Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 16, No.2, Dec., 1991

제어운영 정책하에 있는 집단으로 도착하는 서어버 휴가모형의 안정상태확률

이효성*+

(Steady State Probabilities for the Server Vacation Model with Group Arrivals and under Control-operating Policy)

Hyo-Seong Lee*+

Abstract

In this study, an efficient algorithm is developed to compute steady state probabilities for the following $M^X/G/1$ server vacation system under control-operating policy:

At the end of a busy period, the server takes a sequence of vacations, each for a random amount of time. At the end of each vacation, he inspects the length of the queue. If the queue length at this time is equal to or greater than a prespecified threshold value r, he begins to serve the queue until it is empty.

1. 서 론

대기행렬 이론은 통신 시스템, 제조 시스템, 교통 및 일반 서비스 시스템을 모형화하는 유용한 수학적 도구이다. 대기행렬 시스템을 경제적으로 운용하기 위해서는 대기행렬 시스템의 최적설계 및 제어가 필요하며, 이에 대해서는 Grabill, Gross, Magazine(9)과 Teghem(16)등의 서베이논문에 잘 요약되어 있다. 특히 최근 들어서는 서어버 휴가(server vacation)모형에서의 연구성과(6,7,15등 참조)를 대기행렬 시스템의 제어정책에 적용시킴으로써(10,11등)이 분야에 대한 급속한 연구의 발전이 이루어졌다. 최근 Lee와 Srinivasan(11)은 고객의 도착이 집단(group)으로 발생하는 서어버 휴가 시스템의 최

* 경희대학교 산업공학과

+ 본 논문은 1990년도 한국과학재단 기초 연구비에 의해 연구되었음

적 제어정책을 개발하였다. 이들에 의해 개발된 모형은 서어버의 휴가와 고객의 집단도착이 모두 고려된 제어모형이라는 점에서 기존의 연구를 포괄하는 일반적인 모형으로 평가되어진다. 이들의 연구에서는 특정한 제어정책이 주어졌을 때 임의의 고객이 대기행렬 내에서 지체하는 기대대기시간에 대한 식을 닫힌 형태(closed form)로 표시하였으며, 이를 이용하여 선형비용 구조하에서 대기행렬 시스템을 경제적으로 운용할 수 있는 최적 제어정책을 구하는 알고리듬을 개발하였다. 그러나 이 연구에서는 대기행렬 시스템에서의 가장 기본적인 수행도 평가치인 안정상태확률(steady state probability)을 구하는 방법은 제시되지 못하였다. 따라서 본 연구에서는 Lee와 Srinivasan이 제안한 제어모형에서 특정한 제어정책이 주어졌을 경우 고객의 수에 대한 안정상태확률을 구하는 효율적인 알고리듬을 개발하고자 함이 목적이다. 본 연구에서 분석하고자 하는 대기행렬 시스템은 다음과 같은 제어정책 하에서 운용된다.

서비스를 받기 위한 고객은 Poisson과정에 의해 용량이 무한한 대기행렬 시스템에 집단으로 도착하며(compound Poisson process), 서비스는 한 명의 서어버에 의해 선입선출방식(FIFO)에 따라 개인별로 이루어진다. 서비스가 끝나 대기행렬 시스템에 더 이상 고객이 존재하지 않으면, 서어버는 V시간 동안 휴가를 떠난다. V는 확률변수(random variable)로서 일반분포(general distribution)를 따른다고 가정하며, 휴가기간 중 서어버는 한 번 수행하는데 V만큼의 시간이 소요되는 또 다른 일(secondary work)을 한다고 해석되어질 수도 있다. V시간 후에 서어버가 휴가에서 돌아오면, 대기행렬 시스템에서 대기중인 고객의 총수가 한계치 r의 값을 넘어섰는지 조사한다. 만일 대기중인 고객의 수가 r미만이면 서어버는 또다시 V시간을 요하는 휴가를 떠나게 되고, 대기중인 고객의 수가 r이상이면 서어버는 즉시 서비스를 시작하게 된다. 서비스가 일단 시작되면 서어버는 대기 시스템에 고객이 존재하지 않을때까지 서비스를 계속하며(exhaustive service discipline), 고객 한명을 서비스하는데 걸리는 시간은 일반분포(general distribution)를 따른다고 가정한다. 따라서 본 모형은 대기중인 고객의 수가 r을 초과할 때까지 서어버의 휴가가 반복되는 다중서어버 휴가(multiple server vacation)모형으로 이해될 수 있다(그림 1 참조).

