

Frequency Window Method에 의한 1차-2차 구조시스템의 진동특성

Frequency Window Method for the Vibration
of Primary-Secondary Structural Systems

민 경 원*

ABSTRACT

The dynamic properties of primary-secondary structural systems are examined using analytical expressions for the modal properties. The analysis begins with a Lagrange multiplier formulation to develop a characteristic equation in terms of primary system mobilities and secondary system impedances. The complexity of the problem is examined in terms of the order of the polynomial expressions in the characteristic equation by developing new method, frequency window method. It is shown that the reduction of complexity can only be obtained by a reduction of accuracy, but by retaining the dominant effects of the dynamics problem, the loss of accuracy is not excessive. The reduced problem is examined further to develop simple expressions for the modal properties which provide insight into the resonance characteristics of the primary-secondary system problem. The results are useful as a complement to existing computational techniques for understanding and interpreting dynamic analysis results.

1. 서 론

하나의 1차 구조시스템(primary structural system)에 연결된 여러 개의 2차 구조시스템(secondary structural system)의 진동 특성은 복잡하지만 매우 흥미로운 현상을 가지고 있다. 이러한 1차-2차구조 시스템(primary-secondary structural system)의 진동 해석을 위한 많은 방법들이 제시되어 왔는데 대표적인 방법으로는 낮은 진동수 영역의 응답 특성을 파악하는 모드합성법(mode synthesis)[1]과 높은 진동수 영역의 통계에너지방법(statistical energy analysis)[2]을 들 수 있다.

최근 구조물의 경량화, 고강도화, 그리고 진동과 소

음의 저감에 대한 필요성에 따라 다양하고 복잡한 구조물의 설계가 요구되기 시작하였으며 대표적인 예로 여러 개의 경량 2차 구조시스템이 중량의 1차 구조시스템에 연결된 1차-2차 구조시스템을 들 수 있다. 이러한 시스템의 해석을 위해 유한요소법[3], 모드 합성법, 그리고 통계에너지 방법등이 이용될 수 있으나 진동 특성을 파악하는 데에 있어서 부족한 점이 있었다. 따라서 많은 연구가 위 문제점의 개선을 위해 진행되어 왔는데 대표적인 것으로는 모드합성법의 개념, 행렬 이론과 섭동법(perturbation method)등을 응용한 Sackman과 Kelly[4], Sakman등[5], Der Kiureghian등[6], 그리고 Igusa와 Der Kiureghian[7]의 성과를 들 수 있다. 위 연구에서는 특성식(characteristic equation)의 복잡성이 구조시스템간의 커플링에 비례하며 커플링이 심하지 않을 때에는 1차-2차 구

* 삼성종합건설 기술연구소 선임연구원

조시스템간의 고유진동수와 모드형상에 관한 간단한 식이 유도된다는 것이 밝혀졌다. 이러한 사실은 커플링된 구조시스템의 공진특성 이해에 커다란 도움을 주는 것이다. 그러나 위 연구는 1차-2차 구조시스템의 질량이 집중(lumped mass)되었다는 조건이 있었으며 그 이후 Nour-Omid등 [8]과 Zhou등[9]에 의해 1차 구조시스템의 질량이 분포(continuous mass)된 1차-2차 구조시스템 해석을 하였다.

본 논문에서는 위 연구들의 아이디어를 일반화시켜 분포 질량된 1차-2차 구조시스템의 진동특성을 파악하고 특성식의 복잡성을 대폭적으로 줄일 수 있는 새로운 방법인 frequency window method를 제시하였으며 구조시스템의 모델로는 여러개의 2차 구조시스템의 강점으로 지지된 1차 구조시스템을 대상으로 하였다.(그림 1참조)

해석의 첫 단계로 각 시스템의 편미분 운동방정식을 Lagrange방정식을 이용하여 1차, 2차 구조시스템의 모드특성(modal properties)으로 표현된 식으로 변환을 하였으며 지지점의 조건으로 Lagrange multiplier를 사용하였다. 다음 단계로 지지점의 변위를 변수로 하는 새로운 특성식을 유도하였으며 이 식을 1차 구조시스템의 모빌리티(mobility)와 2차 구조시스템의 임피던스(impedance)로 표현된 식으로 변환을 하였다. 이러한 식은 구조시스템의 모드의 상관성에 따른 연구를 통하여 복잡성이 대폭적으로 감소된 식으로 바뀐다. 경우에 따라서는 행렬 형태의 특성식이 스칼라 형태의 식으로 변환이 되며 1차-2차 구조시스템의 고유진동수와 모드형상에 관한 간단한 식이 유도되었다.

