

任意的境界條件을 갖는 鐵筋 콘크리트 扇形板의 解析 (I)

— 第1報 開角의 影響 —

An Analysis of the Reinforced Concrete Circular Ring Sector Plates with Arbitrary Boundary Conditions (I)

— Part I Effects of open-angle —

曹 鎮 久*
Cho, Jin Goo

Summary

This study was carried out to investigate the engineering characteristics of the R.C circular ring sector plate with various boundary conditions and then to propose a rational and practical method for application of finite element method to R.C structures.

The stiffness matrix of the circular ring sector plate was obtained by using the multi-base coordinate system in which the base-coordinate systems were constructed for each nodal point of the quadrilateral element in order to reflect the complicated boundary conditions conveniently and correctly.

The R.C element stiffness matrix was constructed by adding the stiffness coefficients of the steel-bar element into the plate bending element stiffness matrix.

Herein, the steel-bar element was treated as the common beam element.

Using the above method, the effects of steel-bar can be considered without increasing of the numbers of element and nodal points.

* 全南大學校 農科大學

키워드 : circular ring sector plate, F.E.M., multi-base coordinate system, R.C.plate, R.C. element, open angle effects.

I. 緒 論

近年에 都市交通의 發達 및 高速道路의 建設에 隨伴하여 曲線橋의 利用이 必學的으로 要求된다. 이러한 曲線橋의 上部 構造는 大部分의 경우 任意의 境界條件을 갖는 扇形板으로서 取扱되어질 수 있다. 따라서 이러한 扇形板의 力學의 特性에 影響을 끼칠 수 있는 여러가지 因子들을 알아보고 이들 因子들의 變化에 따른 板의 力學의 特性을 調査하는 것은 매우 有用한 일이다. 一般으로 扇形板의 力學의 特性에 影響을 끼치는 因子로서는 開角(opening angle), 邊長比(直線邊長에 대한 中央圓弧長의 比 및 直線邊長에 對한 曲率半徑의 比) 및 境界條件等을 豫想할 수 있다.

扇形板의 解法으로서는 Fourier 級數에 의한 嚴密解法과 有限要素法, 有限差分法, 選點法으로 代表되는 近似解法이 있지만 扇形板은 境界條件의 複雜性 때문에 쉽게 그의 嚴密解를 구할 수 없으며, 따라서 近似解法이 많이 利用되고 있다. 그러나 實際로 有限差分法이나 有限要素法과 같은 近似的 方法이 採用된다하더라도 扇形板의 多樣한 境界條件을 充實히 考慮하는 데는 많은 어려움이 있다.

本 研究에서는 扇形板 特有의 複雜한 境界條件을 充實하면서도 容易하게 考慮할 수 있도록 하기 위해서 多重基準座標系를 利用한 有限要素解法을 提案하고자 하며 여기서 提案된 方法을 扇形板의 解析에 適用하여 그의 妥當性을 檢討한 후 扇形板의 開角에 따른 力學의 特性을 究明하고자 한다. 邊長比 및 鐵筋比의 影響은 다음에 取扱하게 된다.

1. 基本假定

有限要素法을 使用하여 Fig. 1과 같은 扇形板을 解析함에 있어서 要素의 定式化에는 다음과 같은 假定이 導入되었다.

가. 板의 材料는 彈性 等方性 및 均質이다.

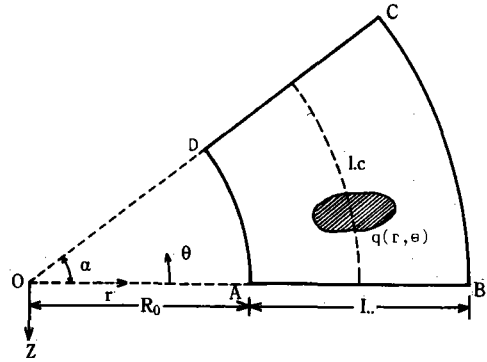


Fig. 1. Circular ring sector plate

나. 板의 垂直變形은 작다

다. 中立面에 垂直한 應力은 크기에 關係없이 無視된다.

라. 變形前에 中立面에 垂直한 平面은 變形後에도 平面을 維持하며 變形後의 中立面에 垂直하다.

2. 有限要素모델

가. 板 要素

扇形板은 Fig. 2와 같은 4邊形要素로서 分割하고 $x-y$ 平面과 一致하는 板의 4邊形要素의 節點을 $i, j, k,$ 및 l 로 하고 Z -軸方向의 變位를 w x -軸에 關한 回轉을 θ_x 및 y -軸에 關한 回轉을 θ_y 라고 하면 各 節點에서의 變位는 이들 3-成分으로 나타낼 수 있다.