위 모형에서 r=1의 값을 갖게 되면 제어가 존재하지 않는 일반적인 $M^X/G/1$ 서어버 휴가모형으로 귀착된다. 일반적으로 제어가 존재하지 않는 M/G/1 혹은 $M^X/G/1$ 서어버 휴가모형은 Fuhrmann과 Cooper(7)등에 의해 증명된 서어버 휴가모형의 분해성질(decomposition property)을 이용하면 안정상태 하에서의 고객수에 대한 확률발생함수(probability generating function)를 구할 수 있다. 그러나 확률발생함수의 역변환(inverse transform)을 통하여 고객수에 대한 안정상태확률을 구하기는 극히 힘들며 많은 계산과정을 요구한다. 따라서 확률발생함수의 역변환을 통하지 않고 안정상태확률을 구하

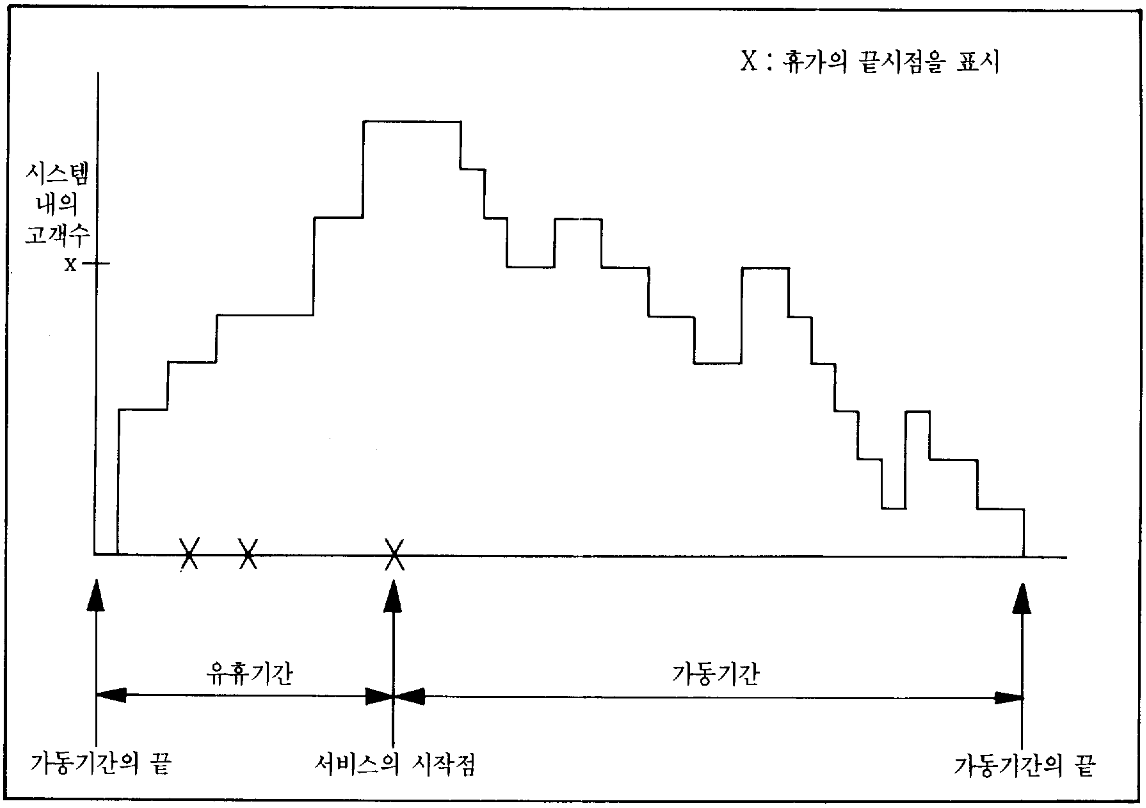

그림 1 한계치를 이용한 제어정책하에 있는 다중서어버 휴가모형

는 효율적인 알고리듬의 개발이 요구된다. 이와 관련해서는 시스템의 용량이 무한하고 제어와 서어버의 휴가가 존재하지 않는다는 가정하에서 M/G/1 혹은 $M^X/G/1$ 대기행렬 시스템의 안정상태확률을 구하는 연구가 재생과정정리(regenerative process theorem)을 이용하여 행하여졌다(8, 17등). 최근에는 서비스 시간이 phase-type 분포를 따른다는 가정하에서 안정상태확률을 구하는 효율적인 알고리듬이 Altiok에 의해 소개되었다(1). 용량이 유한한 경우에 대해서는 집단의 크기가 기하분포를 따를 경우의 $M^X/D/1$ 모형의 안정상태확률이 Chu(4)에 의해 연구되었으며 보다 일반적인 $M^X/G/1$ 모형의 안정상태확률을 구하는 알고리듬이 Van Hoorn(18)과 Chu외(5), Baba(3)등에 의하여 개발되었다. 그러나 본 연구에서와 같이 제어와 서어버의 휴가가 모두 존재하고 서비스 시간이 일반분포를 따르며 고객이 집단으로 도착하는 경우에 대해서의 안정상태확률 계산은 아직까지 연구가 수행되지 않은 것으로 보인다. 특히 본 연구에서는 r이 특정한 값으로 주어졌을 경우의 안정상태확률을 r=1일 경우의 식으로 표시해 주기 때문에 어떠한 제어정책 하에서의 안정상태확률도 제어가 존재하지 않는(r=1)$M^X/G/1$ 서어버 휴가모형의 안정상태확률로 부터 계산가능하다. 따라서 본 연구에서는 우선 제어가 존재하는 대기행

렬 시스템의 안정상태확률을 제어가 존재하지 않는($r=1$)시스템의 안정상태확률의 식으로 표시해 준후 제어가 존재하지 않는 시스템의 안정상태확률을 역변환을 통하지 않고 손쉽게 구할 수 있는 계산과정을 개발한다.