2. Lagrange 방정식

1차-2차 구조시스템의 모델로는 영역 $\Omega_k, k=1, \dots,$

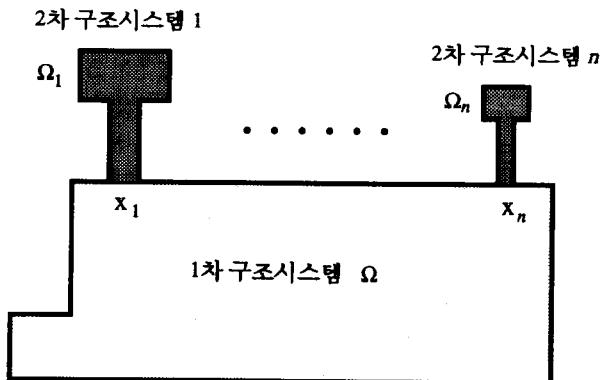


그림 1 1차-2차 구조시스템

n 을 가지는 n 개의 2차 구조시스템이 강점으로 지지된 영역 Ω 을 가지는 1차 구조시스템을 대상으로 하였으며 각각의 2차 구조시스템은 지지점 x_k 에 강점으로 연결되어 있다.

자유지지의 1차 구조시스템은 모드형상 $\Phi_i(x)$, 고유진동수, ω_i , 질량 $\rho(x)$ 으로 표현되며 모드형상은 질량에 대하여 표준화(normalization)시켰다. 또한 지지점을 고정시킨 2차 구조시스템 k 는 모드형상 $\Psi_k(x)$, 고유진동수 ω_k , 질량 $\rho_k(x)$ 으로 표현된다. 이 시점에서 모든 구조시스템이 비감쇠(undamped)하다고 가정을 하나 유도된 특성식에 복소고유진동수(complex natural frequency)를 이용함으로써 감쇠현상을 고려할 수 있으며 1차와 2차 구조시스템은 고전적 감쇠(classically damped)의 성질을 가지고 있다고 가정을 한다.

조화응답(harmonic response)의 자유진동 변위계(free vibration displacement fields)는 1차 구조시스템의 경우

$$w(x, t) = \sum_i a_i \Phi_i(x) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

2차 구조시스템 k 의 경우

$$u_k(x, t) = \left[\sum_j b_{kj} \Psi_j(x) + c_k + d_k \times (x + x_k) \right] e^{-i\omega t} \quad (2)$$

로 표현된다. a_i 와 b_{kj} 는 모드좌표이며 c_k 와 d_k 는 각각 지지점의 직진변위(translation)와 회전변위(rotation)를 나타낸다. 다음에 설명될 부분에서는 모든 식에 나타나는 $e^{-i\omega t}$ 를 편의상 생략하기로 한다.

Lagrange방정식을 이용하여 운동에너지 K 와 포텐셜에너지 U 을 구하면 다음과 같다.

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \sum_i a_i^2 + \sum_k \left[\sum_j b_{kj}^2 + 2 \sum_j b_{kj} (c_k^T M_{kj} + d_k^T M_{kx}) + |c_k|^2 M_k + 2d_k^T M_{kx} c_k + d_k^T M_{kxx} d_k \right] \right\} \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i a_i^2 \omega_i^2 + \sum_k \sum_j b_{kj}^2 \omega_k^2 \right\} \quad (4)$$

여기서 2차 구조시스템 k 인 경우

$$M_k \equiv \int_{\Omega_k} \rho_k(x) dx \quad (5)$$

은 전체질량이며

$$M_{kl} \equiv \sum_{m=1}^3 \mathbf{e}_m \times \left[\int_{\Omega_k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \mathbf{e}_m^T \quad (6)$$

$$M_{kkl} \equiv \int_{\Omega_k} \left[|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \right] \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7)$$

은 지지점에 대한 질량 모멘트 행렬이다.
한편

$$M_{kj} \equiv \int_{\Omega_k} \Psi_{kj} \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (8)$$

$$M_{kkl} \equiv \int_{\Omega_k} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \times \Psi_{kj}] \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9)$$

은 2차 구조시스템 k 의 j 번째 모드형상과 지지점간의 커플링을 나타내는 벡터이며 \mathbf{e}_m 는 단위 벡터(unit vector), \mathbf{I} 는 단위행렬(identity matrix)이다.

지지점 \mathbf{x}_k 에서의 직진변위와 회전변위로 규정되는 제약조건은 1차와 2차 구조시스템의 변위를 같게 함으로써 Lagrange multiplier를 이용할 수 있다.

$$\mathbf{f}_k \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{c}_k \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix} = \sum_i a_i \hat{\Phi}_{ik} \quad (10)$$

$\hat{\Phi}_{ik}$ 는 지지점 \mathbf{x}_k 에서의 1차 구조시스템의 i 번째 모드에 관계된 변위를 나타낸다.

$$\hat{\Phi}_{ik} \equiv \begin{bmatrix} \Phi_i(\mathbf{x}_k) \\ \nabla \times \Phi_i(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

