Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 16, No.2, Dec., 1991

有方向 네트워크에서 階層輸送網 設計 問題에 대한 分枝限界法

沈鉉澤* · 朴淳達**

A Branch and Bound Algorithm for the Hierarchical Transportation Network Design Problem in Directed Networks

Shim Hyun Taik*, Park Son Dal**

Abstract

The purpose of this paper is to present a branch and bound algorithm for the hierarchical transportation network design problem in 2-level directed networks. This problem is to find the least cost of hierarchical transportation networks which consist of a primary path and a secondary path. The primary path is a simple path from a prespecified origin node to a prespecified terminal node. All nodes must be either a transsipment node on the primary path or connected to that path via secondary arcs.

This problem is formulated to a $0-1$ integer programming problem with assignment and illegal subtour elimination equations as constraints. We show that the subproblem relaxing subtour elimination constraints is transformed to a linear programming problem by means of the totally unimodularity. Optimal solutions of this subproblem are polynomially obtained by the assignment algorithm and complementary slackness conditions. Therefore, the optimal value of this subproblem is used as a lower bound.

When an optimal solution of the subproblem has an illegal subtour, a better disjoint rule is adopted as the branching strategy for reducing the number of branched problems. The computational comparison between the least bound rule and the depth first rule for the search strategy is given.

* 韓國國防研究院

** 서울大學校 產業工學科

1. 서 론

본 논문에서는 수송구조물의 계층적 설계를 위한 네트워크 모형을 분석하고 최적해법을 제시하고자 한다. 계층적 수송구조물이란 중앙공급지로부터 중간공급지들을 연결하는 상위경로와 중간공급지로부터 수요지들을 연결하는 하위경로가 구분되고, 이러한 2단계의 경로가 중간공급지에 의해 연계된 것을 말한다. 예를 들면, 고압선과 저압선이 변압기에 의해 연계되는 송전망, 고속도로와 지선도로가 교차로에서 분리되는 도로망 등과 같이 상위경로와 하위경로가 용량에 의해 구분되고 특정한 연계시설에 의해 단계적으로 수송되는 계층적 수송망들을 의미한다.

계층수송망 설계 문제란 최소비용의 계층적 수송구조물을 구하는 문제이며, 호비용이 상위경로에 속하는 경우와 하위경로에 속하는 경우에 대해 두가지로 주어지고 마디에는 특정한 연계시설을 위한 비용이 주어진 네트워크로부터 계층수송망을 찾는다. 본 연구는 이 문제가 해밀토니안 경로의 특성을 가진 것을 보이고 해법 개발에 적합한 수리모형과 배정문제로의 완화를 이용한 분지한계법을 개발한다.

수송체제의 계층적 설계에 대한 연구는 주로 차량경로의 분배시스템의 모형화 및 해법 개발이었다[8, 10, 12]. 이는 분배센타인 설비입지와 차량경로가 결합된 모형으로써 실제적인 차량경로비용을 고려한 설비입지 문제로 다루어진다. 수송구조물도 호의 용량이나 특성에 따라 경로의 단계적 구분이 이루어지는데, 이에 대한 연구는 주로 계층적 접근법으로 다루어졌다.

Steenbrink는 경로의 형태가 단계적 구분이 있는 경우에 각 단계별로 문제를 분해하는 계층적 네트워크 설계 모형을 제시했다[16]. 그러나, 두 경로의 설계에 요구되는 설계비용의 합을 최소화하는 것이 계획자의 목적이기 때문에, 단계적인 모형화는 전체의 최적화를 얻을 수 없다.

Current은 무방향인 계층 네트워크에 대해 처음으로 계층수송망 설계 문제를 모형화하고 발견적 해법을 제시했다[4, 5]. 이 발견적 해법은 다수최단경로기법과 최소비용 극대나무기법을 이용한 것으로써, 주어진 모든 호가 상위호와 하위호를 함께 가진 경우에 대해서만 적용될 수 있다. 그런데, 특정한 마디들은 상위경로에 포함되어야 하는 등의 구조제약이 있는 모형에서는 발견적 해법을 단순하게 적용하여 해를 얻을 수 없다. 그래서, 계층수송망 설계 문제에 대한 수리모형의 특성으로부터 효율적인 최적해법을 제시하고자 한다.

2. 계층수송망 설계 모형

계층수송망 설계 문제는 유방향 네트워크의 호가 적어도 하나의 상위호와 하위호를 가지는 계층 네트워크가 주어질때, 상위경로와 하위경로가 연계설비에 의해 연결된 최소비용의 계층 수송망을 구하는 것이다. 예를 들면, [그림 1]과 같이 출발마디와 종착마디를 가진 유방향 네트워크에서 각 호가 적어도 하나의 상위호비용과 하위호비용을 가지고 상위경로와 하위경로가 연계될 수 있는 마디에 비용이 주어진 것이 계층 네트워크이다.

계층 네트워크에서의 계층수송망이란 주어진 출발마디와 종착마디가 단순경로로 연결되는 상위경로와, 모든 마디들이 상위경로 상의 연계마디들을 원점으로 구축된 부분방향나무들에 포함되는 하위경로가 연계된 계층 네트워크의 부분 네트워크를 말한다. 즉, [그림 2]와 같이 연계마디들은 출발마디로부터 상위경로를 경유하여 연결될 수 있어야 하고, 연계마디가 아닌 모든 마디들은 반드시 상위경로 상에 있는 연계마디로부터 하위경로를 경유하여 연결되어야 한다. 이때, 계층수송망의 비용은 상위경로 및 하위경로에 포함된 각 호의 비용, 그리고 두 경로가 연계되는 마디의 비용을 합한 것이다.

