

有限要素法을 이용한 海水流動 解析 (I)

Analysis of Tidal Flow Using the Frequency Domain Finite Element Method (I)

權 純 國* · 高 德 九* · 趙 國 光** · 金 俊 賢***
Kwun, Soon Kuk · Koh, Deuk Koo · Cho, Kuk Kwang · Kim, Joon Hyun

Summary

A numerical simulation of a 2-dimensional tidal flow in a shallow sea was performed using the frequency domain finite element method. In this study, to overcome the inherent problems of a time domain model which requires high eddy viscosity and small time steps to insure numerical stability, the harmonic function incorporated with the linearized function of governing equations was applied.

Calculations were carried out using the developed tidal model(TIDE) in a rectangular channel of 10m(depth)×4km(width)×25km(length) under the condition of tidal waves entering the channel closed at one end for both with and without bottom friction damping.

The predicted velocities and water levels at different points of the channel were in close agreement with less than 1% error between the numerical and analytical solutions. The results showed that the characteristics of the tidal flow were greatly affected by the magnitude of tidal elevation forcing, and not by on surface friction, wind, or the linear bottom friction when the value was less than 0.01. For the optimum size of grid to obtain a consistent solution, the ratio between the length of the maximum grid and the tidal wave length should be less than 0.0018.

It was concluded that the finite element tidal model(TIDE) developed in this study could handle the numerical simulation of tidal flows for more complex geometrical conditions.

* 서울대학교 農科大學
** 水原專門大學
*** 江原대학교 工科大學

키워드 : 해수유동모형, 유한요소모형, 조
화합수모형, 조류의 수리현상예측, 천수방
정식, TIDE모형

I. 緒 論

간척사업의 방조제와 같은 대규모 해안구조물을 계획함에 있어 축조시의 潮流水理조건뿐만 아니라, 축조후의 각종 환경변화 등을 예측하기 위해서는 海水流動에 대한 신뢰성있는 해석이 필수적이다. 이러한 자연환경을 예측하는데 필요한 도구의 하나인 모형을 크게 나누면 數値模型과 物理模型이 있다.

물리모형에 의한 해석기법은 실제 자연의 조건과 현상을 축소하여 만든 實物模型에서 자연환경을 관측하여 그 결과를 현장으로 확대, 분석하는 기법으로서 일반적으로 원형과 모형 사이에 존재하는 여러가지 상사율에 따른 시간과 공간의 오차를 가지게 마련이다. 더우기 대부분의 물리모형은 제작과 실험결과 취득에 많은 시간과 비용이 소요되는 단점이 있다. 이에 비해 수치모형기법은 자연현상의 물리적 특성에 입각하여 도출된 지배방정식을 수학적으로 해석하여 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있는 기법으로서 지금까지 여러 자연과학 및 공학분야에 적용되어 그 실용성이 입증되어 왔으며 여러분야에서 이에 대한 활발한 연구가 진행중에 있다.

海水流動에 대한 수치해석방법은 유체의 運動方程式과 連續方程式에 대한 近似解法으로서 特性曲線法, 有限差分法, 有限要素法, 境界要素法 등 여러가지가 있으며 각각은 서로의 장단점이 있으나, 지금까지 우리나라에서 조류의 수리현상을 해석하는데 있어서는 유한차분법의 적용이 주류를 이루어 왔다. 우리나라 연안에 대한 조석연구를 위해 적용되었던 수치모형들과^{6,9,10,11)} 금강하구언에 대해 박⁷⁾과 최¹³⁾ 등이 적용하였던 모형 등 각종 연구와 실무에 적용되었던 대부분이 有限差分模型이었다.

그러나 유한차분법은 대상영역을 분할하는 격자가 반드시 사각형이 되어야 하는 제한성을 가지고 있어 복잡한 형태의 경계를 갖는 경우

해석결과와 신뢰성이 문제가 되어 왔다.

반면 有限要素法은 대상영역을 형태나 크기에 있어서 임의의 분할요소로 구성할 수 있어, 방조제 끝막이 구간과 같은 매우 복잡한 지형 조건에서도 큰 제한이나 왜곡없이 격자망을 구축할 수 있으며, 복잡한 경계조건에 대해서도 적용이 간편하므로, 작금의 세계적인 추세로 볼 때 유한차분법에 비해 보다 효율적이고 안정적인 해석기법으로 인정되고 있다. 그러나 우리나라에서는 아직 실용화가 되지 못한 실정이다.^{8,12)}

한편 외국의 경우를 보면 이미 수년전부터 해수유동의 모형화에 유한요소법을 채택해 왔으며, 보다 최근에는 調和函數를 이용한 모형들이 개발되고 있다. 수치해법을 적용하는데 있어서 요소나 격자의 크기는 時間增分과 밀접한 관계를 가지므로 해의 안정성과 계산소요 시간에 많은 제약을 주지만 調和函數模型이란 조석현상 자체가 주기성을 가지는 점을 감안하여 해수유동의 모형화에 조화함수를 도입함으로써 시간에 대한 의존도를 제거하여 효율적이고도 안정된 해를 구할 수 있는 장점을 가지고 있다.^{1,4)}

본 연구에서는 앞에서 언급한 필요성과 연구배경을 바탕으로 지형조건에 따른 해수유동양상의 변화를 모의발생시킬 수 있는 모형으로서 조화함수에 의한 線型2次元 有限要素數値模型을 개발하고, 엄밀해가 있는 일차원 閉鎖水路에 대해 모형을 적용하여 얻은 數値解와 嚴密解를 비교, 검토함으로써 모형의 이론적 타당성 및 예측능력을 검증하고, 중요 변수에 대한 銳敏度 분석을 실시하여, 모형의 舉動을 살펴보고자 한다.