이때 例를 들면 節點 i 에서의 節點變位벡터는 式(1)과 같이 나타낼 수 있으며 要素의 全節點에

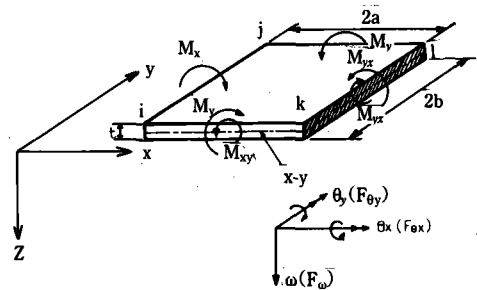


Fig. 2. Rectangular plate-bending element and displacement vector

關係서는 式(2)와 같이 된다.

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -(\frac{\partial w}{\partial y})_i \\ (\frac{\partial w}{\partial x})_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

$$\{\delta_e\}^T = \{\delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_l\} \dots\dots\dots(2)$$

一般으로 板의 問題에서는 變位函數 w는 스칼라로서 節點變位 $\{\delta_e\}$ 의 成分 즉 12個의 파라메타로서 定義된다. 이로부터 板의 垂直처짐은 다음의 多項式으로 나타내는 것이 一般이다.

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \dots\dots\dots(3)$$

式(3)를 式(1) 및 (2)에 代入하여 整理하면

$$\{\delta_e\} = [C] \{a\} \dots\dots\dots(4)$$

로서 나타내어진다.

여기서

$$\{\delta_e\}^T = \{\delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_l\}$$

$$\{a\}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & \dots & x_i y^3 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 2x_i & \dots & \dots & \dots & y_i^3 \end{bmatrix}$$

式(4)의 逆行列을 取하면

$$\{a\} = [C]^{-1} \{\delta_e\} \dots\dots\dots(5)$$

로 되고 여기서 $\{a\}$ 가 決定된다.

이로부터 要素內의 變位는 다음과 같이 나타내어진다.

$$W = [S] [C]^{-1} \{\delta_e\} \dots\dots\dots(6)$$

여기서

$$\{S\} = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3\}$$

나. 鐵筋要素

原來 鐵筋콘크리트 構造物에서 鐵筋은 分散되어 配筋되는 것이 一般이다. 이러한 鐵筋의 配筋狀態를 表現하는데 있어서 鐵筋을 線要素로 하는 것은 바람직스럽지 않다. 그래서 본 研究에서는 鐵筋과 콘크리트라는 別個의 材料로서 이루어진 鐵筋콘크리트 要素를 生覺한다. 이때 그의 構成法則은 다음과 같다.

$$[K_{rc}] = [K_c] + [K_s] \dots\dots\dots(7)$$

여기서 $[K_{rc}]$: 鐵筋콘크리트要素의 剛度行列

$[K_c]$: 콘크리트板要素의 剛度行列

$[K_s]$: 보要素로서 取扱된 鐵筋의 剛度行列 (式(8) 參照)

$$[K] = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ & GJ/L & 0 & 0 & -GJ/L & 0 \\ & & 4EI/L & -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L \\ & & & 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ \text{Sym.} & & & & GJ/L & 0 \\ & & & & & 4EI/L \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

즉 콘크리트 板要素의 剛度行列속에 隣接한 鐵筋要素의 剛度行列을 組立하여 넣으므로 鐵筋콘크리트 要素의 剛度行列을 구한다. 이 경우 鐵筋과 콘크리트는 完全히 附着된 것으로 假定한다.

3. 境界支持節點의 處理

一般으로 節點이 힌지로 支持되어 있는 경우 自由로 이 回轉할 수 있는 方向이 全體座標系의 方向과 一致하지 않는 경우가 있으며 이러한 때에는 境界條件의 導入을 容易하게 하기 위하여 二重基準座標系의 方法 또는 'static condensation'을 導入하는 方法을 採用하는 것이 많이 이루어져 왔다. 그러나 扇形板의 支持邊-특히 曲線邊-과 같이 모든 支持節點의 回轉方向이 서로 相異할때에는 二重基準座標系의 方法을 擴張한 즉 多重基準座標系의 方法을 導入하

로서 境界條件의 導入이 容易하면서도 充實하게 이루어질 수 있을 것으로 期待된다. 즉 한 要素의 剛度行列을 全體座標系로 變換하는 過程에서 單一 또는 二重基準座標系를 使用하는 代身에 個個의 節点에서 獨立의으로 設定한 基準座標系-具體的으로 扇形板의 支持節点에서 扇形板에 接線方向(X軸)과 法線方向(Y軸)을 考慮하고 X-Y平面과 垂直되는 方向을 Z軸으로한 후 이를 基準座標系로 한다-를 使用하는 것이다.

