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial x} + S_1 - S_0 = 0 \quad (2)$$

윗 식에서, A = 통수단면적  
 g = 중력가속도  
 S<sub>1</sub> = 마찰경사  
 S<sub>0</sub> = 하상경사  
 x = 흐름방향으로의 거리  
 t = 시간

윗 식에서 수심 y는 x와 t의 함수이므로 미분법칙에 따라 다음과 같은 식이 성립된다.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t} \quad (3)$$

여기서 dy/dt는 독립변수 x와 t가 어떤 지정된 형태, 즉 dx/dt로 동시에 변하는 경우의 수심의 변화율을 나타낸다. 따라서, 식(3)은 관찰자(observer)가 dx/dt의 속도로 흐름 방향을 따라 움직이는 경우의 시간에 따른 수심의 변화율을 나타낸다. 여기서 dy/dt = 0 인 경우 수심 y의 시간에 따른 변화는 없으며, 이것은 마치 관찰자가 dx/dt의 속도로 흐름을 따라 이동하는 경우 수심 y는 변하지 않고 일정하게 보이는 것과 같다. 따라서, dy/dt = 0 인 경우, 즉 일정수심의 전파속도(Phase velocity) W<sub>v</sub>는 다음과 같이 표시된다.

$$W_y \left[ = \frac{dx}{dt} \right] = - \frac{\partial y / \partial t}{\partial y / \partial x} \quad (4)$$

마찬가지로, 일정유량 및 일정유속의 전파속도 W<sub>0</sub> 및 W<sub>v</sub>는 각각 다음과 같이 표시된다.

$$W_0 = - \frac{\partial Q / \partial t}{\partial Q / \partial x} \quad (5)$$

$$W_v = - \frac{\partial V / \partial t}{\partial V / \partial x} \quad (6)$$

여기서, Q = AV 의 관계를 고려하여 식(1)에 식(4), (5), (6)을 대입하여 정리하면 Saint-Venant

방정식의 연속방정식은 다음과 같이 일정수심, 유량, 유속의 전파속도 관계식으로 표시된다. (부록 A 참조)

$$(R_c = ) \frac{W_v(W_v - V)}{W_v(W_0 - V)} = 1 \quad (7)$$

상기식은 波 연속방정식(Wave Continuity Eq.)  $R_c$  라고 불리우며 Laushey (1985)에 의해 처음으로 제안되었다. 식 (7)에서 알 수 있듯이, 어느 두 전파속도가 같게 되면 세가지 전파속도  $W_v, W_0, W_v$ 가 모두 같게 된다. 예로서, 파의 감쇄나 종확산(dispersion)이 없는 Monoclinal wave나 Kinematic wave의 경우  $W_v = W_0 = W_v$ 이다.

한편, 1차원 부정류의 운동량 방정식 (2)에 식 (4), (6)을 고려하여 정리하면(부록 B 참조),

$$(W_0 - 2V)W_v + V^2 - C^2(1 + \alpha) = 0 \quad (8)$$

윗 식에서,

$$\alpha = (S_r - S_0) / S_w \quad (9)$$

$$S_w = \partial y / \partial x \quad (10)$$

$$C = \sqrt{gY_r} : \text{장파의 전파속도} \quad (11)$$

$$Y_r = A/T : \text{수리수심} \quad (12)$$

T : 수면폭

식 (8)은 다시 다음과 같이 표시된다.

$$(R_w = ) \frac{(2V - W_0) W_v}{V^2 - C^2(1 + \alpha)} = 1 \quad (13)$$

지금부터 상기 식은 波 운동량 방정식(Wave Momentum Eq.)  $R_w$ 이라 불리울 것이다. 한편, 식(7)에서  $W_0$ 를 구해 식 (13)에 대입하여 정리하면 Saint-Venant 방정식은 다음과 같이 하나의 방정식으로 표시된다.

$$(R_s = ) \frac{V(W_v + W_v) - W_v W_v}{V^2 - C^2(1 + \alpha)} = 1 \quad (14)$$

지금부터 상기 식은 波 Saint-Venant 방정식  $R_s$ 라

불리울 것이다.