II. 理論解析

조석류의 유동현상을 규명하기 위한 지배방정식을 세우기 위하여 다음과 같은 가정을 하

였다.

① 지배방정식의 적용대상해역이 연근해의 淺海이므로 난류 혼합에 의한 연직방향의 가속도가 重力加速度에 비해서 무시할 만큼 적은 것으로 가정하였다. 따라서 수심방향의 潮流速 변화는 무시하고, 水深平均의 수평방향 조류속만을 고려한 2次元으로 해석한다.

② 일반적인 潮流流에서는 해수 밀도를 변화시킬 만한 원인이 없으므로 해수밀도는 항상 일정한 것으로 한다.

③ 해면에서의 압력분포는 일정하다.

④ 난류흐름의 渦粘性에 따른 마찰력은 무시한다.

⑤ 수심방향의 압력변화는 정수역학적 분포이다.

이상과 같은 가정이 도입되었을 때 Fig. 1과 같은 조파에 대해 유도된 천수에서의 연속방정식과 운동방정식은 다음과 같다.²⁾

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial((h+\eta)u)}{\partial x} + \frac{\partial((h+\eta)v)}{\partial y} = 0 \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fv \\ - \frac{1}{\rho(h+\eta)} (\tau_x^s - \tau_x^b) = 0 \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu \\ - \frac{1}{\rho(h+\eta)} (\tau_y^s - \tau_y^b) = 0 \end{aligned}$$

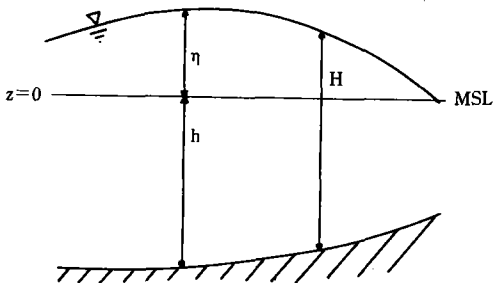


Fig. 1. Schematic diagram of a tidal wave

식(2)의 운동방정식중에서 특히 摩擦項은 非線型要素이므로 이를 선형화하여 지배방정식을 단순화하였으며, 지배방정식을 선형화하기 위하여 다음과 같은 가정을 하였다.

① 淺水方程式의 특성상 각 변수에 대한 非線型性은 차지하는 비중이 적어 무시할 수 있다.

② 조류흐름의 진폭은 수심이나 조석파장에 비하여 아주 작으므로 무시할 수 있다. (본 연구에서는 $a/h \ll 1$, $h/L \ll 1$)

③ 線型化된 지배방정식을 모든 분조에 대해 각각 별도 적용하더라도 單純合成으로 실제 조석을 재현할 수 있다.

본 연구에서는 비선형요소인 운동방정식의 마찰응력항을 선형화하기 위해서 Dronkers가 제시한 수심에 대한 평균값으로서 線型 바닥 摩擦應力을 나타내는 경험식을 사용하였다.²⁾

$$\frac{\tau_x^{b,lin}}{\rho} = C_f \cdot \sqrt{u^2+v^2} \cdot u = \lambda u \dots (3)$$

$$\frac{\tau_y^{b,lin}}{\rho} = C_f \cdot \sqrt{u^2+v^2} \cdot v = \lambda v$$

여기서 λ는 조석류에 대한 선형 바닥마찰계수로서 다음과 같다.³⁾

$$\lambda = C_f \cdot U = U_{max} \cdot \frac{8}{3\pi} \cdot C_f \dots (4)$$

한편, 해수표면의 마찰항은 바람자료로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁵⁾

$$\tau_x^s = \rho_{air} \cdot C_D \cdot U_{10}^2 \cdot \cos\theta_w \dots (5)$$

$$\tau_y^s = \rho_{air} \cdot C_D \cdot U_{10}^2 \cdot \sin\theta_w$$

線型化된 지배방정식은 식(1)의 연속방정식에서 유한진폭항인 $u\eta$, $v\eta$ 의 항을 소거하고, 식(2)의 운동방정식에서는 이류가속항인 uu , uv , vv 의 항을 제거하며, $h+\eta \cong h$ 로 가정한 후 선형화된 마찰항을 대입하여 다음과 같이 얻었다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fv - \frac{1}{\rho h} (\tau_x^s - \tau_x^{b,lin}) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu - \frac{1}{\rho h} (\tau_y^s - \tau_y^{b,lin}) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (7)$$

지배방정식에 대한 경계조건으로는 조위와 유속이 있다. 일반적으로 외해쪽에 해당하는 開放境界에서는 조위조건을, 육지쪽의 하천경계에서는 유속 또는 유량조건을 취한다.

유속은 크기와 방향을 갖는 벡터적 성격의 물리량이므로 x, y 좌표계를 사용하는 수치해석 처리를 위해서는 x, y 방향의 유량성분으로 분리하여 취급하는 것이 바람직하며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_n = a_{nx} Q_x + a_{ny} Q_y \quad \dots\dots\dots(8)$$

한편 반올림오차를 줄여 계산의 정확성을 높이기 위한 방법으로서 조위를 전체대상지역의 대표값인 기준조위 η_0 와, η_0 에 대한 각 지점의 실제조위의 차이인 局部潮位 η_1 으로 분리하여 취급하였던 바 다음과 같다.

$$\eta(x, y, t) = \eta_0(t) + \eta_1(x, y, t) \quad \dots\dots\dots(9)$$

선형화된 지배방정식에 경계조건을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots(10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - fv - \frac{1}{\rho h} (\tau_x^s - \tau_x^{b,lin}) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + fu - \frac{1}{\rho h} (\tau_y^s - \tau_y^{b,lin}) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(11)$$

따라서 지배방정식의 해석을 위해 필요한 경계조건은 특정지점, 특정시간의 조위인 $\eta_1^*(x, y, t)$ 과 유량 $Q_n^*(x, y, t)$ 가 된다.