2. 기호정의 및 접근방법

2.1 기호정의

기호의 편의상 임의의 연속확률변수 C에 대하여 $C(\cdot)$은 확률변수 C의 누적분포함수(c.d.f)를 나타낸다고 정의한다. 기타 본 논문에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

$\lambda \equiv$ 집단(guoup)의 도착률,

$X \equiv$ 한 집단내의 고객수, r.v.,

$x_j \equiv Pr\{X=j\}$,

$V \equiv$ 휴가기간의 길이, r.v.,

$U \equiv$ 고객 한명을 서비스하는데 소요되는 서비스시간, r.v.,

$L_i(r) \equiv$ 제어변수의 값이 r인 경우 한 사이클중 시스템이 상태 i에 있을 기대시간,

$L(r) \equiv$ 제어변수의 값이 r인 경우 한 사이클의 기대길이,

$P_i(r) \equiv$ 제어변수의 값이 r인 경우 시스템의 상태가 i일 안정상태확률,

$a_j \equiv$ 휴가기간 V동안 도착한 집단의 수가 j일 확률,

$b_j \equiv$ 휴가기간 V동안 도착한 고객의 수가 j일 확률,

$g_j \equiv$ 서비스시간 U동안 도착한 집단의 수가 j일 확률,

$h_j \equiv$ 서비스시간 U동안 도착한 고객의 수가 j일 확률,

$\pi_{ij} \equiv P\{X_1+X_2+\cdots+X_i=j\}$.

시스템이 안정상태에 도달하기 위한 조건은 $\rho = \lambda E(X)E(U) < 1$이며, 본 연구에서는 이 조건이 충족된다고 가정한다.

2.2 접근방법

본 연구에서는 대기행렬 시스템에서의 고객수에 대한 안정상태확률들을 대기행렬 시스템에 내재하는 재생과정(regenerative process)을 이용하여 구하고자 한다. 즉 Poisson과정의 기억부재성질(memoryless property)에 의하여 서어버가 막 서비스를 끝낸 시점은 매번 확률적으로 동일한 조건을 갖는 재생점(regeneration point)이 된다. 따라서 재생사이클(regeneration cycle)은 서어버의 유휴기간(idle period)이 시작되는 시점(epoch)에서 부터 서어버의 다음 유휴기간이 시작되는 시점까지로 정의될 수 있다. 시스템에 존재하는 고객의 수가 i일 경우에 시스템의 상태를 i라 정의하면, 재생과정에서의 정리(Ross (13), pp.95)에 의해 제어변수의 값이 r로 주어졌을때 시스템의 상태가 i일(고객의 수가 i일)안정상태확률은 다음식으로 부터 구해진다.

$$P_i(r) = \frac{\text{한 사이클동안 시스템이 상태 i에 있는 기대시간}}{\text{한 사이클의 기대길이}} = \frac{L_i(r)}{L(r)} \qquad (2.1)$$

따라서 본 문제는 주어진 r의 값에 대해 사이

클의 기대길이 L(r)과 한 사이클동안 시스템의 상태가 i인 기대시간 $L_i(r)$을 구하는 문제로 귀착된다. 이러한 값들은 순환식으로 표시되며, 따라서 본 연구는 이러한 값들을 구하기 위한 효율적인 순환식을 개발하는 것이 목적이라 할 수 있다. 이들 순환식을 유도하기 위해서는 기본적으로 a_i, b_i, g_i, h_i의 값이 필요하며 이들 값은 다음과 같이 구해진다.

