一般論文

Karmarkar 법의 속도 제고에 관한 연구

우병오* • 박순달*

1. 서 론

Karmarkar 법의 실용성을 향상시키기 위해서는 그 수행속도를 증가시키기 위한 적절한 구현방법을 연구할 필요가 있다. 이를 위해 Karmarkar 법의 수행횟수 및 매 회의 수행시간을 줄이는 방법에 대한 연구가 요구된다.

앨고리듬의 전체 수행횟수를 감소시키기 위해 변환된 공간에서의 개선폭(Step Length)을 적절히 결정하는 방법을 연구하였고, 매 회의 계산시간을 감소시키기 위해 계산시간의 대부분을 차지하는 사영행렬의 계산을 빠르게 하는 방법을 연구하였다.

Karmarkar 법은 목적함수의 최적치가 0이라는 가정 하에서 시작된다. 그러나, 일반적인 선형계획 문제에서 목적함수의 최적치가 0인 경우는 흔치 않다. Todd & Burrell은 쌍대문제의 해를 이용하여 이 가정을 제거하는 방법을 제시하였다. 이것을 요약하면 다음과 같다.

Karmarkar 법은 아래와 같은 특수한 형태로 표현되는 선형계획 문제를 푼다. 이것을 Karmarkar 표준형 문제(KP)라고 한다.

$$\begin{aligned} \text{KP : Min. } & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax = 0 \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

단, $e = (1, \cdots, 1)^T$, $c, x \in R^n$

$$A \in R^{m \times n}$$

Karmarkar 표준형 문제(KP)의 쌍대문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{KD : Max. } & z \\ \text{s.t. } & A^T y + z \leq c \\ & y \in R^m \\ & z \in R \end{aligned}$$

쌍대문제(KD)의 목적함수의 최적치 z^*를 모르는 경우에 현재의 쌍대목적함수 z를 z^*의 근사치로 사용한다. Todd & Burrell은 원 가능해 x가 최적해 x^*로 수렴할 때, 쌍대 가능해 y, z는 쌍대 최적해 y^*, z^*로 수렴함을 증명하고, 매 단계마다 $c(z) = c - ze$를 계산하여 이것을 목적함수의 계수로 사용하는 방법을 개발하였다. 이 방법을 Todd & Burrell 앨고리듬이라 한다. Todd & Burrell 앨고리듬은 목적함수의 최적치를 모르는 상태에서 앨고리듬의 수행을 가능하게 하며, 문제의 크기를 증가시키지 않으면서 원문제와 쌍대문제의 해를 함께 구해준다.

Todd & Burrell 앨고리듬을 요약하면 다음과 같다.

단계 0 : 초기 쌍대해(y^0, z^0)를 구한다.

$$y^0 = (AA^T)^{-1}Ac$$

$$z^0 = \min_j (c - A^T y^0)_j$$

단계 1 : 사영행렬(P_{AK})을 계산한다.

$$A_k = AX_k$$

$$P_{Ak} = I - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k$$

*서울대학교 산업공학과

단, $X_k = \mathrm{diag}\{x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k\}$

단계 2 : 쌍대해(y^k, z^k)를 개선시킨다.

$u = P_{Ak}X_{kC}$

$v = P_{Ak}x^k$

$\min_j(u - z^k v)_j \leq 0$이면,

$y^{k+1} = y^k$

$z^{k+1} = z^k$

아니면,

$z^{k+1} = \min_j\{z \mid (u - zv)_j = 0, \ z > z^k\}$

$y^{k+1} = (A_k A_k^T)^{-1} A_k X_k c(z^{k+1})$

단, $c(z^k) = c - z^k e$

단계 3 : 개선방향(c_P)을 구한다.

$c_P = P[u - z^{k+1}v]$

단, $P = I - ee^T/n$

단계 4 : 구내 최적화로 변환된 공간의 해$(\bar{x})$를 구한다.

$\bar{x} = e/n - r\bar{c}$

단, r : 개선폭

$\bar{c} = c_P / \| c_P \|$

단계 5 : 역변환으로 새로운 해(x^{k+1})를 구한다.

$x^{k+1} = X_k\bar{x}/e^T X_k \bar{x}$

$c^T x^{k+1} = z^{k+1}$이면, x^{k+1}을 최적해로 판정하고 계산을 종료한다.