해수유동현상을 지배하는 모든 변수가 일정한 週期성을 띄고 진동하는 성질을 가진다고 가정하면 식(10), (11)의 지배방정식에서 조위와 조류속 및 각종 마찰항은 다음과 같은 調和函數로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \hat{u}(x, y) \cdot e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= \hat{v}(x, y) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\begin{aligned} \eta_0(x, y, t) &= \hat{\eta}_0(x, y) \cdot e^{i\omega t} \\ \eta_1(x, y, t) &= \hat{\eta}_1(x, y) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\tau_x^s = \hat{\tau}_x^s \cdot e^{i\omega t}, \quad \tau_y^s = \hat{\tau}_y^s \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{\tau_x^{b,lin}}{\rho} = \lambda \hat{u} \cdot e^{i\omega t}, \quad \frac{\tau_y^{b,lin}}{\rho} = \lambda \hat{v} \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots(15)$$

선형화된 지배방정식에 식(12)~(15)의 조화함수를 대입하면 조화함수로 나타내지는 지배방정식이 유도된다. 즉,

$$i\omega \hat{\eta}_0 + i\omega \hat{\eta}_1 + \frac{\partial(\hat{u}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v}h)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$i\omega \hat{u} + g \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial x} - f\hat{v} - \frac{1}{h} \left(\frac{\tau_x^s}{\rho} - \lambda \hat{u} \right) = 0 \quad \dots\dots(17)$$

$$i\omega \hat{v} + g \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial y} + f\hat{u} - \frac{1}{h} \left(\frac{\tau_y^s}{\rho} - \lambda \hat{v} \right) = 0$$

調和函數에 의한 지배방정식은 식(10), (11)과 비교할 때 시간에 대해 독립적이 되므로 복잡한 지형에 대한 해수유동 해석도중 자주 발생하는 時間增分에 의한 해의 안정성 저해 문제를 해결할 수 있다.

III. 數值解法

1. 加重殘差形의 誘導

유한요소법은 공간과 시간領域을 要素領域으로 구성한 다음 수치해에 의해 발생하는 잔차, 혹은 오차를 각 요소영역에 대하여 모두 합한 후 總加重誤差를 최소화하는 과정을 통해 각 절점에 대한 해를 구하는 방법이라 할 수 있다. 이를 위해서는 지배방정식에 대한 加重殘差形의 유도가 선행되어야 한다.

가. 연속방정식

가중잔차형의 유도를 위해 Galerkin의 방법을

적용하였다. 가중함수인 $\delta\hat{\eta}_1$ 을 연속방정식에 곱한 후 문제영역 R에 대해 적분하고, 유량 경계조건 \hat{Q}_n^* 의 오차에 대해서도 가중함수를 곱하고 경계영역 B에 대해 적분하여 더해 주면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\iint \{i\omega\hat{\eta}_0 + i\omega\hat{\eta}_1 + \frac{\partial(\hat{u}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v}h)}{\partial x}\} \delta\hat{\eta}_1 dR + \int \{-\hat{Q}_n + \hat{Q}_n^*\} \delta\hat{\eta}_1 dB = 0 \dots\dots\dots(18)$$

식(18)를 부분적분한 다음 Green의 정리를 적용하여 유량의 미분항을 제거하면 연속방정식의 가중잔차형은 다음과 같다.

$$\iint \{i\omega\hat{\eta}_0\delta\eta_1 + i\omega\hat{\eta}_1\delta\eta_1 - \frac{\partial(\hat{u}h)}{\partial x}\delta\hat{\eta}_1 - \frac{\partial(\hat{v}h)}{\partial x}\delta\hat{\eta}_1\} dR + \int \hat{Q}_n^* \times \delta\hat{\eta}_1 dB = 0 \dots\dots(19)$$

나. 운동방정식

연속방정식과 운동방정식의 균형을 맞추어 주고 최종 전체행렬을 대칭화하기 위해 운동방정식에 평균해면수위 h를 곱해준 다음, 가중함수인 유속의 편차 δu , δv 를 각각 곱하고 문제영역에 대해 적분하면 다음과 같은 운동방정식의 가중잔차형을 유도할 수 있다.

$$\iint \{i\omega h\hat{u} + g\frac{\partial(h\hat{\eta}_1)}{\partial x} + fh\hat{v} - (\frac{\hat{c}_x^s}{\rho} - \lambda\hat{u})\} \delta\hat{u} dR = 0$$

$$\iint \{i\omega h\hat{v} + g\frac{\partial(h\hat{\eta}_1)}{\partial y} + fh\hat{u} - (\frac{\hat{c}_y^s}{\rho} - \lambda\hat{v})\} \delta\hat{v} dR = 0 \dots\dots\dots(20)$$

2. 離散化

일반적으로 computer를 이용한 수치해법에 있어서는 수학적인 이론해와는 달리 공간적, 시간적인 전영역을 연속적으로 취급할 수 없으므로, 오직 離散化된 점에서의 변화에 대해서만 계산이 가능하게 된다.

따라서 식(19), (20)과 같은 적분방정식을 유한요소법으로 풀기 위해서는 전체영역을 요

소영역으로 분할하고 각 요소의 변수들을 다항식으로 표현하는 이산화의 과정을 거쳐야 한다.