정상류의 경우  $W_v = W_0 = 0$  이므로 식 (8)은 Froude 수를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$F_r ( = V / \sqrt{gY_r} ) = \sqrt{1 + \alpha} \quad (15)$$

$$\text{혹은, } dy/dx = (S_0 - S_r) / (1 - F_r^2) \quad (16)$$

### 3. 波 Saint-Venant 방정식의 응용

일정 유량, 수심, 유속 등의 전파속도로 표시된 식 (7), (13), (14) 등은 Saint-Venant 방정식의 수치해의 精度를 검토하는데 응용될 수 있다. 즉, 여러 수치해석 방법으로 얻어진 Saint-Venant 방정식의 해는 차분간격의 부적절성, 비선형조건의 근사해, 보간법의 사용 등 여러가지 요인의 오차 때문에 원 수치방정식을 완전히 만족시키지 못한다. 따라서, 본 연구에서는 波 Saint-Venant 방정식을 이용하여 수치해의 精度를 검사하는 방법을 제시하고자 한다. 단, 여기서 波 Saint-Venant 방정식에 의한 수치해의 점검은 그 수치해가 유한차분법으로 표시된 원 수치방정식을 얼마나 정확히 만족시키는 가를 확인하는 것이며, Saint-Venant 방정식의 이론해에 대한 정확도를 점검하는 것은 아니다.

일반적으로, 특성법에 의해 얻어지는 Saint-Venant 방정식의 해는 보간법의 사용에 따른 수치 감쇄 때문에 그 정확도가 약하며, 유한차분법 중에서 양해법의 해 역시 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 조건을 벗어나는 경우 안정하지 못하고 발산하게 된다. 따라서, 본 연구에서는 음해법을 이용한 유한차분법을 채택하여 상기의 波 Saint-Venant 방정식을 이용하여 그 해의 精度를 검사하고자 한다. 본 연구의 사례 연구에 사용된 계산 알고리즘은 Streeter & Wylie(1984)의 "Fluid Transients"의 부록 J에 제시된 프로그램을 약간 변경한 것이다. 예로써, 원 프로그램에서는 banded matrix를 풀기 위해 IBM Scientific Subroutine GELB를 사용하고 있으나 본 연구에서는 대신 IMSL Subroutine LEQT2B를 사용하였다.

또한 식 (4), (5), (6) 등을 4점 음해법을 이용하여 차별화한 루틴을 첨가하였다.

사례연구

본 사례연구에서 고려된 개수로는 길이 5,000m, 폭 4m의 균일 사각형 수로이다. 이 수로의 매닝계수는  $n=0.018$ 이며, 바닥경사는  $S_b=0.001$ 이다. 흐름의 초기조건은 깊이 3m, 유량  $23.81 \text{ m}^3/\text{s}$ 의 등류이다. 상류의 유입수문곡선은 그림 1과 같다. 한편, 수로의 하류단은 위어에 의해 유량이 통제되며 다음의 유량식에 의해 결정될 수 있다고 가정한다.

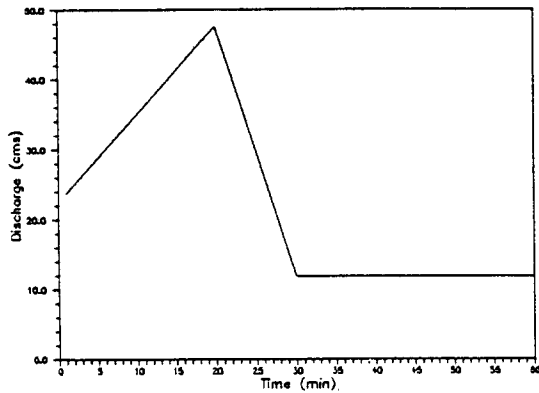


그림 1. 유입수문곡선 (상류단의 경계조건)

$$Q = 6 (y - 0.5)^{1.5} \quad (17)$$

본 사례연구에서의 차분간격은  $\Delta x=250\text{m}$ (차분구간,  $N=20$ )로 고정시켰으며 적절한 차분시간  $\Delta t$ 는 Price (1974)에 의해 제안된 다음과 같은 Monoclinial wave velocity를 사용하여 결정하였다.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{k V} = 76 \text{ sec} \quad (18)$$