아니면, $k = k+1$로 두고 단계 1로 간다.

본 연구에서는 Karmarkar 법의 수행속도를 증가시키기 위한 몇가지 방안을 제시하고자 한다. 이를 위해 Karmarkar법의 한 변형인 Todd & Burrell 앨고리듬을 분석하고, 전체 수행횟수를 감소시키는 방안과 매 회의 계산시간을 감소시키는 방안에 대해 연구하였다. 또한, 연구된 몇가지 방법들에 대해 실험을 통한 비교분석을 하였다.

2. 사영행렬의 계산

Todd & Burrell 앨고리듬에서 사영행렬 $P_{Ak} = I - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1}A_k$를 계산하는 단계 1에서 계산시간의 대부분이 소요된다. 따라서, 단계 1의 계산시간을 줄임으로써 매 회의 계산시간을 줄일 수 있다.

사영행렬 P_{Ak}를 구하는 것은 다음과 같은 선형방정식(Linear System)을 푸는 것과 같다.

$$A_k A_k^T u' = A_k X_k c \qquad (2.1)$$

이 선형방정식을 푸는 방법에는 Gauss 소거법, QR 분해법(QR Factorization) 및 Cholesky분해법(Cholesky Factorization) 등이 있다. 각 방법의 개요는 다음과 같다.

Gauss 소거법

이 방법은 역행렬$(A_k A_k^T)^{-1}$을 Gauss 소거법으로 계산한 후 행렬간의 곱셈을 통하여 u'을 계산하는 방법이다.

QR분해법

각 열이 선형 독립인 임의의 행렬은 직교행렬(Orthonormal Matrix) Q와 가역(Invertible)인 상삼각행렬(Upper Triangular Matrix) R의 곱으로 분해될 수 있다.

선형방정식 (2.1)을 풀기 위해 행렬 $A_k^T (\in R^{n \times m})$를 직교행렬 Q와 상삼각행렬 R의 곱으로 분해하면,

$A_k^T = QR$

단, $Q \in R^{m \times m}$: 직교행렬

$R \in R^{m \times m}$: 상삼각행렬

이 된다. 따라서, (2.1)의 해 u'은

$$u' = (A_k A_k^T)^{-1} A_k X_k c = R^{-1} Q^T X_k c$$

가 되고, 이 식의 양변에 행렬 R을 곱하면 다음과 같은 새로운 선형방정식이 생긴다.

$$R u' = Q^T X_k c$$

그런데, R이 상삼각행렬이므로 이 선형방정식은 후방치환(Backward Substitution)으로 쉽게 풀 수 있다.

Cholesky 분해법

대칭이고 양정치(Positive Definite)인 행렬은 양인 대각원소를 가지는 하삼각행렬(Lower Triangular Matrix) G와 그 전치행렬 G^T의 곱으로 분해될 수 있다.

선형방정식 (2.1)을 풀기 위해 $A_kA_k^T$를 다음과 같이 분해하자.

$$A_kA_k^T = GG^T$$

단, $G \in R^{m \times m}$: 하삼각행렬

그러면, (2.1)은 아래와 같은 새로운 선형방정식으로 바뀐다.

$$GG^T u' = A_k X_k c$$

그런데, G와 G^T가 하삼각 및 상삼각행렬이므로 이 방정식은 전방치환(Forward Substitution)과 후방치환을 번갈아 행함으로써 쉽게 풀 수 있다.

3. 개선폭의 결정

Todd & Burrell 앨고리듬의 단계 4에서 변환된 공간에서의 새로운 해 $\bar{x}$는 $e/n - r\bar{c}$로 표현된다. 여기서, 개선폭 r에 따라 앨고리듬의 수행횟수가 좌우되므로, 개선폭을 적절히 결정함으로써 앨고리듬의 수행속도를 증가시킬 수 있다.