본 연구에서는 삼각형의 요소를 선택하였는데, 각 요소에 대한 방정식의 모든 변수는 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$\eta = \sum_{i=1}^3 N_i \eta_i, V = \sum_{i=1}^3 N_i V_i, h = \sum_{i=1}^3 N_i h_i \dots\dots\dots(21)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 N_i \lambda_i, \delta\eta = \sum_{i=1}^3 N_i \delta\eta_i, \delta V = \sum_{i=1}^3 N_i \delta V_i$$

3. 行列式的 構成 및 解法

식(21)의 離散化된 變數들을 식(19)의 加重殘差形 連續方程式에 대입하여 정리하면 다음과 같은 전체영역에 대한 行列式을 구성할 수 있다.

$$i\omega[M_\eta]\{\hat{\eta}_1\} - [D]\{\hat{V}\} = \{\hat{P}_\eta\} - \{\hat{P}_Q\}^{lin} \dots\dots(22)$$

식(20)의 운동방정식에 대해서도 같은 방법으로 다음과 같은 행렬식을 구성할 수 있다.

$$\{i\omega[M_V] + [M_F] + [M_C]\}\{\hat{V}\} + g[D]^T\{\hat{\eta}_1\} = \{\hat{P}_W\} \dots\dots\dots(23)$$

운동방정식을 연속방정식에 대입하기 위하여 식(23)의 조류속 벡터에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\{\hat{V}\} = [M_T]^{-1}\{\{\hat{P}_W\} - g[D]^T\{\hat{\eta}_1\}\} \dots\dots\dots(24)$$

식(24)에서 $[M_T] = i\omega[M_V] + [M_F] + [M_C]$ 로서 질량집중에 의해 삼대각행렬이 되므로 쉽게 逆行列을 구할 수 있다. 최종적으로 식(24)를 식(22)의 연속방정식에 대입하여 다음과 같은 전체영역에 대한 最終行列式을 유도할 수 있다.

$$\{i\omega[M_\eta] + g[D][M_T]^{-1}[D]^T\}\{\hat{\eta}_1\} = \{\hat{P}_\eta\} - \{\hat{P}_Q\}^{lin} + [D][M_T]^{-1}\{\hat{P}_W\} \dots\dots\dots(25)$$

식(25)의 최종행렬식은 Gauss 소거법에 의해 국부적인 조위에 대해 풀 수 있으며, 그 결과를 식(24)에 대입하면 조류속이 계산된다.

4. 전산프로그램의 開發

조석의 수리현상이론과 수치해석기법을 실제 해역의 조건에 맞추어 계산할 수 있도록 하기 위하여 프로그램 code화 하고 TIDE조석모형이라 명명하였다.

TIDE모형은 실제 조석을 취급하는 것이 아니라 일정한 주기를 갖는 각 분조에 대해 별도로 적용되어야 하므로, 예측을 원하는 특정시간의 조위와 조류속을 파악하기 위해서는 모형에 의한 각 분조별 계산결과를 합성하기 위한 후처리과정을 필요로 한다.

전자계산기는 UNIX 운영체계를 사용하는 MIPS RS-2030 워크스테이션을 사용하였다. 처리속도는 절점의 수와 절점간의 번호차, 즉 구성되는 행렬의 띠폭에 따라 가변적이다. 대체적으로 보아 각 분조에 대해 띠폭이 36개 이하인 경우는 5초 미만, 39개의 띠폭인 경우에는 4분 이내, 44개의 띠폭에 대해서는 60~90분, 49개의 띠폭에 대해서는 120~140분이 소요되었으며, 최종 결과를 얻는데 소요되는 시간은 적용하는 분조의 수에 의해서도 달라질 수 있다.

IV. 結果 및 考察

1. 模型의 理論的 妥當性 檢討

조화함수에 의한 선형 2차원 유한요소 수치 모형 TIDE의 지배방정식과 전산프로그램의 검증을 위해, 嚴密解를 구할 수 있는 조건에 대해 TIDE 모형을 적용하여 구해진 數值解를 嚴密解와 비교검토했었다.

검증대상영역으로는 길이 25km, 폭 4km, 수심 10m인 직사각형, 고정수심의 한쪽단면이 폐쇄된 1차원 수로를 설정하였으며, 주기 T가 12.4시간이고 진폭이 a인 조석파가 수로에 유입되는 경우를 가정하였다. 경계조건은 개방단면에서의 진폭이 1m가 되는 것으로 하였으며,

바닥마찰조건이 $\lambda=0.0$, $\lambda=0.001$, $\lambda=0.01m/sec$ 인 경우를 설정하고, 각각의 경우에 대해 검증을 실시하였다. TIDE모형의 적용을 위해 대상영역을 분할하여 Fig. 2와 같이 격자망을 작성하였다.

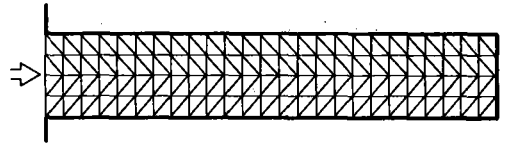


Fig. 2. Finite Element Grid Discretization for the channel test of closed ended

조석파가 수로에 유입되면 Fig. 3에서와 같이, $x=0$ 인 폐쇄단면에서는 방향만 반대이고 진폭과 주기가 같은 완전반사파가 생성되어 두 파가 합성되므로서 최대진폭은 $2a$ 가 되고 영역 내에서의 파의 형태는 Fig. 3과 같게 된다. 따라서 시간과 공간에 따른 조위는 다음식으로부터 계산될 수 있다.³⁾