계층수송망 설계 문제의 난이도는 해밀토니안 경로를 이용하여 NP-hard임을 알 수 있으며, 비용과 관계없이 계층수송망을 결정하는 문제는 NP-complete이다[2]. 그래서, 계층수송망 설계 문제의 해법은 수리모형의 특성을 이용한 분지한계법을 적용하고자 한다.

먼저, 출발마디 ①과 종착마디 ⓝ을 가진 마디집합 V={①, ②,⋯, ⓝ}과 이에 속한 마디들의 순서쌍인 유방향호(ⓘ, ⓙ)로 이루어진 호집합 A로 이루어진 계층 네트워크를 G=(V, A)라 하자. 이 계층 네트워크 G=(V, A)에서의 계층수송망 설계 문제에 대한 수리모형은 각 경로에 속할 수 있는 호들을 변수로 표현하여 다음과 같은 0−1정수계획법 문제가 될 수 있다.

문제(P) :

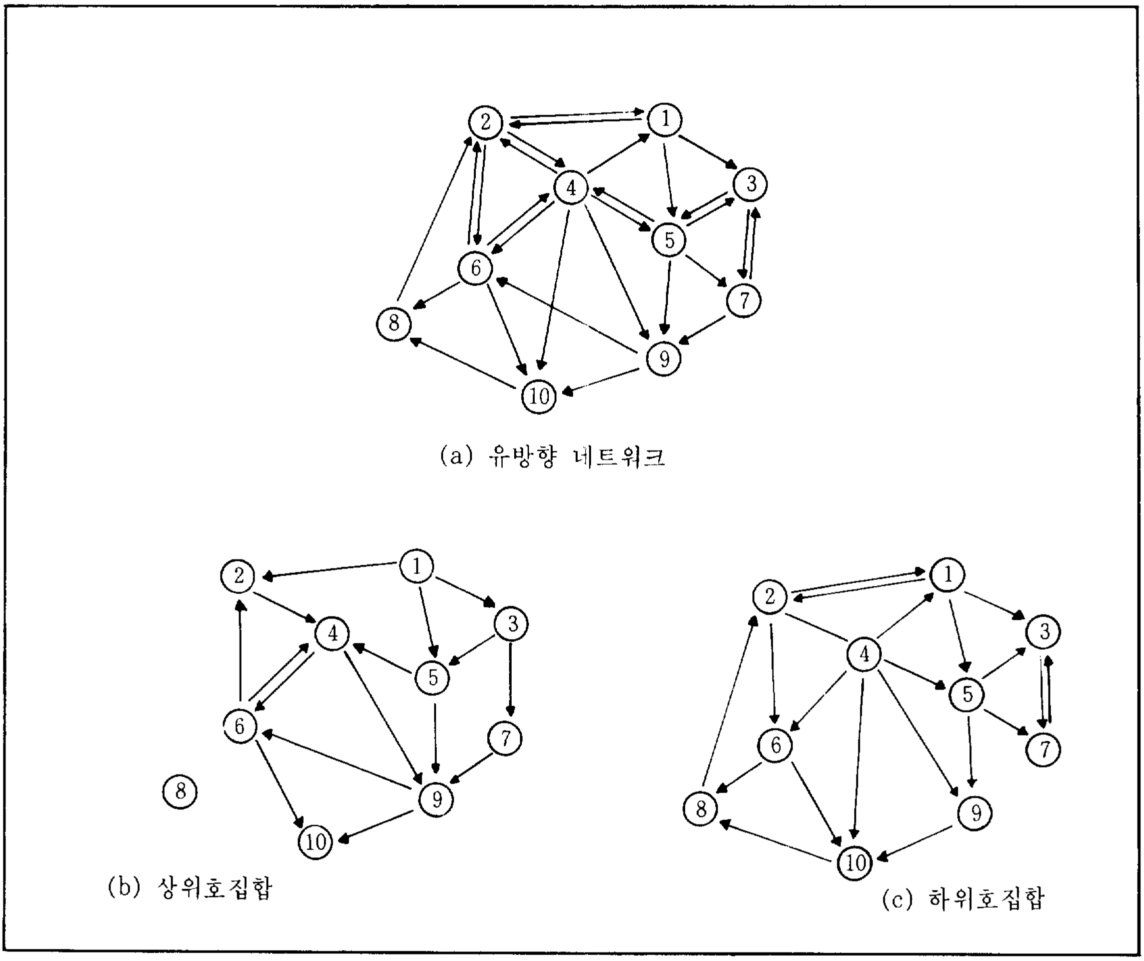
$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j H_{ij} X_{ij} + \sum_i \sum_j L_{ij} Y_{ij} + \sum_j F_j Z_j \qquad (1)$$

$$\text{s. t. } \sum_j X_{1j} = 1 \qquad i = ① \qquad (2)$$

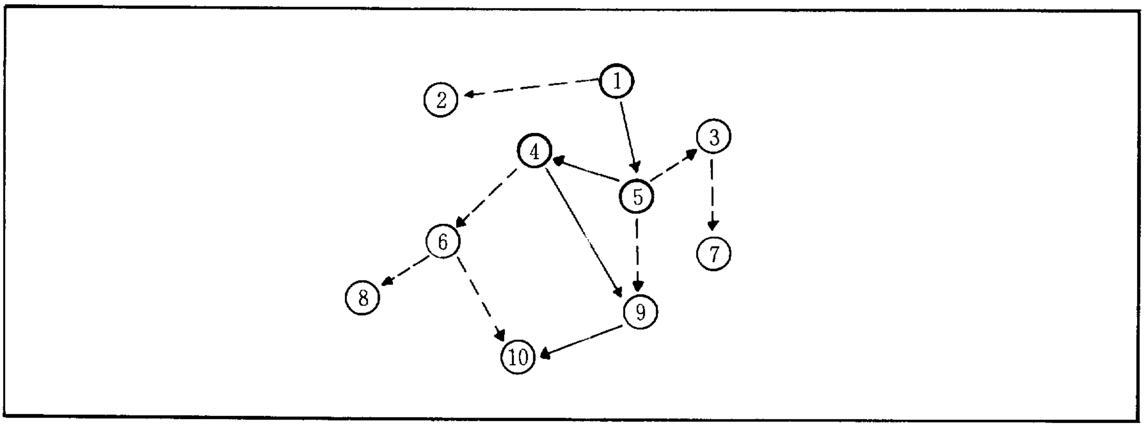
$$\sum_j X_{ij} + X_{ii} = 1 \qquad \forall i \in V \backslash \{①, ⓝ\} \qquad (3)$$