Karmarkar는 r이 단체 내접구의 반경의 1/4일 때 포텐셜 함수의 값이 매 회 1/8 이상 감소함을 보였고, Todd & Burrell은 r이 1/3일 때 매 회 감소되는 포텐셜 함수의 값이 1/5 이상임을 보였다. 개선폭이 일정한 값을 가지면 매 회 포텐셜 함수가 일정한 값 이상 감소된다. 그러나, 이 경우 해의 수렴속도는 매우 느리다. 따라서, 이에 대한 대안으로 r을 매 회 적절하게 결정해주는 방법이 요구된다.

r의 값을 매 회 계산하는 방법에는 비율검정(Ratio Test)과 선형탐색(Line Search)이 있다. 비율검정은 해의 가능성을 유지하는 r의 최대치를 찾아서 이 값을 개선폭으로 사용하는 방법이며, 선형탐색은 해의 가능성이 유지되는 범위 내에서 포텐셜 함수의 값을 개선폭으로 사용하는 방법이며, 선형탐색은 해의 가능성이 유지되는 범위 내에서 포텐셜 함수의 값을 최소화시키는 r을 찾아서 그 값을 개선폭으로 사용하는 방법이다.

비율검정

$\bar{x}$가 가능해가 되기 위해서는 부등식 $e/n - r\bar{c} \geq 0$이 만족되어야 한다. 비율검정법은 이 부등식을 만족시키는 최대의 r을 찾아 이것을 개선폭으로 사용하는 방법이다. 즉, 문제

Max. r

s.t. $1/n - r\bar{c}_j \geq \varepsilon,\ j=1, \cdots, n$

의 목적함수의 최적치를 구해야 한다. 이 문제의 목적함수의 최적치 r^*는 아래와 같은 비율검정으로 구한다. 여기서, ε는 오차의 한계이다.

$$r^* = \min_j \{(1/n - \varepsilon)/\bar{c}_j\}$$
$$\bar{c}_j > 0$$

선형탐색

구내 최적화에서 포텐셜 함수를 최소로 하는 r을 개선폭으로 사용하면 그 회의 해는 최대로 개선된다. 따라서, 매 회 이 방법으로 개선폭을 결정하면 해의 수렴속도를 증가시킬 수 있다.

선형탐색법에서는 비율검정법으로 해의 가능성을 유지하는 r의 최대치 r^*를 구한 후, $[0, r^*]$의 범위에서 r에 대해 선형탐색을 함으로써 포텐셜 함수를 최소로 하는 개선폭을 찾는다. 이 경우, 제약식이 없고, 포텐셜 함수의 제 2 궤도함수를 계산하는 데는 많은 시간이 요구되므로 제 2 궤도함수를 필요로 하지 않는 황금분할법(Golden Section Method)이나 이분탐색법(Bisecting Search Method)을 사용한다. 황금분할법은 k회의 구간 감소율이 $(0.618)^{k-1}$인 선형탐색법이고, 이분탐색법은 제 1 궤도함수를 이용해서 매 회의 불확실 구간을 절반씩 줄여나가는 방법이다.

4. 실험 및 결과 분석

본 연구에서는 각 사영행렬 계산방법 및 개선폭 결정방법들에 대해 앨고리듬의 수행시간을 측정하고, T-Test를 사용하여 이들을 비교하였다.

실험 계획

실험에 사용된 컴퓨터는 Intell 80287 Co-Processor가 장착되고 CPU속도가 16MHz인 IBM PC AT기종이며, 사용된 문제의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Max. } c^T x \\ &\text{s.t. } \; Ax \le b \\ &\qquad\; x \ge 0 \end{aligned}$$

이러한 문제를 생성시키기 위해 문제 생성용 프로그램인 LPGEN을 사용하였다. LPGEN에서 각 자료들은 아래와 같이 결정된다.

a_{ij} : 0과 10 사이의 난수

b_i : $(\sum_j a_{ij}^2)^{1/2}$

c_j : 0과 10 사이의 난수

세종류(3×8, 15×20, 25×50)의 문제에 대해 각 10문제씩 총 30문제를 발생시켜서 각 사영행렬 계산방법 및 개선폭 결정방법에 대해 수행시간을 측정하였다. 실험결과를 분석하기 위해 T-Test를 사용한다.

실험 결과의 분석

사영행렬 계산방법들을 비교하기 위해 수행실험을 실시한 결과, 행렬을 분해하는 방법을 쓴 경우가 Gauss 소거법의 경우보다 계산시간 면에서 우수한 것으로 나타났으며, QR분해법에 비해 Cholesky 분해법이 전반적으로 우수한 것으로 나타났다.