정의로 부터 a_i, g_i는 각각 다음과 같이 표시된다.

$$a_i = \int_0^\infty \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} e^{-\lambda t} dV(t),\ g_i = \int_0^\infty \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} e^{-\lambda t} dU(t). \quad (2.2)$$

이들 값은 식(2.2)로 부터 수치해석적방법(numerical method)으로 직접 구해질 수도 있으나 대부분의 중요한 분포들에 대해 닫힌 형태(closed form)로 표시가능하다(Neut(12), Srinivasan과 Lee(14), Tijms(17)등 참조). 일단 a_i, g_i값들이 구해지면 b_i, h_i의 값은 다음과 같이 계산된다.

$$b_i = \sum_{i=0}^{j} a_i\pi_{ji},\ h_j = \sum_{i=0}^{j} g_i\pi_{ji},\ j \ge 0. \quad (2.3)$$

여기서 π_{ji}의 값은 다음의 순환식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\pi_{ji} = \sum_{k=1}^{j-i+1} x_k \pi_{j-k,\ i-1}. \quad (2.4)$$

휴가기간 V동안 고객이 도착했다는 조건하에서 V동안 발생한 총수요가 j일 확률을 b_i라 정의하면 b_i는 다음과 같이 표시된다.

$$b_i = \frac{b_i}{1-b_0} \text{for } j \ge 1. \quad (2.5)$$

이제 위에서 구한 값들을 기초로 $L_i(r)$과 L(r)등을 구할 수 있으며 이들을 구하는 과정이 다음에 설명된다.

3. 안정상태확률 계산

3.1 $L_i(r)$의 계산

우선 r이 제어변수 값으로 사용될 경우 한 사이클동안 시스템의 상태가 i일 기대시간 $L_i(r)$의 값을 구하는 순환식을 유도해 보도록 한다. 이를 위해 서어버의 첫번째 휴가기간중 시스템의 상태가 i일 기대시간을 E_i라 정의한다. 또한 고객의 수가 j인 상태에서 가동기간(busy period)이 시작될 경우 가동기간중 시스템의 상태가 i일 기대시간을 T_{ji}로 정의한다($T_{0i}=0$로 정의한다). j>i의 경우에는 가동기간이 시작되는 시점으로부터 대기행렬 시스템에 있는 고객의 수가 최초로 i에 도달하는 시점까지는 고객의 수가 항상 i를 초과하므로 시스템의 상태가 i가 될수 없으며 따라서 이 경우 T_{ji}는 곧 T_{ii}와 같게 된다. j≤i의 경우에는 다음과 같이 j개의 소기간(subperiod)으로 나누어 생각한다. k(k≤j)번째 소기간은 고객의 수가 j+1−k에 도달한 시점으로부터 고객의 수가 최초로 j−k에 도달한 시점

까지로 정의되며 이 기간의 길이는 고객의 수가 1명으로 시작한 가동기간의 길이와 동일하다. 또한 k번째 소기간중 시스템의 상태가 i일 기대시간은 $T_{1,\ i-j+k}$와 같음을 쉽게 확인할 수 있다. 이상의 사실로부터 T_{ji}는 다음 식으로 표시된다.

$$T_{ji} = \sum_{k=i-j+1}^{i} T_{1k},\ 1 \le j \le i,$$

$$T_{ji} = T_{ii} = \sum_{k=1}^{i} T_{1k},\ j > i \ge 1. \qquad (3.1)$$

이제 E_i, T_{ji}의 정의로부터 다음 보조정리에서 볼 수 있듯이 $L_i(r)$은 제어가 없는 경우(r=1)의 식, 즉 $L_k(1)$만의 식으로 표시가능해 진다.

보조정리 3.1

$$L_i(r) = \sum_{j=0}^{i} \beta_j L_{i-j}(1),\ i < r,$$

$$\sum_{j=0}^{r-1} \beta_j L_{i-j}(1),\ i \ge r. \qquad (3.2)$$

여기서 β_j는 다음과 같이 정의된다.

$$\beta_j = 1 \qquad j=0,$$

$$\sum_{i=1}^{j} b_i \beta_{j-i},\ j>0. \qquad (3.3)$$

$(0 \le \beta_j \le \beta_0 = 1,\ j>0$임을 유의할 것)

(증명)

i) $i<r$의 경우

제어변수 r의 값에 관계없이 서어버는 항상 첫번째 휴가를 갖게 된다. 첫번째 휴가기간중 고객의 수가 i인 기대시간은 E_i이다. 첫 휴가기간중 고객이 j명 올 확률은 b_j로 표시된다. 만일 $j \ge i+1$이면 첫번째 휴가가 끝난 시점에서 고객의 수는 i를 초과하게 되므로 이 시점으로부터 가동기간중 최초로 고객의 수가 i에 도달하는 시점까지는 시스템의 상태가 i가 될 수 없다. 이 시점이후 고객의 수가 i인 기대시간은 T_{ii}로 표시된다. 반면에 $j \le i$이면 첫번째 휴가가 끝난 시점에서의 고객수 j는 i이하가 된다. 이 경우 첫번째 휴가가 끝난 시점으로부터 가동기간중 최초로 고객의 수가 j로 복귀되는 시점까지의 기간중 고객의 수가 i인 기대시간은 $L_{i-j}(r-j)$와 같으며 이 기간 이후에 고객의 수가 i가 되는 기대시간은 T_{ji}가 된다. 따라서 이를 식으로 표현나면 다음과 같다.