$$\sum_i X_{ij} + X_{jj} = 1 \qquad \forall j \in V \backslash \{①, ⓝ\} \qquad (4)$$

$$\sum_i X_{in} = 1 \qquad j = ⓝ \qquad (5)$$



[그림 1] 계층 네트워크의 예



[그림 2] 계층수송망의 예

$$\sum_i X_{ij}+\sum_i Y_{ij} \geq 1 \qquad \forall j\in V\backslash\{①,ⓝ\} \tag{6}$$

$$\sum_i Y_{ij}+Z_j=1 \qquad \forall j\in V \tag{7}$$

$$X\subseteq S_X \tag{8}$$

$$Y \subseteq S_Y \tag{9}$$

$$X_{ij}, Y_{ij}\in \{0, 1\} \qquad \forall(ⓘ, ⓙ) \in A$$

$$Z_j\in \{0, 1\} \qquad \forall j \in A \tag{10}$$

여기서,

H_{ij} : 호(ⓘ, ⓙ)의 상위호비용

L_{ij} : 호(ⓘ, ⓙ)의 하위호비용

F_j : 마디ⓙ의 연계마디비용

X_{ij} : 호(ⓘ, ⓙ)가 상위경로에 포함되면 1, 아니면 0

Y_{ij} : 호(ⓘ, ⓙ)가 하위경로에 포함되면 1, 아니면 0

Z_j : 마디 ⓙ가 연계마디가 되면 1, 아니면 0

S_X : 상위경로 X의 불법경로를 제거하는 집합

$$S_X=\{X \mid \sum_{i\in W}\sum_{j\in W} X_{ij}\leq \mid W \mid -1, \mid W \mid \geq 2\text{인 모든 } W\subseteq V\}$$

S_Y : 하위경로 Y의 불법경로를 제거하는 집합

$$S_Y=\{Y \mid \sum_{i\in W}\sum_{j\in W} Y_{ij}\leq \mid W \mid -1, \mid W \mid \geq 2\text{인 모든 } W\subseteq V\}$$

즉, 호(ⓘ,ⓙ)가 상위호로 계층수송망에 포함되면 $X_{ij}=1$이고, 하위호로 포함되면 $Y_{ij}=1$이다. 수리모형에서는 모든 호가 상위호와 하위호를 가진 것으로 되어 있지만, 해당하는 호가 없을 경우 그 비용을 ∞로 두면 상관이 없다.

식(1)은 계층수송망의 비용을 최소화하는 목적식이다. 식(2)-(5)는 출발마디①부터 종착마디ⓝ까지의 상위경로를 배정제약으로 표현한 것인데, 어떤 마디ⓙ가 상위경로 상에 포함되지 않으면 $X_{jj}=1$이다[11]. 식(6)은 마디ⓙ가 연계마디가 되면, 반드시 상위경로 상에 있어야 한다는 제약식이다. 식(7)은 모든 마디가 하위호로 연결되던가, 아니면 연계마디가 되어야 한다는 제약식이다. 즉, 모든 마디는 임의로 연계마디로부터 하위경로에 의해 유일한 경로를 가져야 하는데, 이는 0-1정수조건과 함께 연계마디가 원점인 여러 개의 부분방향나무들을 이룬다.

계층수송망을 경로변수로 표현하기 위해서는 외판원 문제와 같이 불법경로 제거식인 식(8)-(9)가 필요하다. 이 문제의 불법경로란 상위경로의 경우 출발마디로부터 연결되지 않으면서 상위호들로 이루어진 환이고, 하위경로의 경우

연계마디로부터 연결되지 않으면서 하위호들로 이루어진 환이다.

계층수송망 설계 문제의 최적해를 얻기 위해서는 0−1정수계획법의 수리모형인 문제(P)를 계산하면 된다. 본 연구는 다루기 어려운 제약식을 완화하는 분지한계법을 적용한 최적해법을 제시하고자 한다. 문제(P)에서 다루기 힘든 제약식은 불법경로 제거식인데, 이 불법경로 제거식을 제외한 식(1)−(7)과 식(10)의 부분문제도 0−1정수계획법 문제가 된다. 그런데, 부분문제의 최적정수해를 쉽게 얻을 수 있어야 효율적인 분지한계법이 될 수 있다.

부분문제의 최적정수해는 정수조건을 제외한 선형계획법 문제로부터 얻을 수 있음을 보장하기 위해서 식(2)−(7)의 계수행렬이 Totally Unimodular임을 증명하도록 한다. 행렬 A가 Totally Unimodular라는 것은 모든 부분 정방행렬의 행렬식이 0, 1, −1일 때이며, 선형계획법 문제의 계수행렬이 Totally Unimodular이면 가해일 경우 반드시 정수최적해가 존재한다[15].

보조정리 1[15] $m \times n$ 행렬 A가 Totally Unimodular일 필요충분조건은 모든 $Q \subseteq R = \{1, \cdots, m\}$에 대해서 다음을 만족하는 Q의 분할인 Q_1과 Q_2가 존재한다.

$$\left| \sum_{i \in Q_1} a_{ij} - \sum_{i \in Q_2} a_{ij} \right| \le 1,\ j = 1, \cdots, n \tag{11}$$

정리 2 문제(P)에서 식(2)−(7)의 계수행렬은 Totally Unimodular이다.