2차 구조시스템 k 에 관한 Lagrange multipliers λ_k 를 식(10)에 적용시키면 Lagrange 방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$(\omega_i^2 - \omega^2) a_i + \sum_k \lambda_k^T \hat{\Phi}_{ik} = 0 \quad (12)$$

$$(\omega_{kj}^2 - \omega^2) b_{kj} - \omega^2 \mathbf{f}_k^T \hat{M}_{kj} = 0 \quad (13)$$

$$\omega^2 \{ \hat{M}_k \mathbf{f}_k + \sum_j b_{kj} \hat{M}_{kj} \} + \lambda_k = 0 \quad (14)$$

여기서

$$\hat{M}_{kj} = \begin{bmatrix} M_{kj} \\ M_{kjl} \end{bmatrix} \quad \hat{M}_k = \begin{bmatrix} M_{kl} & M_{kkl} \\ M_{kkl} & M_{kkl} \end{bmatrix} \quad (15)$$

로 정의되는 질량 커플링 행렬이다.

1차-2차 구조시스템의 진동특성은 식(12)~(14)를

수치적으로 풀어서 파악할 수 있으나 본 논문에서는 해석적인 접근을 하여 진동특성을 용이하게 할 수 있는 수학적 모델을 제시한다.

3. 1차 구조시스템의 모빌리티와 2차 구조시스템의 임피던스

지지점의 변위 \mathbf{f}_k 를 변수로 고려하면 식 (12)~(14)는 다음과 같은 과정으로 축약이 된다. 첫째로 a_i 와 b_{kj} 를 \mathbf{f}_k 로 표현을 하면 다음과 같다.

$$a_i = \frac{\omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \sum_k \hat{\Phi}_{ik}^T \left\{ \hat{M}_k + \sum_j \frac{\omega^2}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} \hat{M}_{kj} \hat{M}_{kj}^T \right\} \mathbf{f}_k \quad (16)$$

$$b_{kj} = \frac{\omega^2}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} \hat{M}_{kj}^T \mathbf{f}_k \quad (17)$$

식 (16)의 괄호안의 항은 2차 구조시스템 k 의 임피던스 $Z_k(\omega)$ 에 비례하며 임피던스는 지지점에 단위속도의 변위를 일으키는 외력을 의미한다.

$$Z_k(\omega) = -i\omega \left\{ \hat{M}_k + \sum_j \frac{\omega^2}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} \hat{M}_{kj} \hat{M}_{kj}^T \right\} \quad (18)$$

식(16)을 $Z_k(\omega)$ 의 식으로 변환을 한 다음, 식 (10)을 이용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_k = \sum_i \left\{ \sum_j \frac{i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_{ik} \hat{\Phi}_{ij}^T \right\} Z_i \mathbf{f}_i \quad (19)$$

윗식의 괄호안에 있는 항은 1차 구조시스템의 모빌리티 $N_{ki}(\omega)$ 를 나타내는데 지지점 i 에 단위 외력을 가했을 때 지지점 k 에서의 속도를 의미한다.

$$N_{ki}(\omega) \equiv \sum_j \frac{-i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_{ik} \hat{\Phi}_{ij}^T \quad (20)$$

위 모빌리티를 식(19)에 대입하고 행렬로 표시를 하면 다음과 같은 새로운 형태의 특성식이 다음과 같이 유도된다.

$$[\mathbf{I} + \mathbf{N}(\omega) \text{diag} \{ Z_1(\omega) \cdots Z_n(\omega) \}] \mathbf{f} = 0 \quad (21)$$

$\mathbf{N}(\omega)$ 는 1차 구조시스템의 모빌리티 행렬을 뜻하며 다음과 같다.

$$\mathbf{N}(\omega) \equiv \begin{bmatrix} N_{11}(\omega) & \cdots & N_{1n}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{n1}(\omega) & \cdots & N_{nn}(\omega) \end{bmatrix} =$$

$$\sum_i \frac{-i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_{ik} \hat{\Phi}_{ie}^T \quad (22)$$

f는 지지점의 변위를 뜻하며 6n벡터이다.

$$f = [f_1^T \dots f_n^T]^T \quad (23)$$

4. Frequency Window Method

진동문제의 복잡성은 특성식 (21)의 다항식 차수로 결정된다. 1차 구조시스템에서 P개의 모드와 2차 구조시스템 k에서 Q(k)개의 모드가 해석에 직접 관련되어 있다면 문제의 복잡성 Θ은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\Theta = P + \sum_k Q(k) \quad (24)$$

복잡성을 줄이는 일반적인 방법은 모드수 P와 Q(k)를 줄이는 것인데, frequency window method의 개념은 모드의 커플링 정도에 따라 특성식을 지배항(dominant terms)과 비지배항(non-dominant terms)으로 분리하고 비지배항을 약식화하는 것이다.