曲線境界上에 있는 節点이 包含된 任意的 한 要素의 局部座標系에서의 平衡方程式이 다음과 같이 주어진다 고 하자.

$$\{f\} = [k] \{\delta\} \dots\dots\dots(9)$$

여기서,

$$\{f\}^T = \{F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, \dots, F_{zl}, M_{xl}, M_{yl}\}$$

$$\{\delta\}^T = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \dots, w_l, \theta_{xl}, \theta_{yl}\}$$

$[k] = [12 \times 12]$ 되는 剛度行列

局部座標系에서의 節点變位벡터 $\{\delta_i\}$ 와 基準座標系에서의 節点變位벡터 $\{\Delta_i\}$ 사이에는 다음의 關係式이 成립한다.

$$\{\delta_i\} = [T_i] \{\Delta_i\}; i = i, j, k, l \dots\dots\dots(10)$$

또 節点力에 對해서도 類似한 關係가 成立된다.

$$\{f_i\} = [T_i] \{F_i\}; i = i, j, k, l \dots\dots\dots(11)$$

여기서 $[T_i]$ 는 局部座標系와 要素의 任意節点에서의 基準座標사이의 座標變換行列이다. 式 (10) 및 (11)을 式(9)에 代入하여 變換하면 다음과 같다.

$$\{F_i\} = [K_i] \{\Delta_i\}; i = i, j, k, l \dots\dots\dots(12)$$

$$\text{여기서 } [K] = [T]^T [k] [T] \dots\dots\dots(13)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_i & & & \\ & T_j & & \\ & & T_k & \\ & & & T_l \end{bmatrix}$$

이와같이 要素剛度行列을 多重基準座標系를 使用하여 變換한 후 個個의 要素剛度行列을 重疊하여 全體剛度方程式을 구하면 境界條件은 通常의 有限要素法에서와 같이 간단하게 導入될 수 있다.

4. 提案된 方法의 信賴度 檢討 및 收檢性

本 研究에서 使用된 컴퓨터 프로그램은 1개의 主프로그램과 11개의 副프로그램으로 構成되어 있으며 흐름도는 Fig. 3과 같다.

本 論文에서 提案된 方法의 計算精度를 알아 보기 위하여 Fig. 4와 같은 扇形板이 4邊에서

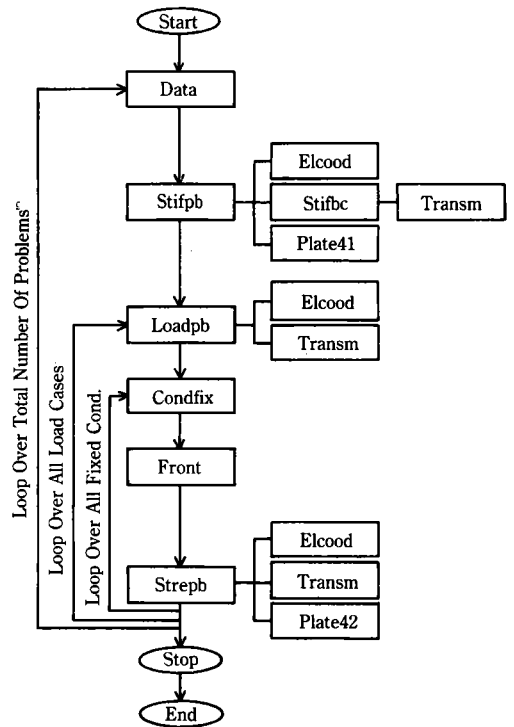


Fig. 3. Computer program flow chart

Table-1. Convergency of numerical solutions using multi-base coordinate system method in F.E.M

拘束		4邊固定, 開角 = $\frac{2}{3}$ (rad)		4邊單純支持, 開角 = $\pi/6$ (rad)		
項目 解析方法		$\alpha^* [w = \alpha^* \cdot \frac{ql^4}{D}]$	$\beta^* [M_r = \beta^* \cdot ql^2]$	w	M_r	M_θ
本 論 文	6×6	0.000951	0.013487	0.003256	0.029907	0.036634
	8×8	0.001020	0.014475	0.003411	0.031428	0.035575
	10×10	0.001057	0.014986	0.003503	0.032271	0.035291
	12×12	0.001077	0.015236	0.003563	0.032790	0.035417
	20×20	0.001133	0.016076	0.003690	0.033993	0.034857
文獻(2)		0.001142	0.01674	0.004037	0.03432	0.03498