(증명) 식(2)−(7)의 계수행렬을 A, 행의 지수집합을 R이라 하자. 집합 R에 속한 지수들을 식(2)−(3)의 R_1, 식(4)−(5)의 R_2, 식(6)의 R_3, 식(7)의 R_4, 구분하면 집합 R은 다음과 같이 표현된다.

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \text{단, } R_1 &= \{k \mid k = 1,2,3,\cdots,n-1\} \\ R_2 &= \{n+k \mid k = 2,3,\cdots,n-1, n\} \\ R_3 &= \{2n+k \mid k = 2,3,\cdots,n-1\} \\ R_4 &= \{3n+k \mid k = 1,2,3,\cdots,n-1, n\} \end{aligned}$$

그러면, 행렬 A는 0과 1로 구성되어 있고 각 열은 비영인 요소가 한개일때는 1이며, 두개일때는 R_1과 R_2, 또는 R_2와 R_3, 또는 R_3과 R_4에 1이 한개씩 있다. 세개일때는 R_1과 R_2와 R_3에 각각 1이 한개가 있다. 이제, 모든 $Q \subseteq R$에 대해 식(12)를 이용하여 분할인 Q_1과 Q_2를 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{k \mid k \in Q\} \cup \{3n+k \mid 3n+k \in Q\} \\ &\quad \cup \{n+k \in Q \mid 2n+k \in Q\} \\ Q_2 &= \{2n+k \mid 2n+k \in Q\} \\ &\quad \cup \{n+k \in Q \mid 2n+k \notin Q\} \end{aligned}$$

$Q_1 \cup Q_2 = Q$, $Q_1 \cap Q_2 = \phi$이므로 Q_1과 Q_2는 Q

의 분할이다. 여기서, 행렬 A의 각 열에 대해서 Q_1이 속한 행들은 많아야 두개만 비영인 1이고 Q_2에 속한 행들은 많아야 한개만 비영인 1이므로

$$0 \le \sum_{i \in Q_1} a_{ij} \le 2$$

$$0 \le \sum_{i \in Q_2} a_{ij} \le 1$$

가 된다. 따라서, 식(11)을 만족함을 보이기 위해

$$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} - \sum_{i \in Q_2} a_{ij} = 2$$

이 열이 존재하지 않음을 보이는 것으로 충분하다. 이는, 어떤 열 j에 대해서

$$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} = a_{m,j} + a_{n+k,j} = 2$$

$$\sum_{i \in Q_2} a_{ij} = 0$$

인 임의의 $m, n+k \in Q_1$이 존재할 때이다. 즉,

$$a_{m,j} = a_{n+k,j} = 1$$

$$a_{2n+k',j} = 0,\ \forall\ k' = 2,3,\cdots,n-1$$

이 된다. 또한, $n+k$가 Q에 주어질때 $n+k \in Q_1$이 되려면, 분할방식에 의해 $2n+k$도 Q에 주어져야 하고 $2n+k \in Q_2$가 된다. 그런데, 행렬 A의 구성에 의해 $a_{n+k,j}=1$이면, $a_{2n+k,j}=1$이어야 한다. 이는 $a_{2n+k,j}=0$에 모순된다. 그래서, 모든 $Q \subseteq R$에 대해 보조정리 1의 조건을 만족하므로 성립된다.

따라서, 불법경로 재거식이 완화된 부분문제는 정수계획법 문제이지만, 선형계획법 문제로 변화되므로 다항식시간의 최적해법이 존재함을 알 수 있다[2,15].

3. 완화문제의 특성

이제 문제(P)의 완화문제에 대한 다항식시간의 최적해법을 개발하고자 한다. 완화문제는 정리 2에 의해 다음과 같은 선형계획법 문제가 된다.

완화문제(RP):

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j H_{ij} X_{ij} + \sum_i \sum_j L_{ij} Y_{ij} + \sum_j F_j Z_j \tag{13}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j X_{1j} = 1 \qquad i = ① \tag{14}$$

$$\sum_j X_{ij} + X_{ii} = 1 \qquad \forall i \in V \setminus \{①, ⓝ\} \tag{15}$$

$$\sum_i X_{ij} + X_{jj} = 1 \qquad \forall j \in V \setminus \{①, ⓝ\} \tag{16}$$

$$\sum_i X_{in} = 1 \qquad j = ⓝ \tag{17}$$

$$\sum_i X_{ij} + \sum_i Y_{ij} \geq 1 \qquad \forall j \in V \backslash \{①, ⓝ\} \tag{18}$$

$$\sum_i Y_{ij} + Z_j = 1 \quad \forall j \in V \tag{19}$$

$$X_{ij} \geq 0,\ Y_{ij} \geq 0,\ Z_j \geq 0 \tag{20}$$

각 변수는 {0, 1}값을 가지므로 1의 상한이 필요하지만, 식(14)−(17), (19)에 의해 중복되므로 제외한다. 이제, 완화문제에 대한 쌍대문제의 특성을 보도록 한다. 완화문제의 쌍대변수를 식(14)−(15)는 $u_1,\cdots,u_{n-1}$, 식(16)−(17)은 $u_2,\cdots,u_n$, 식(18)은 $\beta_2,\cdots,\beta_{n-1}$, 식(19)는 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$이라고 두자. 완화문제(RP)의 쌍대문제는 다음과 같다.

$$\text{Max } W = \sum_{i=1}^{n-1} u_i + \sum_{j=2}^{n} v_j + \sum_{j=2}^{n-1} \beta_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tag{21}$$

$$\text{s.t. } u_i + v_j \leq H_{ij} \quad i=j \text{ 또는 } j=n \tag{22}$$

$$u_i + v_j + \beta_j \leq H_{ij} \quad i \neq j,\ j \neq n \tag{23}$$

$$\beta_j + \alpha_j \leq L_{ij} \quad \forall j \in V \backslash \{①, ⓝ\} \tag{24}$$

$$\alpha_1 \leq L_{i1} \quad \forall (i,1) \in A \tag{25}$$

$$\alpha_n \leq L_{in} \quad \forall (i,n) \in A \tag{26}$$

$$\alpha_j \leq F_j \quad \forall j \in V \tag{27}$$

$$\beta_j \geq 0$$

$$u_i,\ v_j,\ \alpha_j\text{는 비제약 변수} \tag{28}$$

완화문제는 이분할 네트워크의 마디호행렬을 포함한 수리모형이라서 언제나 쌍대가능이며 쌍대가능해를 쉽게 정의할 수 있다.