개선폭 결정방법들을 비교하기 위한 수행실험의 결과, 개선폭을 매 회 계산에 의해서 결정해 주는 경우가 고정치로 주는 경우보다 우수한 것으로 나타났다. 비율검정법이 이분탐색법이나 황금분할법에 비해 대체로 우수한 경향을 보였다.

유의수준 α에서 T-Test를 하기 위한 검정통계량, 가설 및 기각역은 다음과 같다.

검정통계량 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_P(1/n_X+1/n_Y)^{1/2}}$

귀무가설 : $\mu_X=\mu_Y$

대립가설 : $\mu_X\neq\mu_Y$

기각역 : $|T|\ge t(n_x+n_y-2,\ \alpha/2)$

단, $\overline{X}-\overline{Y}$: 두 방법의 평균 계산시간의 차

S_p^2 : 등분산 σ^2의 합동추정량

n_x, n_y : 두 집단의 표본수

$t(n, \alpha)$: 표본수 n, 유의수준 α에서의 t값

실험 결과는 [표 1] 및 [표 2]에 나타나 있다. 표에서 수행시간의 단위는 초이다. T-Test 결과는 [표 3]및 [표 4]와 같다.

[표 1] 사영행렬 계산방법과 수행시간

M	N	Gauss	OR	Cholesky
3	8	3.20	1.70	1.40
3	8	3.60	1.85	1.75
3	8	2.90	1.55	1.40
3	8	3.60	1.80	1.70
3	8	4.15	2.30	2.10
3	8	4.00	2.15	1.95
3	8	3.40	1.75	1.40
3	8	2.95	1.60	1.35
3	8	2.80	1.50	1.40
3	8	2.80	1.30	1.35
15	20	71.14	30.54	23.80
15	20	98.73	43.04	32.88
15	20	73.27	31.64	24.76
15	20	72.72	31.44	23.76
15	20	74.50	32.35	25.04
15	20	71.49	30.89	24.09
15	20	79.09	34.14	26.45
15	20	74.64	32.19	25.27
15	20	79.34	34.30	26.82
15	20	72.47	31.44	24.15
25	50	995.12	387.80	266.52
25	50	1129.50	439.65	279.16
25	50	992.44	387.49	265.81
25	50	1014.92	395.03	261.73
25	50	963.65	375.64	258.55
25	50	1000.65	390.65	268.23
25	50	982.59	383.03	263.13
25	50	987.17	383.71	264.64
25	50	113.31	432.77	295.80
25	50	962.03	375.06	257.76

[표 2] 개선폭 결정방법과 수행시간

M	N	고정치	비율검정	이분탐색	황금분할
3	8	3.20	0.60	1.00	1.70
3	8	3.60	0.90	1.10	1.45
3	8	2.90	0.95	1.25	1.45
3	8	3.60	0.80	0.80	1.20
3	8	4.15	0.80	1.05	1.50
3	8	4.00	0.80	0.95	1.25
3	8	3.40	0.85	1.10	1.40
3	8	2.95	1.10	1.25	1.65
3	8	2.80	1.00	0.95	1.45
3	8	2.80	1.00	1.25	1.60
15	20	71.14	16.92	19.49	20.64
15	20	98.73	19.13	21.73	22.95
15	20	73.27	17.21	17.36	18.38
15	20	72.72	17.09	19.51	20.70
15	20	74.50	17.11	21.94	22.97
15	20	71.49	14.82	17.31	18.27
15	20	79.09	19.29	21.82	23.14
15	20	74.64	17.10	19.62	20.65
15	20	79.34	17.16	19.68	20.65
15	20	72.47	14.70	17.12	18.10
25	50	995.12	154.64	170.11	173.65
25	50	1129.50	154.59	184.66	188.46
25	50	992.44	154.37	169.85	173.35
25	50	1014.92	140.00	170.09	173.59
25	50	963.65	154.43	169.94	173.47
25	50	1000.65	154.23	169.74	173.12
25	50	982.59	139.64	155.06	158.23
25	50	987.17	140.18	155.57	158.65
25	50	1113.31	140.07	155.49	158.78
25	50	962.03	125.01	140.18	143.13