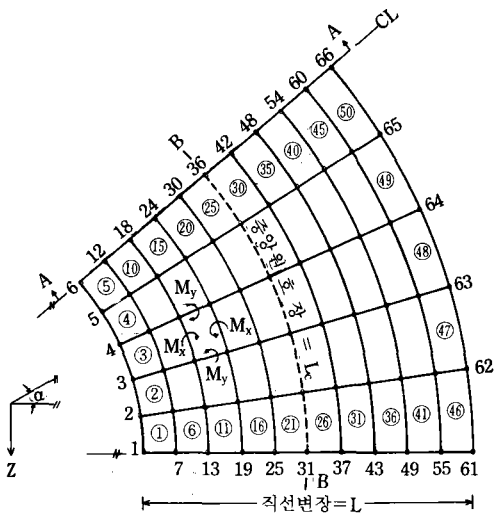


Fig. 4. Analysied circular ring sector plate and mesh generation

固定되고 開角이 $\frac{2}{3}$ (radian)일 경우 및 4邊單純支持이고 開角이 $\pi/6$ (radian)일 경우에 適用한 結果를 文獻(2)의 結果와 比較하면 Table-1과 같다.

II. 數值例 및 考察

앞에서 說明한 解析方法 및 解析節次를 Fig. 4와 같은 鐵筋콘크리트 扇形板에 等分布荷重이 作用하고 任意의 境界條件을 갖는 경우의 解析에 適用하였으며 이때 材料定數는 다음과 같이 하

였다.

板(콘크리트) :

彈性係數 $E_c = 240,000 \text{ kg/cm}^2$

포아손比 $\nu = 0.17$

板두께 $t = 20 \text{ cm}$

自重 $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$

分布荷重 $q = 0.5 \text{ t/m}^2$

鐵筋 彈性係數 $E_s = 2,040,000 \text{ kg/cm}^2$

포아손比 $\nu = 0.3$

要素의 分割은 半徑方向으로 10等分 圓周方向으로 10等分하였으며 圓周方向으로 分割은 對稱條件을 利用하면 절반만을 解析하여도 된다. 이때 境界條件은 다음과 같은 6경우를 考慮하였다.

- (i) 4邊固定(B.C-1)
- (ii) 4邊單純支持(B.C-2)
- (iii) 直線部 2邊固定 曲線部 2邊自由(B.C-3)
- (iv) 直線部 2邊單純支持 曲線部 2邊自由(B.C-4)
- (v) 曲線部 2邊固定 直線部 2邊自由(B.C-5)
- (vi) 曲線部 2邊單純支持 直線部 2邊自由(B.C-6)

또 開角의 크기는 위의 各各의 境界條件에 對해서 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 및 90° 의 7경우를 處理하였으며 이때 開角 0° 는 短形板을 意味한다. 이때 邊長比(直線邊長에 對한 中央圓弧長의 比)는 1.0으로 局限하였다.

板의 中央에서의 鉛直처짐을 圖示하면 Fig. 5와 같다.

2邊에서 支持이건 4邊支持이건 固定支持일 경우에는 開角의 影響이 크게 나타나지 않았지만 單純支持인 경우에는 開角의 影響이 크게 나타났으며 特히 直線部 2邊에서 單純支持일 경우가 가장 큰 影響을 미쳤으며 曲線部 2邊에서 單純支持일 경우에는 開角이 60° 以上이 되면 처짐이 顯著히 減少되는 現象을 나타냈다. 또 板의 中央에서의 M_x 및 M_y 의 變化를 圖示하면 Fig. 5(b) 및 Fig. 5(c)와 같다.