$$L_i(r) = E_i + \sum_{j=0}^{i} b_j\{L_{i-j}(r-j) + T_{ji}\} + \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j T_{ii}. \qquad (3.4)$$

우변의 $L_i(r)$항을 좌변으로 이항하여 정리하면 $L_i(r)$에 대한 다음 식을 얻는다.

$$L_i(r) = \frac{E_i}{1-b_0} + \sum_{j=1}^{i} b_j\{L_{i-j}(r-j) + T_{ji}\} + \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j T_{ii}. \qquad (3.5)$$

$r=1$의 경우는 $i \ge 0$의 모든 i값에 대하여 다음 식이 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

$$L_i(1) = \frac{E_i}{1-b_0} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j T_{ji} = \frac{E_i}{1-b_0} + \sum_{j=1}^{i} b_j T_{ji} + \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j T_{ii}. \qquad (3.6)$$

식 (3.6)을 식(3.5)에 대입하면 식(3.7)이 언어진다.

$$L_i(r) = \sum_{j=1}^{i} b_j L_{i-j}(r-j) + T_i(1). \tag{3.7}$$

위 순환식을 우변에 있는 항 $L_{i-j}(r-j)$에 반복 적용하면 $L_i(r)$은 $r=1$인 경우의 식으로만 표현가능하며 β_i를 이용하여 이 식을 정리하면 식(3.7)은 식(3.8)과 같이 표현된다.

$$L_i(r) = \sum_{j=0}^{i} \beta_j L_{i-j}(1). \tag{3.8}$$

ii) $i \geq r$의 경우

이 경우에도 $i<r$에서와 같이 첫번째 휴가기간중에 도착하는 고객의 수에 의해 조건화하면 $L_i(r)$은 다음과 같이 표시된다.

$$L_i(r) = E_i + \sum_{j=0}^{r-1} b_j\{L_{i-j}(r-j)+T_{ji}\} + \sum_{j=r}^{i} b_j T_{ji} + \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j T_{ii}. \tag{3.9}$$

우변의 $L_i(r)$항을 좌변으로 이항하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$L_i(r) = \frac{Ei}{1-b_0} + \sum_{j=1}^{r-1} b_j\{L_{i-j}(r-j)+T_{ji}\} + \sum_{j=r}^{i} b_j T_{ji}$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j T_{ii} = \sum_{j=1}^{r-1} b_j L_{i-j}(r-j) + L_i(1). \tag{3.10}$$

위 순환식을 우변의 항 $L_{i-j}(r-j)$에 반복 적용한 후 β_i를 이용하여 정리하면 $L_i(r)$은 다음과 같이 표현된다.

$$L_i(r) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j L_{i-j}(1).$$

보조정리 3.1로 부터 $i=0$인 경우에는 $L_0(r)$의 값이 r의 값에 관계없이 $L_0(1)$과 같으며, 이 값은 유휴기간이 시작된 시점으로부터 첫번째 집단이 도착한 시점까지의 기대치이므로 $\frac{1}{\lambda}$ 이 된다.

3.2 L(r)의 계산

$L(r)$을 구하기 위하여 τ_j를 고객의 수가 j인 상태에서 서비스가 시작되었다는 조건하에서의 가동기간의 기대길이로 정의한다. 그러면 한 사이클의 기대길이 $L(r)$도 $L_i(r)$과 유사하게 다음과 같이 구해질 수 있다. 제어변수 r의 값에 관계없이 서어버는 항상 첫번째 휴가를 갖게된다. 첫번째 휴가기간 중 고객이 j명 도착할 확률은 b_j로 표시된다. 만일 $j<r$이면 첫번째 휴가가 끝난 시점으로 부터 가동기간중 최초로 고객의 수가 j로 복귀되는 시점까지의 기대시간은 $L(r-j)$로 표시되며 이 시점 이후로 부터 가동기간이 끝날 때까지 소요되는 기대시간은 τ_j이다. 반면에 $j \geq r$이면 첫번째 휴가가 끝난 시점에서 곧 서어버의 가동이 시작되며 가동기간의 기대길이는 τ_j가 된다. 이를 식으로 표시하면 다음과 같다.

$$L(r) = E(V) + \sum_{j=0}^{r-1} b_j\{L(r-j)+\tau_j\} + \sum_{j=r}^{\infty} b_j \tau_j. \tag{3.11}$$

우변의 $L(r)$을 좌변으로 이항하여 정리하면

L(r)에 대한 다음 식을 얻는다.

$$L(r)=\frac{E(V)}{1-b_0}+\sum_{j=1}^{r-1}b_jL(r-j)+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\tau_j. \quad (3.12)$$

식(3.12)에 r=1을 대입하면 L(1)은 다음과 같다.

$$L(1)=\frac{E(V)}{1-b_0}+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\tau_j. \quad (3.13)$$

식(3.13)을 식(3.12)에 대입하면 식(3.14)가 얻어진다.

$$L(r)=\sum_{j=1}^{r-1}b_jL(r-j)+L(1). \quad (3.14)$$

우변에 있는 항 L(r−j)에 위 순환식을 반복하여 적용하면 식(3.14)는 다음과 같이 정리된다.

$$L(r)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_jL(1). \quad (3.15)$$

이제 L(r)과 $L_i(r)$의 식이 구해졌으므로 이를 식(2.1)에 대입하면 $P_i(r)$은 보조정리 3.2와 같이 표현된다.