여기서, Chezy 방정식의 경우  $k = 3/2$

Manning 방정식의 경우  $k = 5/3$

윗 식에서  $V$ 는 홍수파 정점에서의 평균유속이나, 본

연구에서는 등류시의 평균유속값을 사용하였다.

또한, Preissman의 4점 음해법은 비선형 행렬 방정식을 풀기 위해 Newton - Raphson 방법이 사용되어지며, 본 연구에 사용된 routine에서 수심  $y$  및 유량  $Q$ 에 관련된 허용오차는 "TOL"과 "TOLQ"로 각각 제한된다. 여기서, "TOL" 및 "TOLQ"는 각각 단면에서의 수심  $y$  및 유량  $Q$ 에 관한 Newton-Raphson 방법에 의한 잔차의 절대값들의 합과 비교된다. 본 연구에서는 TOL과 TOLQ의 값으로서 Streeter & Wylie의 부록에 제시된 값인  $TOL=0.016$ ,  $TOLQ=0.395$ 를 사용하였으며, 이 값들은 평균적으로 수심 및 유량의 상대 허용오차가 각각 0.02 및 0.08%에 해당하는 값들이다. 마지막으로 차분시간 간격  $\Delta t$ 의 가중치  $\Psi$ 는 수치해의 안정성을 위해  $0.5 < \Psi \leq 1.0$ 으로 제한된다.

먼저, 차분시간 간격  $\Delta t$ 가 Saint-Venant 방정식의 수치해의 精度에 미치는 영향을 검토하기 위해  $\Delta t$ 는 15.2초 및 76초의 경우에 대해 식 (7), (13), 에서 각각  $R_c$ ,  $R_m$ ,  $R_s$  값을 계산하였다. 이때 TOL 및 TOLQ는 변화시키지 않았으며,  $\Psi$ 값은 Streeter와 Wylie(1983) 등 다른 연구가들의 제안대로 일반적으로 해의 안정성을 유지시키는  $\Psi=0.6$ 으로 고정하였다.

그림 2에 보이는 것이  $\Delta t=15.2$ 초로 수치해석을 한 경우의 식 (7)에 의한  $R_c$ 값의 시간변화이다. 이때의 계산지점은 수로의 상류근처 ( $N=2$ ), 중간 ( $N=10$ ), 하류근처 ( $N=19$ )를 택하였다. 이 그림에서 볼 수 있듯이, 波 연속방정식은 계산시간 전체에 걸쳐  $R_c=1$ 을 유지하지 못하고 상당한 변화를 보이고 있다. 즉,  $R_c=1$ 이 아닌 경우는 모두 그 수치해가 Saint-Venant 방정식의 연속방정식을 만족시키지 못하는 것으로 따라서 그 수치해는 이론적으로는 받아들일 수 없을 것이다. 식 (13)의  $R_m$ 과 식 (14)의  $R_s$  역시 그림 3과 4에서 각각 볼 수 있듯이 간헐적인, 그러나  $R_c$ 의 경우보다는 진폭이 더 큰 변화를 보이고 있다. 그러나, 이러한 오차는  $\Delta t=76$ 초로 하는 경우 그림 5에서 보는 바와 같이 없어지고  $R_c$ ,  $R_m$ ,  $R_s$  공히 "1"을 유지하고 있다.