M_x 의 變化를 보면 曲線部 2邊 또는 4邊에서

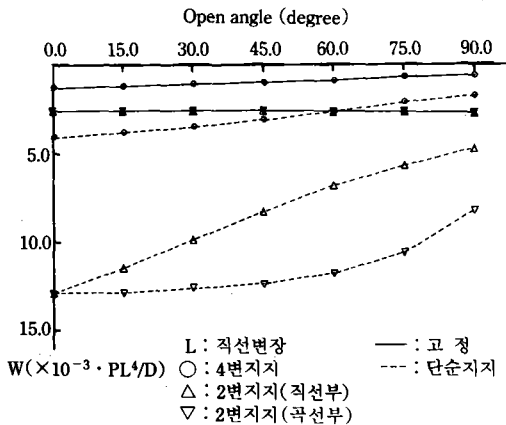


Fig. 5(a). Deflection according to open angle at central

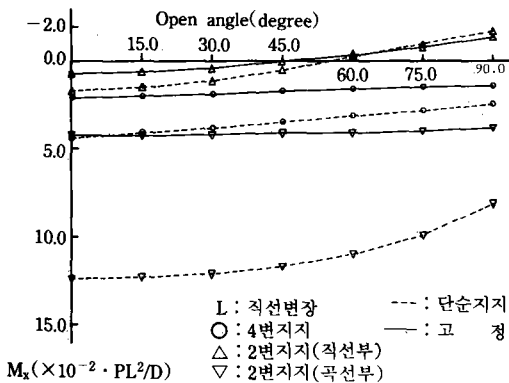


Fig. 5(b). M_x variation according to open angle at central

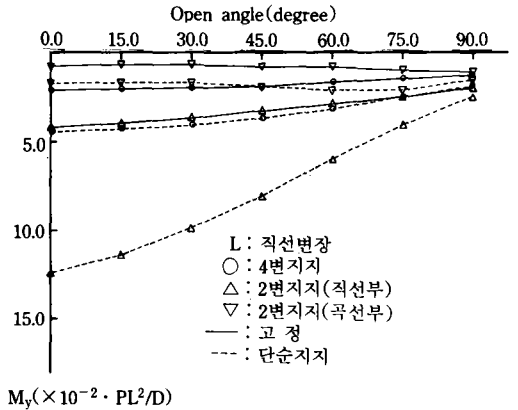


Fig. 5(c). M_y variation according to open angle at central

固定된 경우 開角의 影響은 거의 없었으며 直線部 2邊에서 支持된 경우 單純支持이거나 固定이거나 거의 같은 影響을 받고 있었으며 特히 이 경우에는 開角이 45° 以上이 되면 板의 中央에서 負모멘트가 發生되고 있었다. 一般으로 開角 45° 以上일때 影響이 크게 나타나기 始作하였다. M_y 의 경우에는 直線部 2邊 單純支持의 경우 開角의 增加에 따라 顯著히 減少하는 傾向을 보였으며 特히 開角이 90°일 경우에는 拘束條件의 影響이 顯著히 減少하였다.

다음은 中央斷面(A-A)의 垂直처짐의 變化를 圖示하면 Fig. 6과 같다.

境界條件에 따라 약간의 差異는 있지만 一般으로 開角이 增加함에 따라 垂直처짐은 減少되는 傾向을 보였으며 4邊支持의 경우(B.C-1 및 B.C-2)에는 開角의 增加에 따라 最大처짐이 發生되는 位置가 板의 中央에서 外側으로 移動되었으며 開角의 影響은 外側 曲線部에서는 거의 없었다. 曲線部 2邊 支持의 경우(B.C-5)가 開角의 影響이 가장 작은 것으로 나타났다. 기타의 境界條件은 特別한 事項이 없기 때문에 省略하였다.

中央斷面(A-A)에서의 M_x 의 變化를 圖示하면 Fig. 7과 같다.

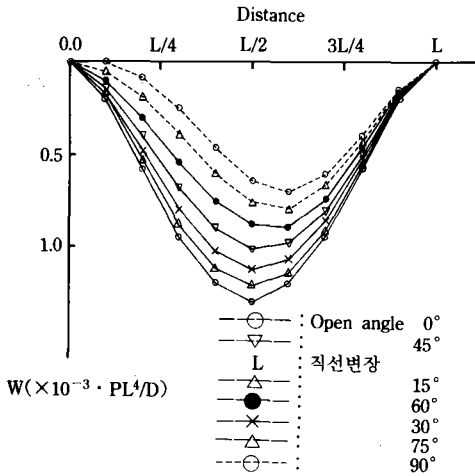


Fig. 6(a). Lateral displacement section A-A (B.C-1)

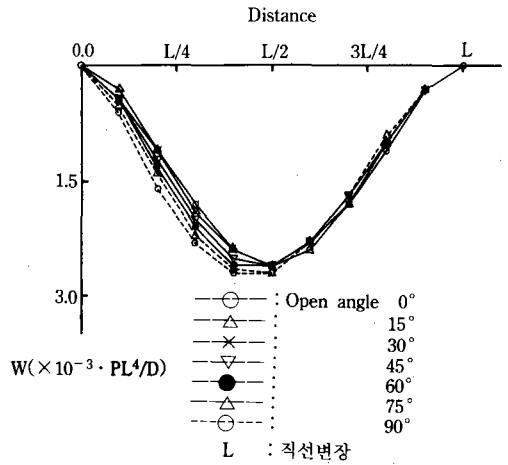


Fig. 6(c). Lateral displacement section A-A (B.C-5)