식 (18)과 (22)의 임피던스와 모빌리티에서 1차-2차 구조시스템의 고유진동수가 초기추정 진동수 ω0 주위에 인접하여 있다가 생각하면 이에 관련된 모드의 항이 상대적으로 커져 지배항을 추출해낼 수가 있다. 이러한 지배항과 그외의 항인 비지배항을 다음과 같은 크기 (window size), δ와 모드집합 I의 정의를 하여 분류할 수 있다.

$$I(\omega_0, \delta) \equiv \{ \text{all } i \text{ such that } |\omega_i - \omega_0| < \delta \} \quad (25)$$

$$I(\omega_0, \delta, k) \equiv \{ \text{all } kj \text{ such that } |\omega_{kj} - \omega_0| < \delta \} \quad (26)$$

i는 1차 구조시스템의 i번째 모드를 나타내며 κj는 2차 구조시스템 κ의 j번째 모드를 나타낸다. 이러한 정의를 사용하면 식(18)와 (22)이 다음과 같이 분류된다.

$$\begin{aligned} Z_k(\omega) &= \sum_{j \in I(\omega_0, \delta, k)} \frac{-i\omega^3}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} \hat{M}_{kj} \hat{M}_{kj}^T \\ &- i\omega \left\{ \hat{M}_k + \sum_{j \in I(\omega_0, \delta, k)} \frac{\omega^2}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} \hat{M}_{kj} \hat{M}_{kj}^T \right\} \quad (27) \\ N(\omega) &= \sum_{i \in I(\omega_0, \delta)} \frac{-i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_i^T \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i \in I(\omega_0, \delta)} \frac{-i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_i^T \quad (28)$$

윗식(27)과 (28)의 첫째 항은 지배항이며 둘째 항은 비지배항이다.

변수 ω에 민감한 항은 지배항의 분모로써 그외의 항은 ω대신 ω0를 대입함으로 정확성의 큰 손실없이 모빌리티와 임피던스의 약식화를 다음과 같이 할 수 있다.

$$Z_k(\omega) \approx Z_{k0}(\omega, \omega_0, \delta) + Z_{k1}(\omega_0, \delta) \quad (29)$$

$$N(\omega) \approx N_0(\omega, \omega_0, \delta) + N_1(\omega_0, \delta) \quad (30)$$

Zk1(ω, ω0, δ)와 N0(ω, ω0, δ)는 각각 임피던스와 모빌리티의 지배항을 뜻하며

$$Z_{k0}(\omega, \omega_0, \delta) = \sum_{j \in I(\omega_0, \delta, k)} \frac{-1\omega_0^3}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} \hat{M}_{kj} \hat{M}_{kj}^T \quad (31)$$

$$N_0(\omega, \omega_0, \delta) = \sum_{i \in I(\omega_0, \delta)} \frac{-1\omega_0}{\omega_i^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_i^T \quad (32)$$

와 같이 정의된다.

한편 Zk1(ω0, δ)와 N1(ω0, δ)는 각각 임피던스와 모빌리티의 비지배항을 뜻하며

$$Z_{k1}(\omega_0, \delta) = -i\omega_0 \left\{ \hat{M}_k + \sum_{j \in I(\omega_0, \delta, k)} \frac{\omega_0^2}{\omega_{kj}^2 - \omega_0^2} \hat{M}_{kj} \hat{M}_{kj}^T \right\} \quad (33)$$

$$N_1(\omega_0, \delta) = \sum_{i \in I(\omega_0, \delta)} \frac{-i\omega_0}{\omega_i^2 - \omega_0^2} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_i^T \quad (34)$$

와 같이 정의된다.

윗 식(31)~(34)을 식 (21)에 대입하면 복잡성이 감소된 낮은 차수의 특성식이 유도된다. 복잡성은 식 (31)~(32)에 포함된 모드수로 결정이 되므로 Θ를 δ에 속해있는 모드수라고 생각하면 특성식의 복잡성은

$$\Theta = \Theta[I(\omega_0, \delta)] + \sum_k \Theta[I(\omega_0, \delta, k)] \quad (35)$$

로 표현되며 식 (24)에 비해 복잡성이 크게 감소가 된 것이다.

δ는 복잡성과 정확성에 직접적으로 관련이 되는 것으로 식 (31), (32)에 따르면 δ가 작을수록 복잡성이 감소되는 것을 뜻한다. 또한 식 (31)~(34)에서 볼 수

있듯이 민감한 모드는 δ 에 포함시켜 고도의 정확성을 유지시키고 그외의 모드는 기존의 모드절단방법(mode truncation method)대신 약식화를 통하여 해석에 포함시킴으로써 정확성을 향상시킬 수가 있다. 극한 경우로 $\delta \rightarrow \infty$ 일때는 원래의 특성식이 된다.

본 논문에서는 1개의 모드만이 δ 에 포함되는 경우를 고려하여 행렬 형태의 특성식을 스칼라 형태의 식으로 변환을 하였다. 그 결과로써 1차와 2차 구조시스템의 질량비와 강성비 변수로 표현된 1차-2차 구조시스템의 고유진동수와 모드형상을 유도하였으며 2개 이상의 모드가 포함된 δ 의 해석은 다음 연구에서 다루기로 한다.