보조정리 3.2

$$P_i(r)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j=0}^{i}\beta_jP_{i-j}(1)}{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}, & i<r,\\[2ex] \dfrac{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_jP_{i-j}(1)}{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}, & i\geq r.\end{cases} \quad (3.16)$$

(증명)

i) i<r의 경우

$$P_i(r)=\frac{\sum_{j=0}^{i}\beta_jL_{i-j}(1)}{L(1)\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}=\frac{\sum_{j=0}^{i}\beta_j\frac{L_{i-j}(1)}{L(1)}}{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}=\frac{\sum_{j=0}^{i}\beta_jP_{i-j}(1)}{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}$$

ii) i≥r의 경우도 i)에서와 같은 방식으로 증명된다.

보조정리 3.2로 부터 어떤 제어정책하에서도 안정상태확률을 제어정책이 주어지지 않는 경우 (r=1)의 안정상태확률 $P_i(1)$으로 부터 계산됨을 알수 있으며 $P_i(1)$은 식(2.1)로 부터 다음과 같이 주어진다.

$$P_i(1)=\frac{L_i(1)}{L(1)},\ i\geq 0. \quad (3.17)$$

따라서 $P_i(1)$의 값을 구하기 위해서는 L(1)과 $L_i(1)$의 값을 계산할 수 있어야만 하며 이들 값에 대한 계산과정이 아래에서 설명된다.

3.3 L(1)의 계산

고객의 수가 j로 시작된 가동기간의 길이는 고객의 수가 1명으로 시작된 독립적인 가동기간 j개의 합이다. 또한 고객의 수가 1명으로 시작된 가동기간의 기대길이 τ_1은 대기행렬 이론에서 $\frac{E(U)}{1-\rho}$로 잘 알려져 있으므로 $\tau_j=j\frac{E(U)}{1-\rho}$ 이다($\rho=\lambda E(X)E(U)$). 이를 식(3.13)에 대입하면 L(1)의 값은 다음과 같이 구해진다.

$$L(1) = \frac{E(V)}{1-b_0} + \frac{E(U)}{1-\rho}\sum_{j=1}^{\infty} jb_j$$

$$= \frac{E(V)}{1-b_0} + \frac{E(U)}{1-\rho}\frac{\lambda E(X)E(V)}{1-b_0}$$

$$= \frac{E(V)}{(1-b_0)(1-\rho)}. \qquad (3.18)$$

3.4 $L_i(1)$의 계산

식(3.6)에 표현된 $L_i(1)$은 다음 보조정리와 같이 단순화된다.

보조정리 3.3

$$L_i(1) = \frac{Ei}{1-b_0} + \sum_{k=1}^{i} T_{ik}B_{i-k}, \qquad (3.19)$$

여기서 $B_i = 1-\sum_{j=1}^{i} b_j$로 정의되며 $B_i = B_{i-1} - b_i$의 식을 이용하여 계산한다.

(증명) 식(3.6)으로 부터 $\sum_{j=1}^{i} b_j T_{ji} + \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j T_{ii} = \sum_{k=1}^{i} T_{ik}B_{i-k}$임을 증명하면 충분하며 이는 다음과 같이 증명된다.

$$\sum_{j=1}^{i} b_jT_{ji} + \sum_{j=i+1}^{\infty} b_jT_{ii} = \sum_{j=1}^{i} b_j \sum_{k=i-j+1} T_{ik} + \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j$$

$$\sum_{k=1}^{i} T_{ik} = \sum_{k=1}^{i} T_{ik} \sum_{j=i+1-k}^{i} b_j + \sum_{k=1}^{i} T_{ik}\left(1-\sum_{j=1}^{i} b_j\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{i} T_{ik}\left(1-\sum_{j=1}^{i-k} b_j\right) = \sum_{k=1}^{i} T_{ik}B_{i-k}.$$

보조정리 3.3으로 부터 $L_i(1)$은 E_i의 값과 $1 \leq k \leq i$ 범위에서 T_{ik}의 값만 얻어지면 이로 부터 쉽게 계산됨을 알 수 있다. 아래에서 이들 값을 구하는 효율적인 식을 유도해 보도록 한다.