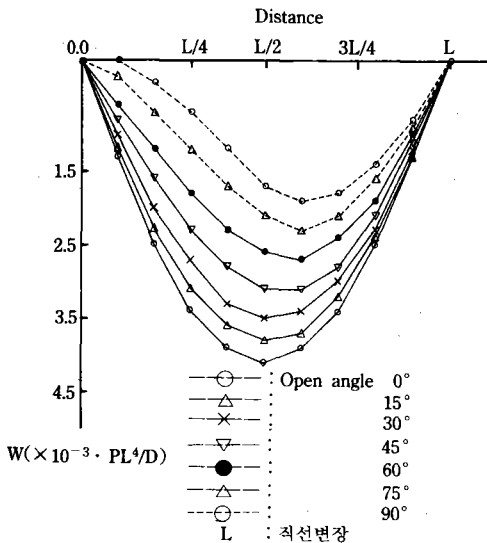


Fig. 6(b). Lateral displacement section A-A (B.C-2)

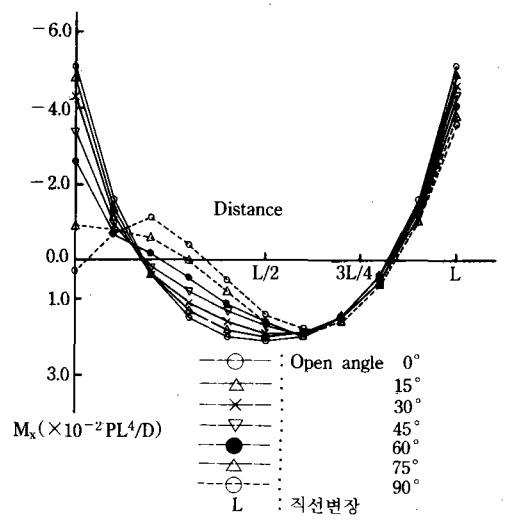


Fig. 7(a). M_x variation, section A-A (B.C-1)

4邊固定(B.C-1)의 경우 中央內側에서 開角의 影響이 크게 나타나고 있음을 볼 수 있으며 4邊單純支持의 경우에는 開角의 影響이 B.C-1에 비해서는 中央外側까지 미치고 있지만 外側支持邊 附近에는 影響이 크지 않음을 알 수 있다.

中央斷面(A-A)에서의 M_y 의 變化를 圖示하면 Fig. 8과 같다. 4邊固定(B.C-1)의 경우에는

比較的 開角의 影響이 작게 나타났지만 4邊單純支持(B.C-2)의 경우에는 大端히 큰 影響을 받고 있었으며 曲線部 2邊支持(B.C-5 및 B.C-6)의 경우에는 中央內側에서 큰 影響이 나타났다.

圓周方向 中央斷面(B-B)에서의 垂直처짐 및 모멘트의 變化는 모든 境界條件에서 大端히 規

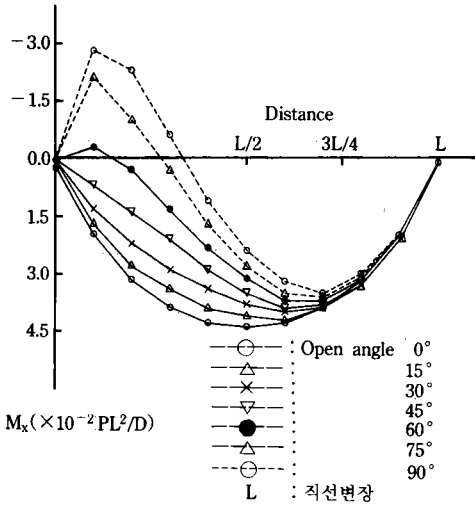


Fig. 7(b). M_x variation, section A-A(B.C-2)

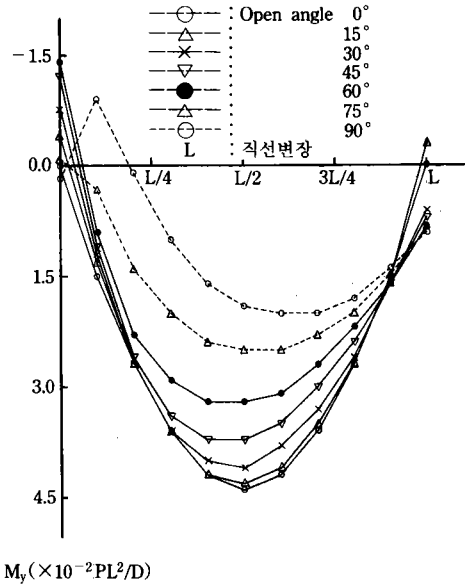


Fig. 8(b). M_y variation, section A-A(B.C-2)