정리 3 완화문제는 식(24)−(28)을 만족하는 어떠한 $(\bar{\beta}, \bar{\alpha})$의 값에 대해서도 쌍대가능해 $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{\beta}, \bar{\alpha})$가 존재한다.

(증명) 주어진 쌍대변수값 $(\bar{\beta}, \bar{\alpha})$을 식 (21)−(23)에 대입하면 다음과 같다.

$$\text{Max } W1 = \sum_{i=1}^{n-1} u_i + \sum_{j=2}^{n} v_j + \overline{\overline{W}} \tag{29}$$

$$\text{s.t. } u_i + v_j \leq C_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{30}$$

$$\overline{W} = \sum_{j=1}^{n-1} \overline{\beta}_i + \sum_{j=2}^{n} \overline{\alpha}_i$$

$$C_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & i=j \text{ 또는 } j=n \\ H_{ij} - \overline{\beta}_i & i \neq j,\ j \neq n \end{cases}$$

이때, 식(30)은 변수 U와 V가 비제약이기 때문에 언제나 가능해가 존재한다. 이를 $\overline{U}$ 와 $\overline{V}$ 라 하면 $\overline{u}_i + \overline{v}_j \leq C_{ij} = H_{ij} - \overline{\beta}_i$

이므로, ($\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}$)는 완화문제의 쌍대가능해이다.

식(29)-(30)의 문제는 이분할 네트워크에서의 배정문제에 대한 쌍대문제와 같은 형태이다. 즉, 이 문제는 호비용이 C_{ij}인 $(|V|-1) \times (|V|-1)$의 비용행렬을 가진 배정문제에 대한 선형계획법 모형과 동일하다. 그래서, 이 문제의 최적해 ($\overline{U}$, $\overline{V}$)는 배정기법에 의해 얻은 최적배정 $\overline{X}$와 함께 다음의 상보여유조건을 만족한다[1].

$$\overline{X}_{ij}(=1) > 0\text{이면}, \quad \overline{u}_i + \overline{v}_j = C_{ij} \tag{31}$$

$$\overline{u}_i + \overline{v}_j < C_{ij}\text{이면}, \quad \overline{X}_{ij} = 0 \tag{32}$$

정리 4 각 마디에서 들어오는 하위호의 비용이나 연계마디비용이 적어도 하나는 있다고 할 때, β^*의 값을 다음과 같이 정의하자.

$$\beta^*_j = \text{MAX}\{0,\ L_{i^*j} - F_j\},\ j=2,\cdots,n-1$$

$$\text{단, } L_{i^*j} = \text{MIN}\{\underset{i^*}{\text{MIN}}\ \{L_{ij}\},\ M\}$$

이 β^*_j의 값에 의해 상위호의 비용이 $(H_{ij} - \beta^*_j)$로 수정된 배정문제에서 최적배정 $\overline{X}$가 주어진다고 하자. 이때, 완화문제의 해인(X*,Y,*Z*)를 다음과 같이 두자.

$$X^*_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{호}(①, ⓙ)\text{가 } \overline{X}_{ij} = 1 \text{ 일때} \\ 0, & \text{호}(①, ⓙ)\text{가 } \overline{X}_{ij} = 0 \text{ 일때} \end{cases}$$

Y^*_{ij} = 1, 마디$j \in V \backslash \{①, ⓝ\}$는 $\beta^*_j = 0$이거나 $\overline{X}_{jj} = 1$인 경우,

마디$j \in \{①, ⓝ\}$는 $L_{i^*j} \leq F_j$이고 $L_{ij} = L_{i^*j}$의 값을 가지는 호(i^*, j)인 경우

0, 그 외의 모든 호(i,j)일때

$Z^*_j = 1$, 마디$j \in V \setminus \{①,ⓝ\}$는 $\beta^*_j > 0$이고 $\bar{X}_{ij} = 0$인 경우,

마디$j \in \{①,ⓝ\}$는 $L_{i^*j} > F_j$인 경우,

0, 그 외의 마디일때

이 (X^*,Y^*,Z^*)는 완화문제의 최적해이다.

(증명) 정의한 (X^*,Y^*,Z^*)는 완화문제의 제약식을 만족하는 원가능해임은 자명하다. 주어진 β^*가 쌍대가능해가 되도록 α^*를 다음과 같이 두자.

$$\alpha^*_j = \text{MIN}\{L_{i^*j}, F_j\}, \qquad j = 2, \cdots, n-1 \tag{33}$$

이때, 마디①는 연계마디비용이나 들어오는 하위호의 비용이 적어도 하나가 주어지므로 $\alpha^*_j < \infty$이다. 그러면, 식(24)에서

$$\beta^*_j + \alpha^*_j = \text{MAX}\{0, L_{i^*j} - F_j\} + \text{MIN}\{L_{i^*j}, F_j\}$$

가 되며 다음과 같은 관계가 있다.