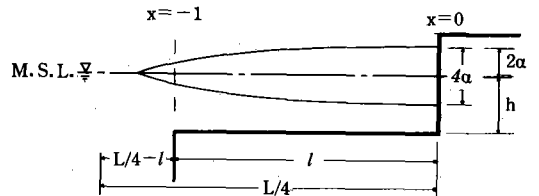


Fig. 3. Wave entering the channel of finite length with reflecting end

$$\eta = \eta_{in} + \eta_{out} = a [e^{-\mu x} \cos(\omega t - kx) + e^{\mu x} a \cos(\omega t + kx)] \dots \dots \dots (26)$$

한편 유속의 엄밀해를 계산하기 위한 식은 다음과 같다.

$$u = \frac{\eta^*}{h} C_0 \frac{k_0}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} \frac{[e^{-\mu x} \cos(\omega t - kx + \alpha) + e^{\mu x} a \cos(\omega t + kx + \alpha)]}{\sqrt{2(\cos 2kl + \cosh 2\mu l)}} \quad (27)$$

식(26), (27)에 의해 구한 엄밀해를 TIDE모형에 의한 수치해와 비교한 결과는 Table-1과 같다.

Table-1에서 λ 가 0 또는 0.001인 경우와 같이 마찰이 없거나 적은 경우 수치해는 엄밀해보다 조위에 있어서 평균 0.00003m정도 크게 나타났으며, λ 가 0.01로써 마찰이 큰 경우에는 수치해의 조위가 오히려 적게 나타났다. 그리고 유속에 있어서는 어느 경우에서나 수치해가 0.002m/sec 정도 크게 나타났다. 그러나 이러한 오차는 실제 조위나 조류속의 크기에 비해 1%도 되지 않을 뿐 아니라 계산과정의 반올림 오차등을 감안한다면 별로 문제가 되지 않으며, 좀더 세밀한 格子網을 작성한다면 보다 오차를 줄일 수도 있을 것이므로 본 모형의 지배방정식 유도와 수치해법의 선정과정은 모두 적절했던 것으로 사료된다.

따라서 개발된 모형을 보다 복잡한 실제 문제에 적용하더라도 매우 신뢰성있는 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

2. 銳敏度 分析

수치모형의 거동과 특성을 파악하고자 모형의 검증에 사용하였던 길이 25km, 폭 4km, 수심 10m의 閉鎖水路領域에 대해 $\lambda=0.01$, 풍속 10 m/sec, 경계조위 1m의 조건을 기준으로 물리적 자료 및 수치해석상 자료의 변화가 수치해에 미치는 영향을 고찰하고자 예민도 분석을 실시하였다.

수리현상에 영향을 미치는 물리적 원인으로는 수심과 바닥마찰, 바람에 의한 해면마찰, 경계조건, 그리고 片向力 등을 들 수 있는데, 각 항목의 개별적인 변화에 따른 모형의 거동을 알아봄으로써 그 중요성을 파악할 수 있었다. 이를 위해서 조위는 수로내 1km 간격의 각 구간별 진폭에 대해 비교하였으며, 유속은 수로 중심선상, 개방단면으로부터 3km 되는 지점의 시간별 유속에 대하여 비교하였다. 수치해석상 격자의 크기에 의해 발생하는 오차의 문제를 파악하기 위하여 여러 크기의 격자에 대해서도

Table-1. Comparison of analytical and numerical elevations and velocities for test domain at different location

λ	x (m)	Elevations(m)		Velocities(m/sec)	
		Analytical	Numerical	Analytical	Numerical
0.0	0	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	0.3675(1.5708)	0.3685(1.5708)
	6000	1.0280(0.0000)	1.0280(0.0000)	0.2818(1.5708)	0.2841(1.5708)
	13000	1.0511(0.0000)	1.0512(0.0000)	0.1793(1.5708)	0.1818(1.5708)
	19000	1.0627(0.0000)	1.0628(0.0000)	0.0900(1.5708)	0.0926(1.5708)
	25000	1.0666(0.0000)	1.0666(0.0000)	0.0000(1.5708)	0.0010(1.5708)
0.001	0	1.0000(0.000)	1.0000(-0.000)	0.3672(1.5391)	0.3685(1.5391)
	6000	1.0274(-0.020)	1.0275(-0.020)	0.2816(1.5326)	0.2839(1.5327)
	13000	1.0504(-0.036)	1.0505(-0.036)	0.1792(1.5274)	0.1817(1.5275)
	19000	1.0620(-0.044)	1.0620(-0.044)	0.0899(1.5249)	0.0925(1.5249)
	25000	1.0658(-0.047)	1.0658(-0.047)	0.0000 -	0.0010(1.5259)
0.01	0	1.0000(0.000)	1.0000(-0.000)	0.3444(1.2703)	0.3453(1.2702)
	6000	0.9815(-0.189)	0.9814(-0.189)	0.2633(1.2065)	0.2654(1.2073)
	13000	0.9842(-0.347)	0.9840(-0.347)	0.1673(1.1543)	0.1696(1.1548)
	19000	0.9917(-0.425)	0.9915(-0.425)	0.0839(1.1849)	0.0864(1.1284)
	25000	0.9951(-0.451)	0.9948(-0.451)	0.0000 -	0.0010(1.1389)

() : Phase in rad

에민도 분석을 실시하였다. 片向力은 국지적 변화를 무시할 수 있는 변수이므로 토의대상에서 제외하였다.

가. 수심의 영향

연속방정식에서 알 수 있듯이 수심이 증가할수록 조위에 의한 영향은 감소하고, 따라서 유속의 변화도 감소할 것으로 예상되었다. 기준수심 10m를 기준으로 2배 및 5배를 증감시켜 2, 5, 10, 20, 50m로 변화시키면서 조위와 유속에 대한 수치해를 구하여 비교한 결과는 Fig. 4와 같이 수심이 얕을수록 조위와 유속이 크게 나타나고, 특히 유속의 변화가 민감한 것으로 나타났다.