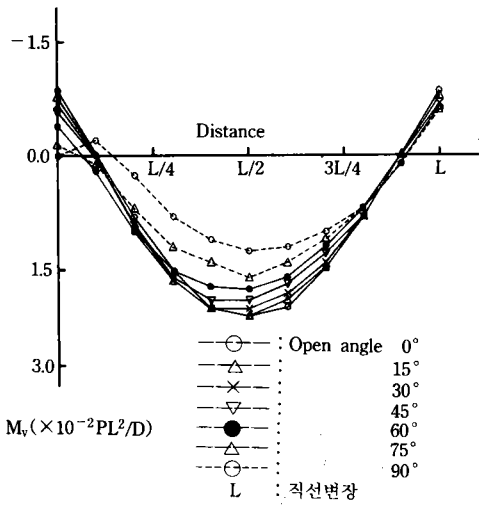


Fig. 8(a). M_y variation, section A-A(B.C-1)

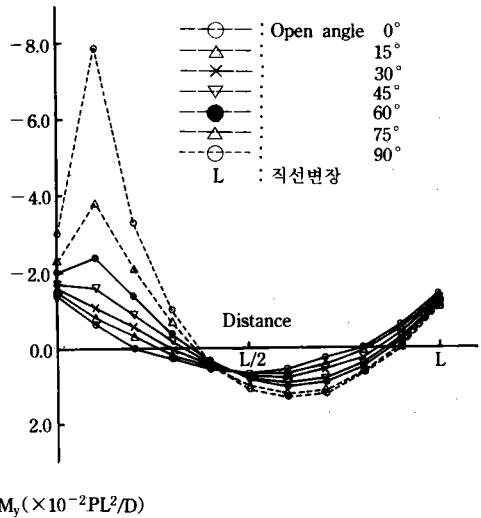
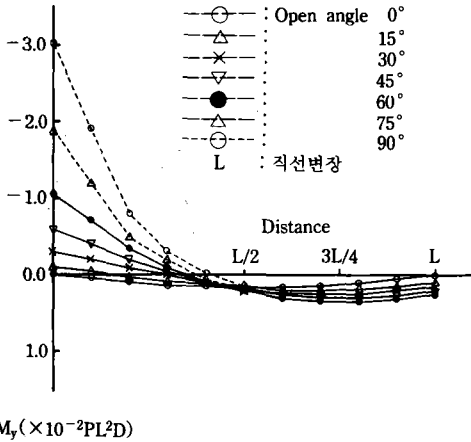


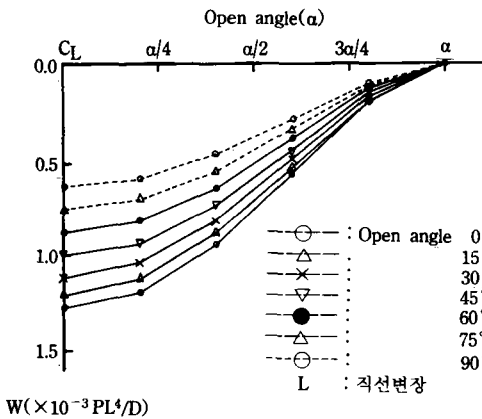
Fig. 8(c). M_y variation, section A-A(B.C-5)

則的으로 나타났으므로 代表的으로 4邊固定(B.C-1) 경우에 對해서 垂直처짐을 圖示하면 Fig. 9와 같다.



$M_x (\times 10^{-2} PL^2/D)$

Fig. 8(d). M_x variation, section A-A(B.C-6)



$W (\times 10^{-3} PL^4/D)$

Fig. 9. Lateral displacement, section B-B(B.C-1)

III. 結 論

본 논문은 任意的 境界條件을 갖는 鐵筋콘크리트 扇形板의 合理的인 解析方法을 提案하고 또 扇形板의 開角 및 境界條件에 따른 力學的 特性을 究明한 것이다. 有限要素法에 의한 扇形板의 解析時 多樣한 境界條件을 容易하면서도 充實하게 考慮할 수 있도록 하기위해서 基準座標系를 要素의 各節點에서 獨立的으로 設定하는 즉 多重基準座標系의 方法을 提案하였으며 이

러한 方法에 의해서 얻어진 解의 收檢性 檢證을 통해서 본 論文에서의 方法의 妥當性을 立證하였다.