5. One-Mode Window

모드의 분류 집합으로 초기추정 진동수 ω_0 를 가지는 δ 를 정의하면 다음과 같다.

$$J(\delta, \omega_0) \equiv \{ \text{all indices } i \text{ and } \kappa j \text{ such that } |\omega_i - \omega_0| < \delta, |\omega_{\kappa j} - \omega_0| < \delta \}$$

가장 간단한 모델인 one-mode window는 한개의 모드만이 포함된 δ 를 나타내는 것으로 $J(\delta, \omega_0)$ 는 한개의 요소를 가진다. 따라서 one-mode window는 다음과 같이 2가지 형태의 분류 집합을 가진다.

$\{i\}$ 과 $\{\kappa j\}$

이 형태는 각각 1차 구조시스템과 2차 구조시스템 κ 에 관계된 모드로써 다음에서 자세히 설명된다.

5.1 모드 $\{\kappa j\}$

표기의 편의상 $k=1$ 로 가정을 하고 초기추정 진동수를 2차 구조시스템 1의 j 번째 고유진동수로 정한다 $\omega_0 = \omega_{1j}$. 식 (25)와 (26)은 $I(\omega_0, \delta) = \{ \}$, $I(\omega_0, \delta, 1) = \{1j\}$ 와 $1 \neq 1$ 일때 $I(\omega_0, \delta, l) = \{ \}$ 로 된다.

이러한 모드분류에 따라 식 (21)을 간단히 하면 다음과 같다.

$$[I + N(\omega_0) \text{diag} \{Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta) + Z_{11}(\omega_0, \delta), Z_2(\omega_0), \dots, Z_n(\omega_0)\}] f = 0 \quad (36)$$

여기에서

$$Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta) = \frac{-i\omega_0^3}{\omega_v^2 - \omega^2} \hat{M}_{1j} \hat{M}_{1j}^T \quad (37)$$

이고 $Z_{11}(\omega_0, \delta)$ 는 식(33)에 나타나있다. $Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta)$ 는 나머지 임피던스 항보다 크기가 한 차수(one or-

der)높은 것으로 이러한 차수만을 고려하면 다음과 같은 축약된 특성식이 유도된다.

$$[I + N(\omega_0) \text{diag} \{Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta) 0 \dots 0\}] f = 0 \quad (38)$$

윗 식을 푸는 단계로 첫째 1차-2차 시스템의 고유진동수 ω 를 구하고 둘째로 모드형상 f_1, f_2, \dots, f_n 을 구한다. 모드형상 f_1 만을 고려하여 식(38)을 정리하면 다음과 같다.

$$[I_{11} + N_{11}(\omega_0) Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta)] f_1 = 0 \quad (39)$$

$$= \left[I_{11} + \frac{-i\omega_0^3}{\omega_v^2 - \omega^2} N_{11}(\omega_0) \hat{M}_{1j} \hat{M}_{1j}^T \right] f_1 = 0$$

I_{11} 는 I 의 부행렬(submatrix)로써 1차 구조시스템과 j 의 지지점 자유도에 관계된 것이다.

윗 식은 6×6 행렬이나 랭크(rank)가 1인 것을 감안하면 윗 식에 \hat{M}_{1j}^T 를 곱하고 다음의 정의를 이용하면

$$m_1 \equiv \frac{\omega_0^2}{\omega_v^2 - \omega^2} M_{1j}^T f_1 \quad (40)$$

다음과 같은 스칼라 형태의 식이 유도된다.

$$[\omega_v^2 - \omega^2 - i\omega_0^3 \hat{M}_{1j}^T N_{11}(\omega_0) \hat{M}_{1j}] m_1 \omega_0^{-2} = 0 \quad (41)$$

따라서 1차-2차 구조시스템의 고유진동수 식은 다음과 같다.

$$\omega = \omega_v \sqrt{1 - \gamma_1} \quad (42)$$

$$\gamma_1 = i\omega_0 \hat{M}_{1j}^T N_{11}(\omega_0) \hat{M}_{1j} \quad (43)$$

무명수 값(dimensionless value)인 γ_1 은 지지점에 대한 1차 구조시스템의 연성(flexibility)에 관한 변수로 시스템의 고유진동수에 영향을 미친다. $\gamma_1=0$ 인 경우 1차 구조시스템은 무한대의 강성을 가진 시스템으로 거동을 하며 1차-2차 구조시스템의 고유진동수는 지지점이 고정된 2차 구조시스템의 고유진동수와 같다. 플러스값의 γ_1 은 지지점을 연하게 하며 시스템의 고유진동수를 감소시키는 역할을 한다.