3.4.1 E_i의 계산

휴가기간 동안 도착한 집단의 수가 j라는 조건하에서의 휴가기간의 기대치를 $\bar{v}_j$라 표시하면 Bayes의 정리를 적용하여 $\bar{v}_j$는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{v}_j = \frac{1}{a_j}\int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}\, t\,dV(t). \qquad (3.20)$$

식(2.2)와 식(3.20)를 이용하면 $\bar{v}_j$는 다음과 같이 a_j와 a_{j+1}의 식으로 표시 가능함이 증명된다.

$$\bar{v}_j = \frac{a_{j+1}}{a_j}\frac{j+1}{\lambda}. \qquad (3.21)$$

휴가기간중 도착한 집단의 수가 j일 확률은 a_j이다. 만일 휴가기간중 j개의 집단이 도착했다면 휴가기간중 고객의 수가 i인 기간이 존재할 확률은 $\sum_{n=0}^{j}\pi_{in}$이며 이 경우 고객의 수가 i인 기간의 기대길이는 $\frac{v_j}{j+1}$이다. 따라서 E_i는 다음 식으로 표시된다.

$$E_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{v_j}{j+1}\sum_{n=0}^{j}\pi_{in}. \qquad (3.22)$$

식(3.22)에 식(3.20)을 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$E_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{j+1}}{\lambda}\sum_{n=0}^{j}\pi_{in}.$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$E_i = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{i} \pi_{in} A_n. \tag{3.23}$$

여기서 An은 $1-\sum_{j=0}^{n} a_j$로 정의되며 $A_n = A_n - a_n$의 식을 이용하여 계산한다.

만일 고객이 집단으로 도착하지 않고 단순 Poisson과정에 따라 도착한다면 E_i는 다음과 같이 단순화 된다.

$$E_i = \frac{A_i}{\lambda}. \tag{3.24}$$

3.4.2 T_{1i}의 계산

T_{1i}는 1명의 고객으로 시작한 가동기간 동안 시스템이 상태 i에 있을 기대시간이다. T_{1i}를 구하기 위하여 첫번째 고객의 서비스 시간중 시스템이 상태 i에 있을 기대시간 t_i라 정의하고 첫번째 고객의 서비스 시간동안 도착한 고객의 수에 대해 조건화하면 다음 식이 얻어진다.

$$T_{1i} = t_i + \sum_{j=1}^{i} h_j T_{ji} + \sum_{j=i+1}^{\infty} h_j T_{ii}. \tag{3.25}$$

보조정리 3.3의 증명과 비슷한 과정을 거쳐 식(3.25)를 정리하면 다음과 같다.

$$T_{1i} = t_i + \sum_{k=1}^{i} T_{1k}(1 - \sum_{j=0}^{i-k} h_j). \tag{3.26}$$

식(3.26)의 우변에 있는 항 T_{1i}를 좌변으로 옮겨 정리하면 다음식을 얻는다.

$$T_{1i} = +\frac{1}{h_0}\{t_i + \sum_{k=1}^{i-1} T_{1k} H_{ik}\},\ i>1. \tag{3.27}$$

여기서 $H_i = 1 - \sum_{j=0}^{i} h_j$로 정의되며, $H_i = H_{i-1} - h_i$의 식을 이용하여 계산한다.

식(3.27)로 부터 T_{1i}는 t_i와 $T_{1k}(1 \le k \le i-1)$의 값으로 부터 직접 구해질 수 있으며 T_{1i}의 값은 i=1로 부터 시작하여 i의 값을 1씩 증가시켜 가며 축차적으로 계산되어짐을 알 수 있다. T_{1i}의 초기치 T_{11}은 식(3.27)로 부터 t_1/h_0의 값을 갖는다. t_i는 고객 1명으로 시작한 가동기간의 첫번째 서비스 시간동안 고객의 수가 i인 기대시간으로 E_i와 동일한 방법으로 구해진다. 단지 t_i는 서비스기간초 고객이 1명이고 E_i는 휴가기간초 고객이 0명이므로 이러한 차이점을 감안하여 E_i를 구하는 식(3.23)을 이용하면 t_i는 다음과 같이 계산된다.

$$t_i = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{i-1} \pi_{i-1,n}\, G_n,\ i \ge 1 \tag{3.28}$$

여기서 $G_n = 1 - \sum_{j=0}^{n} g_j$로 정의되며 G_n의 계산을 위해서는 $G_n = G_n - g_n$의 식이 이용된다.