$L_{i^*j} - F_j \leq 0$이면, $\beta^*_j + \alpha^*_j = 0 + L_{i^*j} \leq L_{ij}$ $\quad \forall i \in V$

$L_{i^*j} - F_j > 0$이면, $\beta^*_j + \alpha^*_j = L_{i^*j} - F_j + F_j \leq L_{ij}$ $\quad \forall i \in V$

이므로 주어진 β^*와 식(33)의 α^*은 식(24)-(28)을 만족한다. 또한, 식(29)-(30)의 문제로 변환되어 호비용$(H_{ij}-\beta^*_j)$의 비용행렬을 가진 배정문제의 최적해에서 얻은 (U^*, V^*)와 함께 $(U^*,V^*,\beta^*,\alpha^*)$는 완화문제의 쌍대가능해이다.

이제 원가능해 (X^*,Y^*,Z^*)와 쌍대가능해 $(U^*,V^*,\beta^*,\alpha^*)$가 다음과 같은 상보여유조건을 만족함을 보인다.

$X^*_{ij} > 0$일때, $\quad u^*_i+v^*_j+\beta^*_j = H_{ij}$ $\quad$ (34)

$u^*_i+v^*_j+\beta^*_j < H_{ij}$ 일때, $\quad X^*_{ij} = 0$ $\quad$ (35)

$Y^*_{ij} > 0$일때, $\quad \beta^*_j+\alpha^*_j = L_{ij}$ $\quad$ (36)

$\beta^*_j+\alpha^*_j < L_{ij}$ 일때, $\quad Y^*_{ij} = 0$ $\quad$ (37)

$Z^*_j > 0$ 일때, $\quad \alpha^*_j = F_j$ $\quad$ (38)

$\alpha^*_j < F_j$ 일때, $\quad Z^*_j = 0$ $\quad$ (39)

$\sum_i X^*_{ij} + \sum_i Y^*_{ij} > 1$일때, $\quad \beta^*_j = 0$ $\quad$ (40)

$\beta^*_j > 0$ 일때, $\quad \sum_i X^*_{ij} + \sum_i Y^*_{ij} = 1 \qquad (41)$

위의 상보여유조건에서는 식(19)의 ⓙ∈{①, ⓝ}에 대한 원제약식과 식(25)-(27)의 쌍대제약식의 조건이 구분되어 있지 않은데, 이는 식(36)-(39)에서 β^*_j가 제외된 것과 같으므로 상관이 없다. 식(34)-(35)는 식(31)-(32)에 의해 만족된다.

Y^*_{ij}는 마디ⓙ로 들어오는 호 중에서 $\beta^*_j+\alpha^*_j=L_{*j}$를 가지는 하나의 호(i*,j)에만 1의 값을 둔 것이므로 식(36)-(37)이 만족된다. $Z^*_j=1$이면 $\beta^*_j>0$일때이므로 식(33)에서 $\alpha^*_j=F_j$가 된다. 그래서, 식(38)-(39)가 만족되며 식(40)-(41)도 자명하다. 따라서, (X*,Y*,Z*)는 완화문제의 최적해이다.

그래서, 완화문제의 최적해는 배정문제로 변환하여 얻을 수 있으며, 그 계산절차는 다음과 같다.

완화문제의 계산절차

단계 1. 하위경로의 계산

각 마디ⓙ에서 L_{ij}의 최소값을 L_j라 하고, 그 호를(i*,j)로 둔다. L_{ij}가 없으면 $L_j=M$로 둔다. 이때, $L_j=F_j=M$인 마디가 있으면 비가해로 끝내고, 아니면 다음과 같이 β^*_j의 값을 계산한다.

$L_j=M$인 경우 : $\quad \beta^*_j=F_j$

$L_j<M$인 경우 : $L_j>F_j$이면, $\quad \beta^*_j=L_j-F_j$

$L_j\le F_j$이면, $\quad \beta^*_j=0$

단계 2. 상위경로의 계산

상위호에 대해 비용 C_{ij}를 다음과 같이 두고 최적배정 $\overline{X}$를 구한다.

$L_j=M$인 경우 $C_{ij}=H_{ij},\ i\neq j$

$\qquad\qquad\qquad M,\ i\neq j$

$L_j<M$인 경우 $\quad C_{ij}=H_{ij}-\beta^*_j,\ j=2,\cdots,n-1$

$\qquad\qquad\qquad H_{in},\quad j=n$

최적배정 $\overline{X}$가 없으면 비가해로 끝낸다.

단계 3. 최적해의 출력

상위호에 대해 $X^*_{ij}=\overline{X}_{ij}$로 둔다. $\overline{X}_{ii}=1$은 제외한다.

$\bar{X}_{ii}=0$이고 $\beta^*_i>0$일때만 $Z^*_i=1$이고, 다른 마디는 0이다.

$Z^*_i \neq 1$이면, $Y^*_{i\cdot i}=1$이고 다른 하위호는 0이다.

최적값은 각 변수의 값이 1인 비용의 합이다.

정리 5 완화문제의 계산절차는 계산복잡도가 $O(|V|^3)$이다.

(증명) 단계 1에서 L_{ii}의 최소값 계산은 각 호를 한번씩 비교하면 되므로 $|A|$의 계산이 요구된다. 단계 2에서 비용수정은 $O(|V|^2)$의 계산, 최적배정은 헝가리안기법에 의해 $O(|V|^3)$만에 계산된다. 단계 3의 출력에는 $O(|A|)$의 계산이 걸린다. 따라서, 이 계산절차는 $O(|V|^3)$의 계산복잡도를 가진다.