γ_1 은 1차, 2차 구조시스템의 질량비에 비례하는 것으로 2차 구조시스템의 질량이 1차 구조시스템보다 적을수록 γ_1 은 제로에 접근하며 1차시스템은 무한대의

강성을 가진 시스템이란 거동을 한다. 따라서 지점 연성변수(support flexibility parameter)란 이름이 γ_i 에 적용될 수 있다.

모드형상 f_i 는 식(42)의 고유진동수를 식(39)에 대입하고 m_i 를 1로 놓으면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$f_i = i\omega_0 N_{1i}(\omega_0) M_{1i} \quad (44)$$

$$f_k = i\omega_0 N_{ki}(\omega_0) M_{1i} \quad (45)$$

이러한 결과는 모드형상의 상대크기가 1차 구조시스템의 크로스 모빌리티(cross mobility)에 비례함을 나타낸다.

5.2 모드*i*

초기추정 진동수를 1차 구조시스템의 i 번째 고유진동수로 정한다 $\omega_0 = \omega_i$. 식 (25)와 (26)의 분류집합은 $I(\omega_0, \delta) = \{i\}$ and $I(\omega_0, \delta, \kappa) = \{ \}$ 로 되며 식 (31)-(34)를 이용하여 식(21)를 간단히 하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$[I + N_0(\omega, \omega_0, \delta) \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\}] f = 0 \quad (46)$$

여기에서

$$N_0(\omega, \omega_0, \delta) = \frac{-i\omega_0}{\omega_i^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_i^T \quad (47)$$

를 의미한다.

윗 식은 $6n \times 6n$ 행렬이나 랭크가 1인 것을 감안하면 식 (46)에 $i\omega_0^{-1} \hat{\Phi}_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\}$ 를 곱하고 다음 정의를 이용하면

$$p_i \equiv \frac{i\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \hat{\Phi}_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\} f \quad (48)$$

스칼라 형태의 식을 얻는다.

$$\left[\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega_0 \hat{\Phi}_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\} \hat{\Phi}_i \right] p_i \omega_0^{-2} = 0 \quad (49)$$

따라서 1차-2차 구조시스템의 고유진동수 식은 다음과 같다.

$$\omega = \omega_i \sqrt{1 - \mu_i} \quad (50)$$

$$\mu_i = i\omega_0^{-1} \hat{\Phi}_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\} \hat{\Phi}_i \quad (51)$$

무명수 값인 μ_i 은 지지점에 대한 2차 구조시스템의 임피던스에 관한 변수로 1차-2차 구조시스템의 고유진동수에 영향을 미친다. $\mu_i = 0$ 경우 2차 구조시스템은 없는 것으로 간주되며 1차-2차 구조시스템의 고유진동수는 자유지지된 1차 구조시스템의 고유진동수와 같다. 플러스값의 μ_i 은 질량의 효과를 나타내는 것으로 시스템의 고유진동수를 감소시키는 역할을 한다.

γ_i 과 마찬가지로 μ_i 도 1차, 2차 구조시스템의 질량비에 비례하는 것으로 질량비가 적을수록 μ_i 은 제로에 접근하며 2차 구조시스템이 없는 1차 구조시스템만의 거동을 나타낸다. 따라서 2차 구조시스템 질량변수(second structural system mass parameter)란 이름이 μ_i 에 적용된다.

모드형상 f 는 식 (50)의 고유진동수를 식 (46)에 대입하고 ρ_i 를 1로 놓으면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$f = \hat{\Phi}_i \quad (52)$$

이러한 1차-2차 구조시스템의 모드형상은 1차 구조시스템의 i 번째 모드형상과 같다는 것을 의미한다.

6. 예 제

그림 2에 있는 1차-2차 구조시스템은 오일러 보(Euler beam)로써 2차 구조시스템인 2개의 작은 보가 1차 구조시스템의 1/3되는 지점에 각각 연결되어 있다. 모든 보는 동일한 탄성계수 E 를 지니며 관성모멘트와 길이당 질량을 1차 구조시스템인 경우에는 I 와 m , 2차 구조시스템인 경우에는 I_s 와 m_s 로 한다. 편의상 무명수 값의 변수를 정의하면 다음과 같다.

$$\lambda \equiv \frac{m_s}{m} \text{ 와 } \tau\lambda \equiv \frac{EI_s}{EI} \quad (53)$$

여기서 λ 는 질량비를 나타내며 $\tau\lambda$ 는 강성비를 나타낸다. 축방향 변위는 무시하며 감쇠영향은 고려하지 않는다. $l\kappa$ 는 2차 구조시스템 κ 의 길이를 나타내며 1

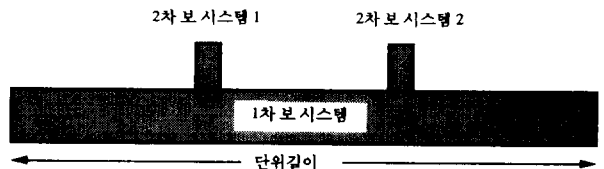


그림 2 1차-2차 보시스템

차 구조시스템의 길이를 표준화시킨 것이다.