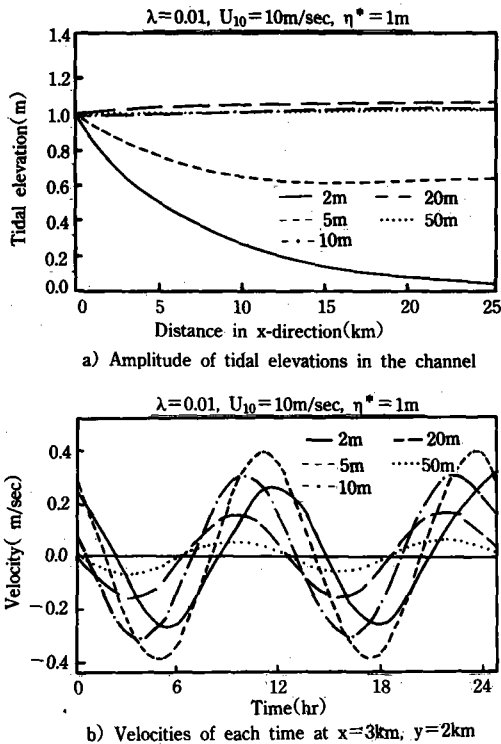


Fig. 4. Change of tidal elevation and velocity in the various depths

나. 바닥마찰의 영향

운동방정식에서 볼 때, 유속의 변화는 조위의 크기와 바닥마찰, 해면마찰, 편향력에 의해 영

향을 받는 것으로 나타나 있다.

선형 바닥마찰계수 λ 를 0.01을 기준으로 0, 0.001, 0.005로 감소시킨 경우와 0.05, 0.1로 증가시킨 경우에 대해 TIDE모형을 적용하여 모의실험한 결과는 Fig. 5와 같으며, λ 가 0.01인 경우 까지는 조위와 유속에 대하여 바닥마찰이 큰 영향을 주지않는 것으로 나타났다.

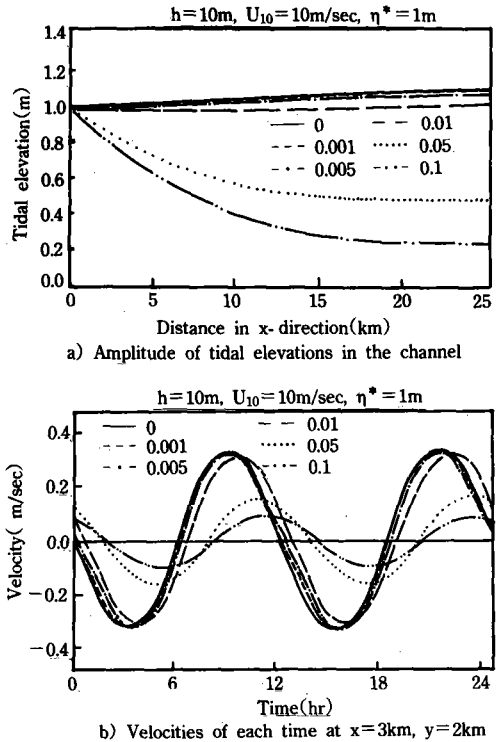


Fig. 5. Change of tidal elevation and velocity according to the different linear friction coefficients

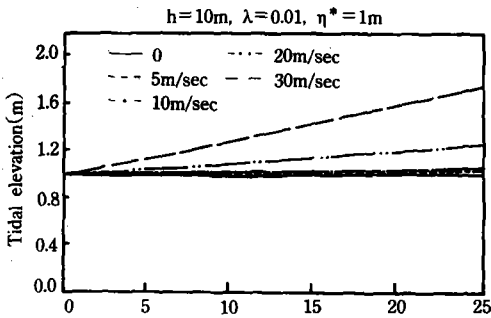
다. 바람에 의한 영향

바람에 의한 마찰력은 식(5)에서 보는 바와 같이 10m 고도에서의 풍속과 풍향, 바람에 의한 항력係數 등에 의해 결정된다. 특히 바람에 의한 항력계수의 평가가 전체마찰에 의한 영향을 계산하는데 있어서 매우 중요한 것을 알 수 있다. 본 수치모의실험에서는 바람에 의한 항력係數를 계산하는데 있어서 Wu 등에 의해 개발된 다음

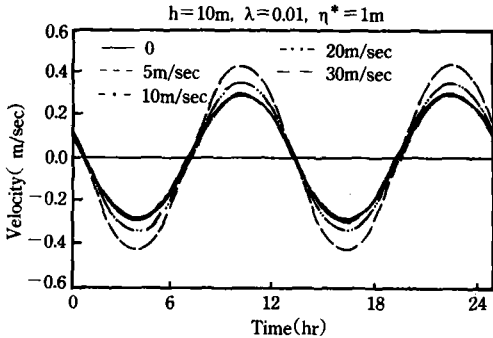
식을 사용하였다.⁵⁾

$$C_D = (0.75 + 0.067 \times U_{10}) \times 10^{-3} \dots\dots(28)$$

Fig. 6의 수치실험결과가 보여주는 바와같이 풍속 U_{10} 이 10m/sec을 기준으로 0, 5m/sec로 감소한 경우와 20, 30m/sec로 증가된 경우에 대하여 모두 조위와 유속이 크게 영향을 받지 않음을 알 수 있었다. 단 풍속이 30m/sec인 경우와 같이 극단적인 경우에만 약간의 조위 및 유속증가를 관찰할 수 있었다.