이러한  $\Delta t$ 값에 따른 수치해의 精度를  $R_c$ ,  $R_m$ ,  $R_s$

등으로 표시하는 경우 전술한 바와 같이 현저하게 달라 보이나 실제  $y$  및  $Q$  값으로 표시하는 경우 그 차이는 실제로 크지 않다. 그 이유는  $W_v$ ,  $W_Q$ ,  $W_y$  등 파의 전파속도들은 유량  $Q$  및 수심  $y$ 의 편미분량의 함수들로서, 이러한 편미분량들은 통상 매우 작은 값들이다 ( $10^{-3} \sim 10^{-5}$ ). 따라서, 유량  $Q$  및 수심  $y$ 의 작은 변화에도 이러한 편미분량들은 상대적으로 매우 크게 변화하며, 그에 따라 각종 파의 전파속도 역시 매우 크게 변화되기 때문이다. 이 결과를  $\Delta t$ 값의 변화에 따른 수로 중간 단면 ( $N=10$ )의 수심수문곡선의 변화 (그림 6)과 유량수문곡선 (그림 7)의 변화에서 쉽게 알 수 있다. 따라서, 자연조건에서의 입력자료의 精度와 수치해석의 한계를 고려하면 본 연구에서 제시된 사례는  $\Delta t$ 의 선택에 따른 이

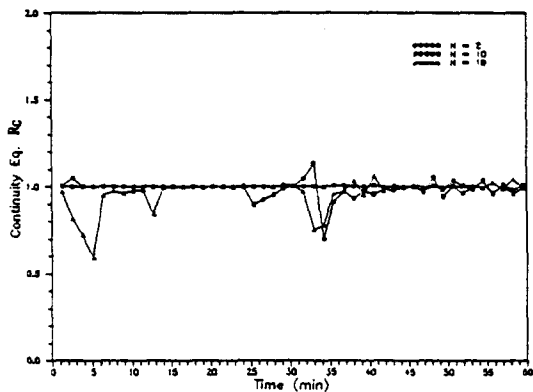


그림 2. 파 연속방정식의 변화 ( $\Delta t=15, 2$ 초)

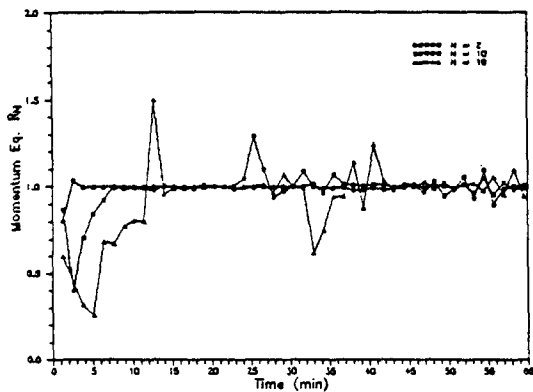


그림 3. 파 운동량방정식의 변화 ( $\Delta t=15, 2$ 초)

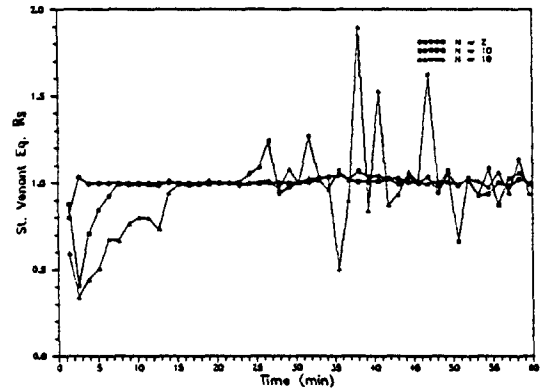


그림 4. 파 Saint-Venant 방정식의 변화 ( $\Delta t=15, 2$ 초)

러한 수심  $y$  및 유량  $Q$ 의 계산치의 차이는 실제로 큰 문제가 될 수 없으나, 다른 경우에 대하여도 본 연구의 파 Saint-Venant 방정식을 이용하여  $R$ 값들이 공히 1.0을 유지하는 적정  $\Delta t$ 값을 결정할 수 있다.