[표 3] 사영행렬 계산방법에 대한 T-Test결과

문제	Gauss:QR	Gauss:Chol	QR:Chol
3×8	X(8.73)	X(9.86)	O(1.32)
15×20	X(15.26)	X(18.60)	X(5.17)
25×50	X(31.07)	X(39.37)	X(15.86)

단, 괄호 안의 숫자는 T값
유의수준 : 0.01
t(18, 0.005)=2.878
X : 기각, O : 채택

[표 4] 개선폭 결정방법에 대한 T-Test 결과

문제	고정치 : 비율	고정치 : 이분	고정치 : 황금	비율 : 이분	비율 : 황금	이분 : 황금
3×8	X(15.19)	X(13.94)	X(11.46)	X(−2.90)	X(−8.65)	X(−5.67)
15×20	X(22.55)	X(21.41)	X(20.96)	X(−3.32)	X(−4.66)	O(−1.29)
25×50	X(45.99)	X(44.71)	X(44.49)	X(−3.60)	X(−4.21)	O(−0.60)

단, 괄호 안의 숫자는 T값
유의수준 : 0.01
t(18, 0.005)=2.878
X : 기각, O : 채택

5. 결 론

본 연구에서는 Karmarkar 법의 변형인 Todd & Burrell 앨고리듬을 분석하고 이 앨고리듬의 수행속도를 증가시키기 위한 몇가지 방안을 제시하였다. 또한, 몇가지 실험을 통하여 제안된 방안들을 비교 분석하였다.

사영행렬의 계산에 QR 분해법과 Cholesky 분해법을 도입함으로써 계산 시간을 줄일 수 있었고, 구내최적화를 위한 개선폭의 결정에 비율검정법과 선형탐색법을 사용함으로써 수행횟수 및 총 수행시간을 줄일 수 있었다.

수행실험을 통하여 앨고리듬을 분석한 결과, 수행시간의 대부분을 사영행렬의 계산이 차지하는 것으로 나타나 이론적으로 계산복잡도를 분석한 결과와 일치하였다. 또한, 사영행렬과 개선폭의 결정에 사용된 각 방법들을 실험을 통해 비교 분석한 바로는 사영행렬의 계산에 있어서 Cholesky 분해법이 Gauss 소거법이나 QR 분해법을 쓰는 경우보다 우수했으며, 개선폭을 결정하는 데 있어서는 비율검정법이 속도면에서 가장 우수했다.

—參 考 文 獻—

1. 김 병재, Karmarkar 기법에 있어서 최적기저 결정에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문, 1990
2. 박 순달, 선형계획법, 대영사, 1987
3. M. Bazaraa and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming-Theory and Algorithms*, John Wiley and Sons, NY, 1979
4. M. C. Ferris and A. B. Philpott, On the Performance of Karmarkar's Algorithm, *Journal of Operations Research Society*, Vol.39, No.3(1988), pp.257-270
5. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix*

Computations, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1983

6. J. N. Hooker, Karmarkar's Linear Programming Algorithm, *Interfaces*, Vol.16, No. 4(1986), pp.75–90

7. N. Karmarkar, A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica*, Vol.4(1984), pp.373–395.

8. N. Karmarkar, A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming, Mathematical Science Division, AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1984

9. L. G. Khachiyan, A Polynomial Algorithm in Linear Programming, *Soviet Mathematics Doklady*, Vol.20(1979), pp.191–194.

10. G. Kolata, A Fast Way to Solve Hard Problems, *Science*, Vol.225(1984), pp.1379–1380

11. K. G. Murty, *Linear Programming*, John Wiley & Sons, NY, 1983

12. G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, NY, 1980

13. M. J. Todd and B. P. Burrell, An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables, *Algorithmica*, Vol.1(1986), pp.409–424

14. J. A. Tomlin, An Experimental Approach to Karmarkar's Projective Method for Linear Programming, *Mathematical Programming Study*, Vol.31(1987), pp.175–191