One-mode window로써 모드 $\{k_j\}$ 와 $\{i\}$ 의 예가 고려되었으며 3가지 질량비 $\lambda=0.05, 0.15$ 와 0.5 와 변수 $\tau=0.25$ 를 사용하였다. 이렇게 함으로써 1차 구조시스템과 2차 구조시스템의 커플링을 변화시켰다. 각 예제마다 δ 에 대응되는 1차-2차 구조시스템의 고유진동수와 모드형상을 frequency window method와 정확해에 의해 구하였다. 정확해는 특성식 (21)을 이용, 충분한 모드를 고려하여 수렴치를 구하였으며 frequency window method에 의한 결과는 이 논문에서 유도된 간단한 식에 의해 구하였다. 모드형상 f 은 $|f_i|=1$ 이 되도록 조정하였다.

첫번째 예제인 모드 $\{k_j\}$ 의 경우 2차 구조시스템의 길이는 $l_1=0.092$ 와 $l_2=0.083$ 이며 2차 구조시스템 1의 첫째 모드($k_j=1,1$)에 대응되는 1차-2차 구조시스템의 진동특성을 구하였다. Frequency window method에 의한 고유진동수비($\omega_0=\omega_{11}$ 로 표준화시킴)와 모드형상 f 는 식 (42), (44)와 (45)를 이용하였다. 해석결과는 표 1과 그림 3에 비교되었다.

Frequency window method에 의한 결과는 여러 진동특성을 보여준다. 첫째로 질량비가 적어질 수록 고유진동수비는 1에 접근한다. 즉 1차-2차 구조시스템의 고유진동수가 지지점이 고정된 2차 구조시스템의 고유진동수에 접근을 하는 것이다. 이러한 사실은 식 (42)의 γ_1 에서 잘 나타나 있다. 둘째로 식 (44)와 (45)에서 알 수 있듯이 모드형상 f 는 2차 구조시스템의 질량에 거의 무관하며 2차 구조시스템 1의 지지점에 반력 M_{1j} 을 받는 자유지지의 1차 구조시스템의 진동형태에 비례한다.

두번째 예제인 모드 $\{i\}$ 의 경우 2차 구조시스템의 길이는 $l_1=l_2=0.083$ 이며 1차 구조시스템의 네번째 모드($i=4$)에 대응되는 1차-2차 구조시스템의 진동특성

표 1 정확해와 frequency window method에 의한 모드 $\{k_j\}$ 의 고유진동수비와 모드 형상

	$\lambda=0.05$		$\lambda=0.15$		$\lambda=0.5$	
	Exact	F.W.M.	Exact	F.W.M.	Exact	F.W.M.
Freq.ratio	0.998	0.998	0.995	0.994	0.982	0.979
Mode						
x1	0.20	0.19	0.20	0.19	0.22	0.19
y1	0.28	0.24	0.26	0.24	0.20	0.24
r1	0.06	0.05	0.03	0.05	-0.03	0.05
x2	0.20	0.19	0.20	0.19	0.22	0.19
y2	-0.65	-0.63	-0.63	-0.63	-0.60	-0.63
r2	-0.65	-0.68	-0.67	-0.68	-0.71	-0.68

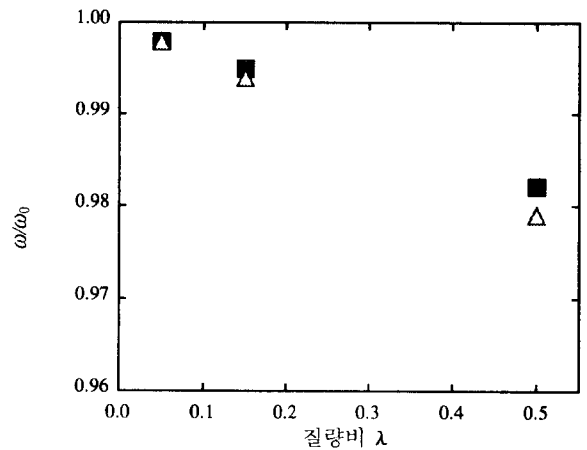


그림 3 정확해(■)와 frequency window method (△)에 의한 모드 $\{k_j\}$ 의 질량비에 따른 시스템의 고유진동수 비

이 구해졌다. Frequency window method에 의한 고유진동수비($\omega_0=\omega_i$ 로 표준화시킴)와 모드형상 f 는 식 (50)와 (52)를 이용하였다. 해석결과는 표 2와 그림 4에 나타나 있다.

해석결과는 첫째 예제와 마찬가지로 여러 진동특성을 보여주는 데 2차 구조시스템의 질량이 적어질 수록 고유진동수비는 1에 접근한다. 즉 1차-2차 구조시스템의 고유진동수가 자유지지의 1차 구조시스템의 고유진동수에 접근을 하는 것이다. 이러한 사실은 식 (50)에 나타나 있다. 또한 식 (52)에서 알 수 있듯이 모드형상 f 는 2차 구조시스템의 질량에 거의 무관하며 자유지지의 1차 구조시스템의 형태로 결정된다.