두번째로, TOL 및 TOLQ의 변화에 따른 수치해의 精度의 민감도를 분석하기 위해 원래의 TOL 및 TOLQ 값의 5배의 경우 각각 해를 계산하였다. 즉 TOL=0.08, TOLQ=2.0의 경우  $R_c$ ,  $R_u$ ,  $R_s$ 의 값들을 각각 그림 8, 9, 10에 도시하였다. 이 경우  $\Delta t=76$ 초 및  $\Psi=0.6$ 을 유지하였다. 이 그림들에서 알 수 있듯이, 기대한대로 TOL 및 TOLQ의 값을 증가시킬 수록 수치해의 精度는 떨어지며, 그림 5의 경우와 같이 TOL 및 TOLQ 값들이 각각 0.016 및 0.395 정도인 경우  $R$ 값들이 "1"을 유지한다. 그러나,  $\Delta t$ 의 경우와 마찬가지로 이러한 TOL 및 TOLQ에 따른 수치해  $y$  및  $Q$ 의 변화는 사실상 무시할 정도로 작다. 그림 11은 수로 중간 지점에서의 수심수문곡선을 보여주며 그림 12는 유량수문곡선을 보여주고 있다. 이 그림들에서 볼 수 있듯이, TOL 및 TOLQ 값에 대한 수치해의 민감도는 실질적으로 무시할 수 있으며 이 정도의 변화는  $\Delta t$ 값의 선택에 따른 변화에도 미치지 못하고 있다.

이러한  $\Delta t$  및 TOL (TOLQ)의 변화에 따른 수치해의 민감도는 본 사례연구의 경우 무시할 정도로 작지만 수문량의 변화가 보다 급격한 다른 사례에는

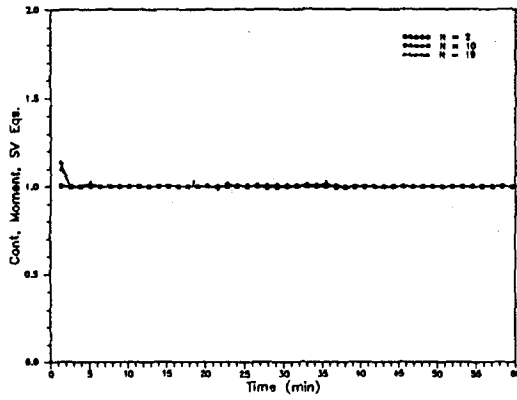


그림 5. 파 연속, 운동량, Saint-Venant 방정식의 변화 ( $\Delta t=76$ 초)

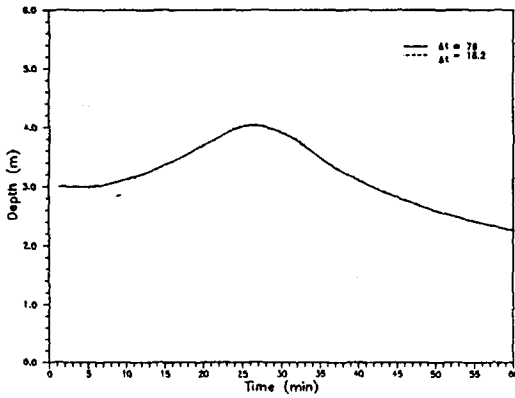


그림 6.  $\Delta t$ 의 변화에 따른 수로 중간단면 (N=10)에서의 수심수문곡선

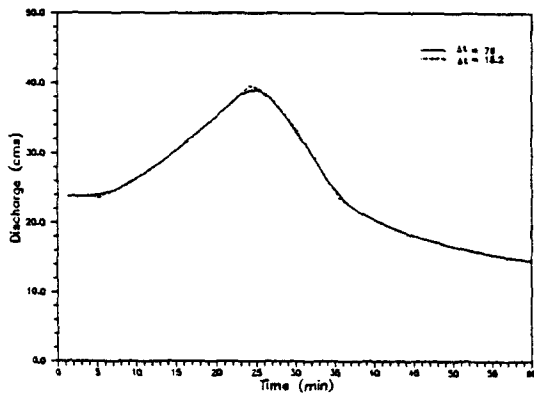


그림 7.  $\Delta t$ 의 변화에 따른 수로 중간단면 (N=10)에서의 유량수문곡선

보다 커질 수 있으며, 따라서 그 경우  $\Delta t$  및 TOL (TOLQ)의 적절한 선택은 중요한 요소가 될 것이다.