4. 분지한계법 절차

완화문제로부터 얻어진 최적해가 불법경로를 포함한다면, 해당하는 불법경로 제거식에 포함된 유방향호들을 분지하여 후보문제들을 만들면서 최적해를 찾는다. 즉, 분지의 절차는 기본적으로 불법경로에 속하는 마디의 수만큼의 후보문제를 만들어서 문제목록에 등록한다. 이 방법은 분지된 부문제의 하한을 효율적으로 구할 수 있는 경우에 주로 이용된다. 예를 들면, 유방향 네트워크에서의 외판원 문제에 대한 배정완화의 분지한계법도 불법경로의 분지방법을 적용한다. 불법경로의 분지전략으로는 단순분지, 분할분지, 개선분지 등이 있다.

단순분지는 불법경로에 속한 호들을 통과하지 못하도록 호의 변수값을 각각 0으로 두는 것인데, 분지된 부문제들의 해집합이 상호배타적이지 않기 때문에 비효율적인 방법이다. 그래서, 후보문제를 상호배타적인 해집합을 갖도록 하는 분할분지를 적용해야 한다. 불법경로의 분할분지에는 불법경로에 속한 변수를 분지하는 단순분할분지와 불법경로 이외의 변수를 분지하는 개선분할분지의 방법이 있다.

단순분할분지는 후보문제의 해집합이 중복될 수 있는 단순분지의 단점을 제거한 것이고, 개선분할분지는 불법경로에 속하지 않은 마디로부터 불법경로에 속한 마디로 들어오는 호 중에 적오도 한개의 호는 값을 가져야 한다는 개념에서 만들어진 것이다. 개선분지 방법은 단순분지 방법에 비해서 불법경로에 속한 마디들 간의 다른 불법경로가 발생될 가능성을 제거하므로 분지전략으로 사용하도록 한다.

이제 계층수송망 설계 문제의 분지한계법 계산절차를 제시한다. 분지한계법에서 사용되는 용어는 다음과 같다.

Pk : 후보문제 k

RPk : Pk의 완화문제

Zk : RPk의 최적값

LBk : Pk의 하한

Sk : Pk에서 선택된 불법경로

분지한계법 계산절차

단계 1. 초기화

$UB=\infty$; $k=0$

단계 2. 초기 문제의 계산

불법경로를 완화한 문제의 최적해를 구한다.

(1) $Z_0=\infty$이면 비가해이며 계층수송망이 없다. 끝.

(2) 불법경로가 없는 가능해이면 최적해이다. 끝.

총비용 : $Z^*=Z_0$

(3) 불법경로가 있는 가능해이면 단계 3으로 간다.

단계 3. 불법경로의 선택

RPk의 최적해에 포함된 불법경로 중에서 포함된 마디의 수가 최소인 불법경로 우선, 하위경로의 불법경로 우선의 순서로 선택하고 선택된 불법경로를 다음과 같이 두자.

$Sk : i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdot \cdot \rightarrow i_{m-1} \rightarrow i_m \rightarrow i_1$

단계 4. 불법경로의 분지

마디집합 V를 S_k에 의해 V_{Sk}와 V_{NSk}로 나누고 개선분할분지를 한다.

$V_{Sk} = \{i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}, i_m\}$, $V_{NSk} = V - V_{Sk}$

(1) 하위경로의 경우

$P_{k1} : L_{j,i1} = \infty \ j \in V_{Sk}$

$P_{k2} : L_{j,i1} = \infty \ j \in V_{NSk}$

$L_{j,i2} = \infty \ j \in V_{Sk}$

$\vdots$

$P_{km} : L_{j,i1} = \infty \ j \in V_{NSk}$

$L_{j,i2} = \infty \ j \in V_{NSk}$

$\vdots$

$L_{j,im-1} = \infty \ j \in V_{NSk}$

$L_{j,im} = \infty \ j \in V_{Sk}$

(2) 상위경로의 경우

하위경로의 방법에서 L_{ij} 대신 H_{ij}를 사용한다.

단계 5. 분지문제의 하한 계산

분지문제들에 대해 $RP_{k1}, RP_{k2}, \cdots, RP_{km}$의 최적값을 **완화문제의 계산절차**로 구한다.

(1) $Z_{ki}=\infty$이면, 비가해이므로 분지끝.

(2) $Z_{ki} \geq UB$이면, P_{ki}는 분지끝.

단계 6. 분지문제의 등록

$Z_{ki} < UB$이면 RP_{ki}의 최적해를 구한다.

(1) 불법경로가 없으면, 부문제의 가능해이므로 분지끝.

$UB=Z_{ki}$로 수정하고 이 계층수송망을 보관한다.

(2) 불법경로가 있으면, $LB_{ki}=Z_{ki}$로 두고 문제목록에 등록한다.

단계 7. 탐색

(1) 문제목록의 정리

$LB_k \geq UB$인 모든 후보문제는 분지끝.

(2) 문제목록이 비었으면 끝.

1) $UB=\infty$이면, 비가해이다.

2) $UB<\infty$이면, $Z^*=UB$가 최적해이다.

(3) 문제목록에서 최선하한 우선, 깊이 우선의 순서로 문제를 선택한다.

(4) 선택된 후보문제를 P_k로 두고 단계 3으로 간다.

단계 3에서 발생된 불법경로는 상위경로와 하위경로에서 여러 개가 발생될 수 있다. 마디의 수가 적은 불법경로를 우선한 기준은 생성되는 후보문제의 수를 줄이려는 것이다. 하위경로의 불법경로를 우선한 기준은 하위호비용이 상위호비용보다 대부분 적기 때문에 낮은 하한을 얻으려는 것이다.

단계 7의 탐색전략은 되도록 적은 상한값을 얻기 위해서 제일 작은 하한을 가진 후보문제를 먼저 선택하도록 하였다. 그러나, 최선하한탐색은 문제선택을 위한 수행시간이 깊이우선탐색보다 많이 요구되는 단점이 있다.