a) Amplitude of tidal elevations in the channel



b) Velocities of each time at $x=3\text{km}, y=2\text{km}$

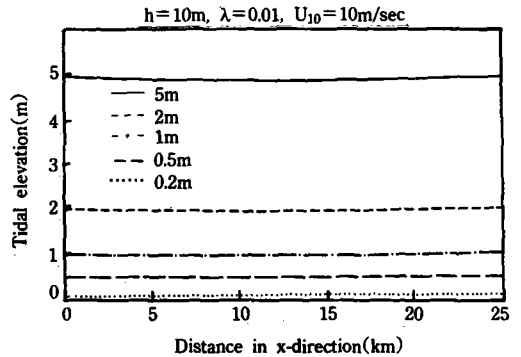
Fig. 6. Change of tidal elevation and velocity in the different wind speeds

라. 경계조건에 의한 영향

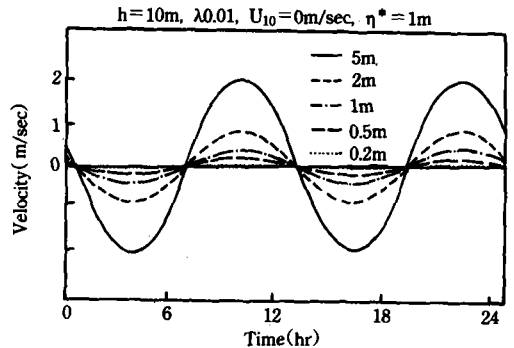
TIDE모형의 경계조건은 경계구간에서의 조위 振幅과 位相差이지만 위상차가 조위나 유속의 크기에 영향을 미치지 못하는 못하므로, 振幅值만을 1m를 기준으로 2, 5배씩 증감시켜 0.2,

0.5, 1, 2, 5m인 경우에 모의실험을 실시하였으며 Fig. 7과 같은 결과를 얻었다.

조위는 거의 1:1의 대응으로 변화하고, 유속 또한 $a\sqrt{gh}/h$ 에 비례해서 변하는 것을 알 수 있었다. 따라서 본 모형을 현장에 적용할 때 開放境界領域의 위치선정 및 境界潮位의 결정이 수치모형의 결과에 아주 큰 영향을 미친다고 할 수 있겠다.



a) Amplitude of tidal elevations in the channel



b) Velocities of each time at $x=3\text{km}, y=2\text{km}$

Fig. 7. Change of tidal elevation and velocity in the different boundary conditions

마. 격자의 크기에 의한 영향

格子의 크기나 수는 요구되는 정밀도에 따라 달라질 수 있으나 일반적으로 다음의 원칙에 따라야 한다.

$$\frac{\Delta l}{L} \ll \frac{1}{4} \dots\dots(29)$$

본 문제에 있어서는 전 수로의 길이를 ΔL 로 하더라도 $\Delta L/L$ 이 0.05로서 위의 조건을 어떠한 형태의 격자라도 만족할 것으로 생각되나, 실제 모의실험시 4, 8, 16, 32, 64, 96, 128, 192, 256개의 격자에 대해 모형을 적용하고 수로의 중간부분(개방단면에서 12.5km)에 대한 수치해를 검토한 결과, Fig. 8에서 보는 바와 같이 64개 이상의 격자로 구성했을 경우만 엄밀해와 근사한 값을 보이고 있다.

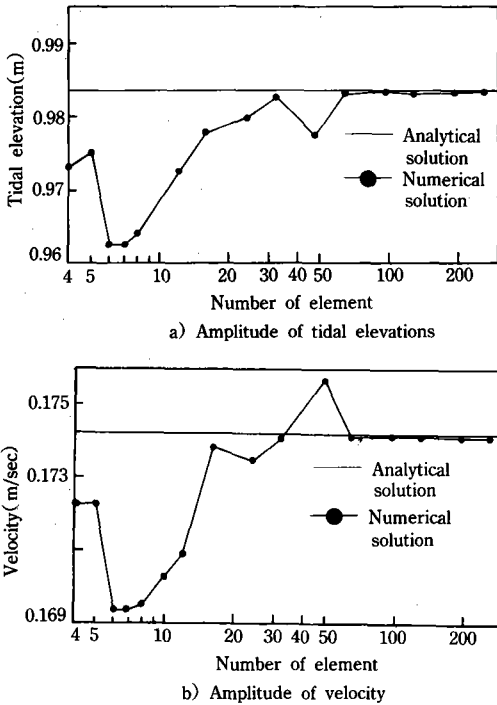


Fig. 8. Comparison between analytical solution and numerical solutions by different number of element at the center of the channel

64개의 격자로 구성했을 때 가장 큰 격자의 길이는 2.54km로서 $\Delta L/L$ 이 0.0018이다. 본 수치실험에서 그 이하의 격자로 구성했을 때 발생한 오차는 경계구역에서 問題領域이 너무 가깝기 때문인 것으로 생각되며, 이 경우 일반적으로 조위나 유속이 급하게 변할 수 있는

조건이 되므로 보다 세밀한 격자구성이 필요할 것이다.

V. 結 論

지형적인 환경조건에 따른 해수유동의 변화를 모의발생할 수 있는 線形 2次元 數值解析模型 TIDE를 개발하고, 모형의 理論的 妥當性 검토의 銳敏度 分析을 실시하였다. 그 과정과 이를 통해 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

1. 모형의 지배방정식으로서 연속방정식과 운동방정식을 유도하였으며, 해의 안정성을 확보하고 경계조건처리가 용이하도록 이들을 線型化하고, 調和函數로 변환하였다.

2. 유한요소해법의 도입을 위하여 Galerkin 방법에 의해 지배방정식의 加重殘差形을 유도하고 離散化를 시켰으며, 그 해법을 정립하여 프로그램 code화하고 이를 潮汐模型 TIDE라 하였다.