#### 4. 요약 및 결론

개수로의 1차원 부정류 해석에 자주 인용되는 Saint-Venant 방정식을 소위 일정수심 전파속도  $W_y$ , 일정유량 전파속도  $W_q$ , 일정유속 전파속도  $W_v$  등을 이용하여 표시하였다. 즉, 파 연속방정식은 다음과 같이 표시되며,

$$\frac{W_v(W_y - V)}{W_y(W_q - V)} = 1$$

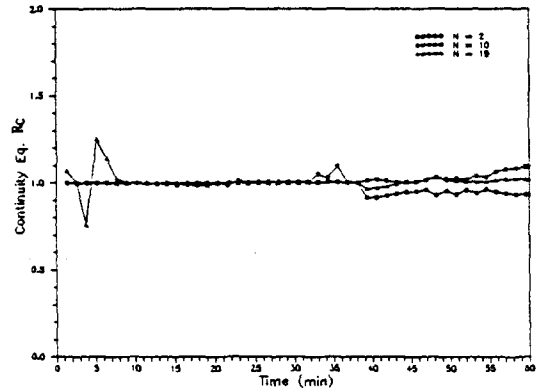


그림 8. 파 연속방정식의 변화 (TOL, TOLQ 5배 증가)

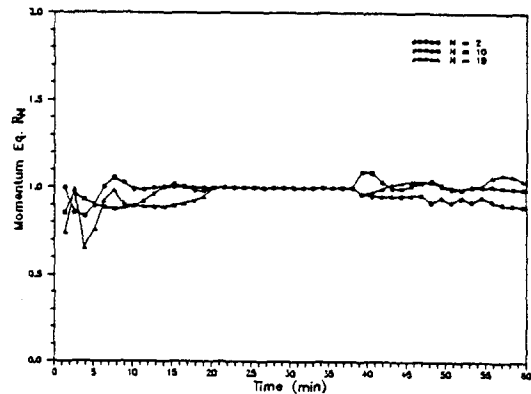


그림 9. 파 운동량방정식의 변화 (TOL, TOLQ 5배 증가)

파 운동량방정식은 본 연구에서 다음과 같이 제시되었다.

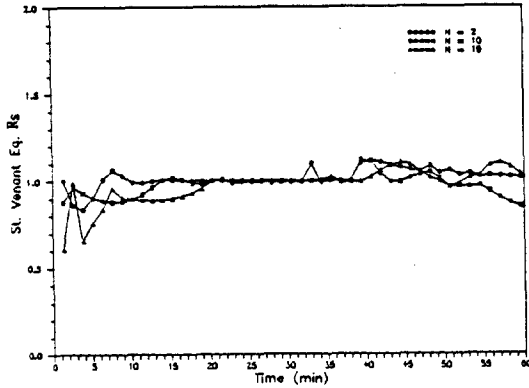


그림 10. 파 Saint-Venant 방정식의 변화 (TOL, TOLQ 5배 증가)