7. 결 론

Lagrange방정식을 이용하며 모빌리티와 임피던스

표 2 정확해와 frequency window method에 의한 모드 $\{i\}$ 의 고유진동수비와 모드 형상

	$\lambda=0.05$		$\lambda=0.15$		$\lambda=0.5$	
	Exact	F.W.M.	Exact	F.W.M.	Exact	F.W.M.
Freq.ratio	0.997	0.997	0.990	0.990	0.970	0.968
Mode						
x1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y1	0.19	0.19	0.18	0.19	0.18	0.19
r1	-0.70	-0.68	-0.66	-0.68	-0.69	-0.68
x2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
y2	0.19	0.19	0.18	0.19	0.18	0.19
r2	0.66	0.68	0.70	0.68	0.68	0.68

참고문헌

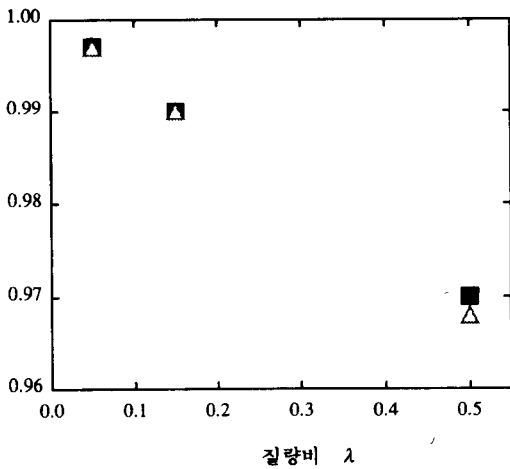


그림 4 정확해(■)와 frequency window method (▲)에 의한 모드(i)의 질량비에 따른 시스템의 고유진동수비

형태로 이루어진 1차-2차 구조시스템의 특성식을 유도하였으며 새로운 방법인 frequency window method에 의해 특성식의 모빌리티와 임피던스를 모드의 상관성에 따라 지배항과 비지배항 그룹으로 분류하여 정확성을 유지한 채 해석의 간편화를 이루었다. 본 논문에서는 하나의 모드만이 지배항에 속하는 one-mode window만을 고려하였는데 특성식의 주요 행렬의 랭크가 1이라는 사실을 이용하여 특성식을 하나의 변수만을 가진 스칼라 형태의 식으로 변환시켰다. 더군다나 변환된 식은 1차와 2차 구조시스템의 질량비와 강성비 변수를 포함하고 있어 진동특성을 용이하게 할 수 있다. Frequency window method는 두 개 또는 그 이상의 모드가 지배항그룹에 속하는 multi-mode window에 적용될 수 있으며 건물의 진동 제어에 사용되는 tuned mass dampers와 원자력 발전소의 구조물과 기기의 상호작용을 고려한 지진해석 등에 응용될 수 있다.

Frequency window method에 의한 결과에서 알수 있듯이 특히 2차 구조시스템의 질량이 상대적으로 1차 구조시스템 보다 적을 때에는 해석결과가 매우 정확하며 무한 개의 모드를 지니는 분포질량된 3개의 보의 진동해석을 위해 하나의 변수만을 가지는 간단한 식만을 이용한다는 것은 주목할 만하다.

1. Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F., 1964, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Englewood Cliff.
2. Lyon, R. H., Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications, IT Press, Cambridge.
3. Zienkiewicz, O. C., 1977, The Finite Element Method, London, McGraw-Hill.
4. Sackman, J. L., and Kelly, J. M., 1979, "Seismic Analysis of Internal Equipment and Components in Structures" Engineering Structures, Vol. 1, pp.179-190.
5. Sackman, J. L., Der Kiureghian, A., and Nour-Omid, B., 1983, "Dynamic Analysis of Light Equipment in Structures: Modal Properties of the Combined System" ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No. 1, pp. 73-89.
6. Der Kiureghian, A., Sackman, J. L., and Nour-Omid, B., 1983, "Dynamic Analysis of Light Equipment in Structures: Response to Stochastic Input", ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No. 1, pp. 90~110.
7. Igusa, T. and Der Kiureghian, A., 1985, "Dynamic Characterization of Two-Degree-of-Freedom Equipment-Structure Systems", ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 1, pp.1~19.
8. Nour-Omid, B., Sackman, J. L., and Der Kiureghian, A., 1983, "Modal Characterization of Equipment-Continuous Structure Systems" Journal of Sound and Vibration, Vol. 88, pp. 459~472.
9. Zhou, Y. and Sackman, J. M., 1989, "Modal Properties and Equipment Response in the Case of a Continuous Structure", Journal of Sound and Vibration, Vol. 128, pp. 25~38.