3. 모형의 이론적 타당성을 검토하기 위해 길이 25km, 폭 4km, 수심 10m인 직사각형, 고정수심의 한쪽단면이 폐쇄된 수로에 주기 12.4시간의 潮汐波가 유입되었을 때, 개방단면에서의 조위진폭이 1m가 되는 경계조건을 대입하고, 바닥마찰이 없는 경우, 즉, $\lambda=0$ 인 경우와 $\lambda=0.001$ $\lambda=0.01$ 인 경우에 대해 각각 TIDE 모형을 적용하고, 얻어진 數值解를 嚴密解와 비교한 결과 조위나 조류속 모두 실제 크기의 1%미만의 오차를 보였다. 따라서 개발된 TIDE모형을 보다 복잡한 실제 문제에 적용하더라도 매우 신뢰성 있는 결과를 얻을 것으로 기대되었다.

4. 모형의 거동과 특성을 파악하기 위하여 물리적 자료와 격자크기에 대한 銳敏度分析을 실시한 결과 수심이 얕을수록 유속이 다소 민감한 반응을 하였으며, 선형 바닥마찰계수 λ 가 0.01이하인 경우와 해면마찰은 수치해에 미치는 영향이 거의 없었고, 조위 경계조건은 해석결

과에 상당한 영향을 미치는 것으로 나타났다. 한편 조석파의 길이에 대한 격자의 최대길이가 0.0018이하인 경우에서만 해의 신뢰성이 인정

되었으나 지형적 특성이나 요구되는 정밀도에 따라 다소 차이가 있을 것으로 사료되었다.

기호설명

로마자자	$[M_F]$: 편향계수 행렬	V : 유속벡터	η_1 : 국부조위
a : 반조차	$[M_T]$: 질량집중 행렬	t : 시간	$\{\eta_1\}$: 국부조위 벡터
B : 경계영역	$[M_V]$: 조류속에 대한 질량행렬	T : 분조의 주기	θ_w : 바람의 접근각도
C_0 : 파의 전파속도	$[M_n]$: 조위에 대한 질량행렬	x, y, z : 좌표축	λ : 선형 바닥마찰계수
C_D : 바람의 항력계수	N_i : 기저함수	회람문자	μ : 점성계수
C_f : 마찰계수	$\{\hat{P}_Q\}$: 유랑경계 조건에 의한 부하벡터	α : 바닥마찰에 의한 파의 지각	ω : 각속도
[D] : 미분행렬	$\{\hat{P}_W\}$: 바람에 의한 부하벡터	α_n : 경계지점 유랑벡터의 방향여현	상첨자
f : 편향계수	$\{\hat{P}_n\}$: 기준조위 벡터	Δl : 대표요소의 길이	b : 바닥
g : 중력가속도	Q : 유랑벡터	ρ : 해수의 밀도	lin : 선형
h : 평균해면수심	Q_n : 하천경계의 정상류 유랑	ρ_{air} : 공기의 밀도	s : 표면
H : 총수심	R : 문제영역	τ : 마찰응력	T : 전치행렬 표시
i : 허수단위	u : x 방향의 수심평균 유속	η : 조위	\sim : 복소수 표시
k : 파수	U : 조류속	η_{in} : 입사파의 조위	* : 경계조건 표시
k_0 : 마찰이 없는 경우의 파수	U_{max} : 대표 최대조류속	η_{out} : 반사파의 조위	하첨자
l : 수로의 길이	U_{10} : 10m 고도에서의 풍속	η_0 : 기준조위	i : 절점번호
L : 조석파의 길이	v : y 방향의 수심평균 유속		x : x 방향
$[M_C]$: 선형 바닥마찰행렬			y : y 방향

參 考 文 獻

1. Baker, A. J., 1985, Finite Element Computational Fluid Mechanics, McGraw-Hill International Edition.
2. Dronkers, J. J., 1964, Tidal Computation in Rivers and Coastal Waters, North Holland Publ. Co., Amsterdam.
3. Ippen, A. T. (ed), 1966, Estuary and Coast-line Hydrodynamics, McGraw Hill.
4. Westerink, J. J., J. J. Connor, and K. D. Stolzenbach, 1986, Spectral Computations within the Bight of Abaco using a Frequency-time Domain Finite Element Model, Proceedings of the 4th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources, Lisboa, Portugal, pp. 569-578.
5. Wu, J., 1969, Wind Stress and Surface Roughness at Air-Sea Interface, Journal of Geophysical Research, Vol. 74, No. 2.
6. 강용덕, 1989, 새만금 해역의 조석수치모형, 성균관대학교 석사학위논문.
7. 박창언, 1985, 수심평균 2차원 수학적 모형 (TIFS)을 이용한 금강하구 및 연해의 조석 계산, 한국농공학회지 28(1), pp. 60-67.
8. 윤태훈, 1985, 방조제의 최종체질에서의 수리해석, 한양대학교 대학원 석사학위논문.
9. 최병호, 1980, 황해 및 동지나해역의 조석 모델, 해양개발연구소 보고서, 해양연보 80-02.
10. 최병호, 1983, 加露林灣의朝夕모델, 성균관대학교 논문집, 자연계 제33집, pp. 171-183.
11. 최병호, 1984, 우리나라 주요항만의 조위분석, 대한토목학회지 2(1), pp. 17-33.
12. 최성욱, 1989, 유한요소법을 이용한 천수방정식의 수치실험, 대한토목학회 논문집 10(4), pp. 141-150.
13. 최홍식, 1985, 금강하구둑 건설후의 수위변동 추정에 관한 연구, 서울대학교 대학원 석사학위논문.