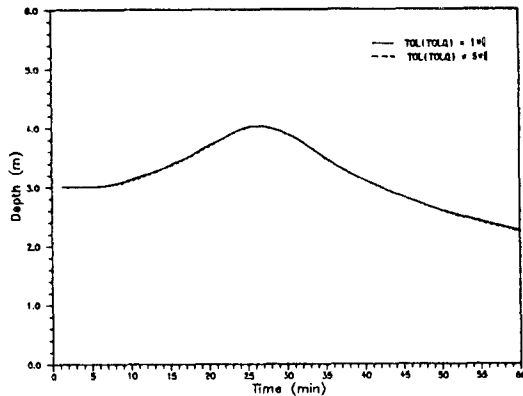


그림 11. TOL, TOLQ의 변화에 따른 수로 중간단면 (N=10)에서의 수심수문곡선

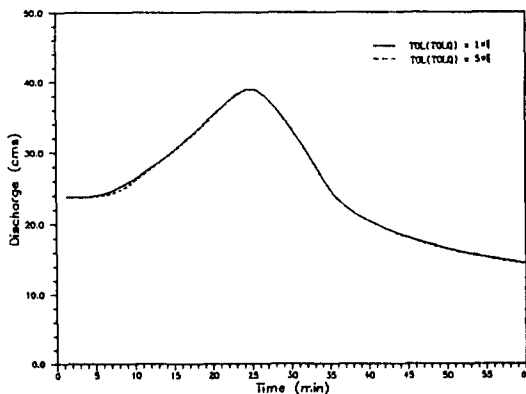


그림 12. TOL, TOLQ의 변화에 따른 수로 중간단면 (N=10)에서의 유량수문곡선

$$\frac{(2V - W_0) W_y}{V^2 - C^2(1+\alpha)} = 1$$

따라서, 파 Saint-Venant 방정식은 상기 두 식에서  $W_0$ 를 소거하여 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{V(W_x + W_y) - W_x W_y}{V^2 - C^2(1+\alpha)} = 1$$

상기 세 식들은 수치해석으로 얻어진 Saint-Venant 방정식의 해의 精度를 가늠하는데 사용될 수 있다. 즉 4점 음해법의 경우,  $\Delta x/\Delta t$ 의 적정 값이 본 파 Saint-Venant 방정식에 의해서 추정될 수 있으며, 그 밖에 Newton - Raphson 방법의 적정 허용오차도 결정될 수 있을 것이다. 본 연구는 이러한 새로운 형태의 Saint-Venant 방정식에 관한 초보적인 연구이며, 저자들은 이에 관해 계속적인 연구를 진행하고 있다.

### 5. 감사의 말

본 연구는 제 1 저자가 미국 Cincinnati 대학에서 연구 조교수로 있는 동안 공과대학장인 Dr. C. N. Papadakis와 공동으로 시작되었으며 최종성과는 지금의 한국건설기술연구원에서 제 2 저자와 같이 얻어진 것임을 밝혀 둔다.

### 기호

- A : 통수단면적
- C : 장파의 전파속도 ( $= \sqrt{gY_T}$ )
- $F_r$  : Froude number ( $= V/\sqrt{gY_T}$ )
- g : 중력가속도 ( $9.81m^2/s$ )
- N : 차분구간의 수
- Q : 유량
- $R_C$  : 파 연속방정식
- $R_M$  : 파 운동량방정식
- $R_S$  : 파 Saint-Venant 방정식

- S<sub>r</sub> : 마찰경사
- S<sub>o</sub> : 하상경사
- S<sub>w</sub> :  $\partial y / \partial x$
- T : 수면폭
- TOL : Newton-Raphson 방법에서의 y에 관련된 허용오차
- TOLQ : Newton-Raphson 방법에서의 Q에 관련된 허용오차
- t : 시간
- V : 평균유속
- W<sub>Q</sub> : 일정유량의 전파속도
- W<sub>V</sub> : 일정유속의 전파속도
- W<sub>y</sub> : 일정수심의 전파속도
- x : 흐름방향으로의 거리
- y : 수심
- y<sub>T</sub> : 수리수심 ( = A/T )
- $\alpha$  :  $(S_r - S_o) / S_w$
- $\Delta t$  : 계산시간간격
- $\Delta x$  : 계산거리간격
- † : 4점 음해법의 가중치