학회지 및 경영과학회지 편집방침 및 투고요령

—편집방침—

1. 한국경영과학회지는 경영과학에 관한 이론 및 응용에 관한 독창적 연구논문을 게재하고, 경영과학지는 응용논문(현황, 연구보고, 해설, 강좌 포함)을 게재한다.
2. 투고자는 원칙적으로 본회의 회원에 한한다. 단 회원과의 공동 연구자 및 초청 기고자는 예외로 한다.
3. 제출논문은 다른 간행물에 발표되지 아니한 것이어야 한다. 단 최근 2년내에 학술발표회 등에 발표된 논문은 본 학회지에 투고할 수 있으며, 이 경우에는 편집위원회에서 심사여부를 결정한다.
4. 원고 내용에 대한 책임은 집필자가 진다.
5. 학회지 및 경영과학지에 게재하고자 하는 논문은 심사를 거쳐야 하며, 기타 원고의 심사여부는 편집위원회에서 결정한다.
6. 접수된 논문은 편집위원회의 의견을 거쳐 논문 1편당 2인 이상의 심사자에게 심사를 위촉함을 원칙으로 한다.
7. 논문심사 결과 심사위원 전원이 추천하면 논문의 게재가 확정되며, 그렇지 않은 경우에는 편집위원회에서 토의 처리한다.
8. 심사위원은 원고의 내용중 수정 보완하여야 할 부분, 투고 및 편집방침에 위배된 부분이 있을 때에는 편집위원회 위원장을 경유하여 투고자에게 수정을 요구할 수 있다.
9. 게재가 확정된 논문의 게재 시기는 편집위원회에서 결정한다.
10. 본 학회지에 게재된 논문의 판권은 본 학회가 소유한다(단 판권에 대해 유발되는 문제에 대한 책임은 집필자가 진다).
11. 일단 접수된 원고는 반려하지 아니한다.
12. 학회지 및 경영과학지의 크기는 4×6배판으로 한다.

〈보칙〉 학회지의 주 색채는 무지개색의 하나로 하고 매해 바꾼다. 순서는 빨·주·노·초·파·남·보로 한다.

—투고요령—

1. 원고는 해당 편집위원에 3부를 제출한다.
2. 원고의 사용언어는 학회지의 경우 국문, 영문 경영과학지의 경우는 국문으로 함을 원칙으로 한다.
3. 원고는 도표를 포함하여 국문의 경우 200자 원고지에 횡서하여 100매 이내, 또는 16절지 타자지에 타자하여 30매 이내로 한다. 영문의 경우는 21×28cm 타자지 30매 이내로 한다.
4. 연구논문 및 기타 요약(abstract)을 필요로 하는 원고의 경우에는 영문(21×28cm 타자지 1매 이내)으로 요약하여 본문앞에 넣어야 한다.
5. 원고 제 1면에는 국문 및 영문으로 원고제목, 투고자 성명 및 소속을 명시하고, 원고매수와 표 및 그림의 수를 표시한다.
6. 투고자는 자신에 대한 Bibliography 및 현재 연구중이거나 관심있는 연구분야에 대한 자신의 소개를 국문으로 400자 이내로 제출한다(명함사진 1매 동봉).
7. 학술용어는 될 수 있는대로 국문으로 쓰되 번역이 곤란한 경우에 한하여 영문으로 쓸 수 있으며, 번역된 용어의 이해를 위해 영문부서를 붙일수 있다.
   예 : 동적계획(dynamic programming)
8. 인명, 지명 그밖의 고유명사는 그 원어를, 숫자는 아라비아 숫자를 사용한다.
9. 모든 표 및 그림은 백지에 흑색 잉크로 선명하게, 그리고 일련번호와 제목 또는 설명을 붙여야 한다.
10. 각주(footnote)는 어구의 우상단에 일련번호를 붙여 아라비아 숫자로 표시하고, 원고가 끝난 직후의 면부터 작성해야 한다.
11. 필요시 고딕체는 하점선(……)으로, 이탤릭체는 하선(____)으로 각각 명시한다.
12. 수식표현은 인쇄의 편리를 위하여 다음 예에서 왼쪽에 있는 것과 같은 수식표현은 가급적 피하도록 한다.

식		바람직한 표현
$\sum_{i=1}^{\infty} \cdot \prod_{i=1}^{\infty}$	$\longrightarrow$	$\Sigma^{\infty}{}_{i=1} \cdot \Pi^{\infty}{}_{i=1}$
$\frac{\sqrt{a+b}}{c}$	$\longrightarrow$	$(a+b)^{1/2}/c$
$e^{\frac{x^2+y^2}{a}}$	$\longrightarrow$	$\exp\{(x^2+y^2)^a\}$