분지한계법의 수행시간에 대한 전산실험의 결과는 [표1]과 같다. 프로그램코드는 FORTRAN으로 작성하고, Microsoft사의 PC용 Fortran 4.0으로 컴파일하여 IBM PC/AT-286에서 실험하였다. 배정문제의 헝가리안 기법은 기존 프로그램을 사용하고[7], 최선하한 우선과 깊이 우선의 탐색전략을 비교하기 위해 두가지를 별도로 작성하였다. Klingman등[9]이 제시한 NETGEN을 이용하여 300개의 문제를 만들어 실험했지만, 두가지의 탐색전략에 대해 대부분의 문제가 수행시간이 같았으며 차이가 있는 일부의 결과만 제시했다. 최선하한 우선 기준이 깊이우선 기준에 비해 나쁘지 않은 수행시간을 주고 있으며, 하한을 배정기법으로 얻기 때문에 분지문제의 수가 많아도 만족할 만한 시간 내에 최적해를 얻을 수 있었다.

[표 1] 분지한계법 절차의 전산실험 결과

마디수	호 수	계산시간(단위 : 초)		분지된 문제의 수	
		최선하한	깊이우선	최선하한	깊이우선
20	90	176.05	163.34	572	529
20	90	154.67	142.75	359	332
20	90	15.71	134.73	54	510
20	90	5.44	16.26	43	87
20	110	84.86	79.92	207	195
20	110	23.23	55.36	77	182
20	110	46.25	76.02	194	321
20	130	22.52	22.57	67	67
20	150	142.91	395.63	308	849
20	150	43.28	95.02	109	235
20	150	34.38	26.48	133	102
30	90	64.53	104.47	80	134
30	90	331.86	282.10	442	377
30	110	435.39	334.28	464	351
30	150	52.34	44.54	108	93
40	90	280.61	281.39	112	112
40	100	1567.95	1524.73	900	872
40	100	666.20	713.70	340	361
40	110	1249.99	1417.08	425	483

5. 결 론

본 논문은 2단계의 비용을 가진 계층 네트워크에서의 계층수송망 설계 문제에 대해 0-1정수계획법의 수리모형을 이용하여 최적해법을 개발하였다. 본 연구의 모형은 상위경로와 하위경로에 대한 구조제약이 포함될 수 있으며, 모든 호가 상위호비용과 하위호비용을 가지지 않아도 된다. 계층수송망 설계 문제의 수리모형은 계층경로에 대한 선형제약식과 불법경로 제거식이 포함된 0-1정수계획법 문제가 된다. 본 연구에서는 선형제약식의 계수행렬이 Totally Unimodular임을 증명함으로써, 불법경로 제거식이 완화된 문제는 선형계획법 문제가 됨을 보였다.

완화문제의 최적해는 원쌍대단체법에 의해 다항식시간인 배정기법으로 구해질 수 있음을 제

시했다. 즉, 부문제의 하한은 배정기법을 이용하여 얻은 완화문제의 쌍대최적값으로 둘 수 있고, 완화문제의 최적해는 상보여유조건에 의해 쌍대최적해로부터 쉽게 얻을 수 있다. 분지전략은 분지문제의 수를 줄이기 위해 최소의 마디수를 가진 불법경로를 선정하여 개선분할분지를 사용하였다. 탐색전략은 전산실험에 의해서 최선하한 우선 기준이 적절함을 보였다.

본 연구의 해법은 예산제약이나 용량제약이 포함된 모형들에 대한 해법연구에 기여될 수 있다. 즉, 예산제약은 라그랑지안 완화로 다루고 용량제약은 불법경로제거식에 포함시킨 모형을 만들면, 본 연구의 완화문제 특성을 적용할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, 선형계획법 및 그 관련분야(전정판), 대영사, 1987.

[2] 심현택, 계층수송망 문제의 최적해법에 관한 연구, 서울대학교 박사학위논문, 1991.

[3] Carpaneto, G. and Toth, P., "Some New Branching and Bounding Criteria for the Asymmetric Traveling Salesman Problem," *Management Science* 26, 736–743, 1980.

[4] Current, J.R., ReVelle, C.S. and Cohon, J.L., "The Hierarchical Network Design Problem," *European Journal of O.R.* 27, 57–66, 1986.

[5] Current, J.R., "The Design of a Hierarchical Transportation Network with Transshipment Facilities," *Transportation Science* 22, 270–277, 1988.

[6] Garey, M.R. and Johnson, D.R., *Computers and Intractability : A Guide to the NP-Completeness*, Freeman and Company, 1979.

[7] Gillett, B.E., *Introduction to Operations Research : A Computer Oriented Algorithmic Approach*, McGraw-Hill, 1976.

[8] Jacobsen, S.K. and Madsen, O.B.G., "A Comparative Study of Heuristics for a Two-Level Routing-Location Problem," *European Journal of O.R.* 5, 378–487, 1980.

[9] Klingman, D., Napier, A. and Stutz, J., "NETGEN : A Program for Generating Large Scale Capacitated Assignment, Transpotation and Minimum Cost Flow Network Problems," *Management Science* 20, 814–821, 1974.

[10] Laporte, G., Nobert, Y. and Taillefer, S., "Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems," *Transportation Science* 22, 161–172, 1988.

[11] Lawler, E.L., *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[12]Madsen, O.B.G., "Methods for Solving Combined Two Level Location Routing Problems of Realistic Dimensions," *European Journal of O.R.* 12, 295-301, 1983.

[13]Magnanti, T.L. and Wong, R.T., "Network Design and Transportation Planning : Models and Algorithms," *Transportation Science* 18, 1-55, 1984.

[14]Minoux, M., "Network Synthesis and Optimum Network Design Problems : Models, Solution Methods and Applications", *Network* 19, 313-360, 1989.

[15]Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A., *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, 1988.

[16]Steenbrink, P.A., *Optimization of Transportation Networks*, John Wiley & Sons, 1974.