**참고문헌**

1. 선우중호(1983), "부정류 해석에 의한 금강하류부 홍수위 결정", 한국수문학회지, 제 16권, 제 2호, pp123-129
2. 김현영, 박승우(1989), "금강하류 홍수의 부정류 해석", 한국수문학회지, 제 22권, 제 1호, pp99-107
3. 건설부, 한강홍수통제소(1989), 금강홍수예경보 프로그램개발 최종 보고서.
4. Laushey, L. M. (1985), 미발행 보고서, Univ. of Cincinnati, Cincinnati, Ohio, U. S. A.
5. Wylie, E. B., and Streeter, V. L. (1983), *Fluid Transients*, Feb Press, P. O. Box 2431, Ann Arbor, Michigan, U. S. A.
6. Price, R. M. (1974), *Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing*, Journal of Hydraulics Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 100, No. HY7, July, U. S. A.

**부록 A:**

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{A. 1}$$

식(A. 1)의 첫번째 항  $\partial Q / \partial x$ 를  $\partial Q / \partial t (\neq 0)$ 로 나누어 정리하면

$$- \frac{\partial Q}{\partial t} + W_o \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{A. 2}$$

$Q=AV$ 이므로 식(A. 2)는 다시 다음과 같이 표시된다.

$$A \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial t} - W_o \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{A. 3}$$

한편, 식(A. 1)은  $Q=AV$ 를 고려하면 다음과 같이 표시된다.

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{A. 4}$$

따라서 식(A. 3)의 첫번째 항을  $\partial V / \partial x (\neq 0)$ 로 나누어 식(A. 4)를 고려하면,

$$-W_o | - V \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial t} - W_o \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{A. 5}$$

다시 식(A. 5)를  $\partial A / \partial x (\neq 0)$ 로 나누어 정리하면,

$$W_o (V - W_o) - V W_o + W_o W_o = 0 \tag{A. 6}$$

$$\text{혹은, } \frac{W_o (W_o - V)}{W_o (W_o - V)} = 1 \tag{A. 7}$$

**부록 B:**

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + S_r - S_o = 0 \tag{B. 1}$$

식(B. 1)의 첫번째 항을  $\partial Q / \partial x (\neq 0)$ 로 나누고, 연속방정식에서  $\partial Q / \partial x = -\partial A / \partial t$ 를 고려하여 두번째 항을  $\partial A / \partial x (\neq 0)$ 로 나누어 식(B. 1)을 다시 표시하면,

$$- \frac{1}{gA} W_o \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2Q}{gA^2} W_o \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + S_r - S_o = 0 \tag{B. 2}$$

다시 식(B. 2)의 첫번째 항에 연속방정식  $\partial Q / \partial x = -\partial A / \partial t$ 를 고려하여 전체항을  $\partial A / \partial x (\neq 0)$ 로 나누어 정리하면,

$$- \frac{1}{gA} W_o W_o + \frac{2Q}{gA^2} W_o - \frac{Q^2}{gA^3} + \frac{\partial y / \partial x + S_r - S_o}{\partial A / \partial x} = 0 \tag{B. 3}$$



한편  $\partial A/\partial x = T \partial y/\partial x$ 임을 고려하면 식(B.3)의 마지막 항은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y/\partial x + S_r + S_o}{T \partial y/\partial x} &= \frac{1}{T} + \frac{S_r - S_o}{\partial y/\partial x} \\ &= \frac{1}{T} (1 + \alpha) \end{aligned} \quad (B.4)$$

윗 식에서  $\alpha = \frac{S_r - S_o}{\partial y/\partial x} = \frac{S_r - S_o}{S}$ .

$$S_o = \partial y/\partial x$$

따라서, 식(B.3)은 다음과 같이 간략화 된다.

$$W_o W_y - 2VW_y + V^2 - gY_r (1+\alpha) = 0 \quad (B.5)$$

혹은, 
$$\frac{(2V - W_o) W_y}{V^2 - C^2 (1+\alpha)} = 1 \quad (B.6)$$

윗 식에서 분모는 정류항을, 분자는 부정류항을 표시한다.