또 鐵筋의 影響을 考慮함에 있어서 鐵筋을 別個의 線要素로 取扱하는 代身에 要素의 水準에서 콘크리트 板要素의 剛度行列속에 隣接한 鐵筋要素의 剛度行列을 組立하여 鐵筋콘크리트 要素의 剛度行列을 計算하므로써 要素數를 增加시키지 않고 鐵筋의 影響을 考慮할 수 있도록 하였다.

境界條件을 6경우로 變化시키면서 이들 各各에 대해서 開角의 크기를 7경우로 變化시킨 解析例로 부터 任意的 境界條件을 갖는 扇形板의 力學的 特性에 대한 開角의 影響을 다음과 같이 要約 할 수 있었다.

1. 板 中央의 垂直처짐 및 모멘트에 대한 影響은 單純支持된 경우에 크게 나타났으며 특히 直線部 2邊에서 單純支持된 경우 가장 顯著하였으며 固定支持의 경우에는 거의 없었다.
2. 中央斷面(A-A)에서의 垂直처짐 및 모멘트에 대한 影響은 中央內側에서 크게 나타났으며 中央外側에서는 거의 없었다.
3. 開角의 增加에 따라 最大처짐은 점차 減少하였으며 最大처짐의 發生 位置는 板의 中央으로부터 外側으로 약간씩 移動되었다.
4. 모멘트는 中央內側 支持邊 附近에서 심한 變化를 나타냈다.

이 논문은 1990年度 教育部 學術振興 財團의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 研究되었음.

參 考 文 獻

1. Hisanori OHTSUKA and Tadao KANEKO : Analysis of circular ring sector plates with all edges elastically supported by frames, 九大工學集報 Vol. 45, No. 6, pp. 774-780, 昭和 47年.

2. Hisanori OTSUKA : Finite difference analysis of circular ring sector plates supported by edge-beams, proc. of J.S.C.E, No. 220, pp. 107-115, 1973.
3. 임성순, 장승필 : 유한요소법을 이용한 나선형 곡선 부재의 정적 해석에 관한 연구, 대한 토목 학회 논문집, 제8권 2호 pp. 215-225, 1988.
4. 임성순, 장승필 : 나선형 곡선 부재의 자유진동에 관한 연구, 대한 토목 학회 논문집 제8권 2호 pp. 227-238, 1988.
5. Isamu OKUMURA, yuya HONDA and Jin Yoshimura : on an analysis for circular ring sector plates by one theory of moderately thick plates, proc. of J.S.C.E, No. 326 pp. 15-18, 1982.
6. Jin Yoshimura : The bending of curvilinear orthotropic circular ring sector plate, Trans. of J.S.C.E, No. 82, pp. 9-10, 1962.
7. M. A. KHAN, K. O. KEMP : Elastic full composite action in a slab and beam system, The structural engineer, Vol. 48, No. 9, pp. 353-359, 1970.
8. Masashi Iura and Masaharu HIRASHIMA : Fourier analysis of shallow right helicoidal shells, proc. of J.S.C.E, No. 321, pp. 15-27, 1982年.
9. Shigeyoshi NAGATAKI, Seung Han Lee and Takahisa Okamoto : A study on mechanism of torsional resistance of reinforced concrete members, proc. of J.S.C.E, No. 390/V-8, pp. 179-188, 1988.
10. Shinichi TAMAI, Hiroshi Shima, Junichi IZUMO and Hajivme OKAMURA : Average stress-average strain relationship of steel in uniaxial tension member in post-yield range, proc. of J.S.C.E, No. 378/6, pp. 239-247, 1987.
11. Shinichi TAMAI, Hiroshi Shima, Junichi IZUMO and Hajivme OKAMURA : A study on torsional poroperties of reinforced concrete members, proc. of J.S.C.E, No. 327/V-5, pp. 157-166, 1986.
12. Shoji Ikeda and Hiroyuki Nagumo : study on a method of rational application of finite element method to R.C and P.C structures, proc. of J.S.C.E, No. 414/V-12, pp. 137-143, 1990.
13. Tadao Kaneko and Hisanori Ohtska : Analysis of circular ring sector plates with two opposite straight edges elastically supported by frames, 九大工學集報 Vol. 45, No. 1, pp. 27-34, 昭和 47年.
14. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of plates and shells, McGraw Hill, 1959.

(接受日字 : 1991. 4. 22)