이제 앞에서 유도된 순환식들을 이용하여 본 연구의 목적인 제어가 존재하는 경우의 안정상태확률 $P_i(r)$을 구할 수 있다. 보조정리 3.2로 부터 $i<r$인 범위의 $P_i(r)$은 $0 \le k \le i$의 범위에 있는 $P_k(1)$의 값을 구하면 계산 가능하다. 이는 $P_k(1)$의 값이 k=0으로 부터 시작하여 축차적으로 구해져야 함을 의미하며 $P_k(1)$을 구하기 위하여 필요한 $L_i(1)$의 값이 i=0로 부터 시작하여

축차적으로 구하여 지므로 $P_k(1)$ 역시 축차적으로 쉽게 구하여 진다. 순환식의 구조상 일단 $P_k(1)$의 값이 계산되면 $P_{k+1}(1)$의 값은 극히 적은 계산만이 부가됨으로써 구해질 수 있다. 이러한 사실들은 제어운영 정책하에서의 안정상태확률 $P_i(r)$의 값도 i=0로 부터 축차적으로 계산되며, 순환식의 구조상 $p_i(r)$의 값이 구해지면 이값을 얻기 위하여 그동안 구해진 정보를 저장해 둠으로써 $p_{i+1}(r)$의 값 또한 쉽게 계산됨을 의미한다.

4. 시스템에 존재하는 평균 고객수 및 평균 지체시간

보조정리 3.2로 부터 제어가 존재하는 $M^X/G/1$ 서어버 휴가모형의 안정상태에 대한 확률발생함수(p.g.f)$P_r(Z)$는 다음과 같이 유도된다.

보조정리 4.1

$$P_r(Z)=P_1(Z)\frac{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j Z^j}{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}. \tag{4.1}$$

(증명)생략.

여기서 $P_1(Z)$는 $M^X/G/1$ 다중 서어버 휴가모형의 안정상태에 대한 확률발생함수로서 잔여휴가기간(residual vacation time)중 도착하는 고객수에 대한 확률발생함수를 Q(Z), 휴가가 존재하지 않는 일반 $M^X/G/1$ 모형의 안정상태에 대한 확률발생함수를 P(Z)라 하면 Fuhrmann과 Cooper(7)에 의하여 증명된 분해성질(decomposition property)에 의하여 $P_1(Z)=Q(Z)P(Z)$로 표현된다.

식(4.1)로 부터 제어변수의 값이 r일 경우 시스템에 존재하는 평균 고객수 $\overline{N}(r)$은 다음과 같이 표시된다.

$$\overline{N}(r)=\overline{N}(1)+\frac{\sum_{j=0}^{r-1}j\beta_j}{\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j}. \tag{4.2}$$

여기서 $\overline{N}(1)$은 제어가 존재하지 않는 서어버 휴가모형에서의 평균 고객수로서 다음과 같이 주어진다(2).

$$\overline{N}(1)=\frac{\lambda E(X)E(V^2)}{2E(V)}+\frac{\lambda[E(X)E(U^2)+E\{X(X-1)\}\{E(U)\}^2]}{2(1-\rho)E(U)}.$$

$\overline{N}(r)$이 구해지면 고객이 시스템내에서 지체하는 평균 지체시간은 Little의 법칙에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\overline{W}(r)=\frac{N(r)}{\lambda E(X)}. \tag{4.3}$$

5. 결 론

본 연구에서는 제어 운영 정책하에 있는 집단으로 도착하는 서어버 휴가모형의 안정상태확률을 구하는 효율적인 알고리듬을 개발하였다. 이를 위하여 제어가 존재하는 모형의 안정상태확률을 제어가 존재하지 않는(r=1)$M^X/G/1$ 서어버 휴가모형의 안정상태확률의 식으로 표시해

준후 이를 손쉽게 구할 수 있는 계산과정을 소개하였다. 제어가 존재하지 않는 $M^X/G/1$ 서어버 휴가모형의 안정상태확률은 서어버 휴가모형의 분해성질에 의하여 다음과 같이 구하여질 수도 있다.

q_i를 잔여 휴가기간동안 도착한 고객의 수가 j일 확률이라 하고 p_k를 휴가가 존재하지 않는 일반 $M^X/G/1$ 시스템의 안정상태확률이라 하자.

그러면 분해성질에 의하여 $P_i(1)=\sum_{j=0}^{i} q_j p_{i-j}$로써 구해질 수 있으며 q_i와 p_k는 본 연구에서 소개된 과정을 응용하여 계산가능하다. 그러나 이러한 방법은 잔여휴가기간 $\overline{V}$의 분포가 다루기 까다로울 경우는 비효율적이며 본 연구에서와 같이 r=1일 경우의 안정상태확률을 직접 계산하는 것이 보다 효율적으로 판단된다. 또한 본 연구에서 개발된 안정상태확률의 계산과정은 가정을 약간 달리하는 변형된 서어버 휴가모형의 안정상태확률을 계산하는 데에도 유용하게 이용될 수 있으리라 생각된다.

참 고 문 헌

[1] Altiok, T., "(R,r)Production/Inventory Systems,"*Opns. Res*, v37, no2(1989), pp. 266-276

[2] Baba, Y., "On the $M^X/G/1$ Queue with Vacation Time," *Oper. Res. Lett*, 5(1986). pp. 93-98

[3] Baba, Y., "The $M^X/G/1$ Queue with Finite Waiting Room," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, v27(1984),pp. 260-272

[4] Chu, W.W., "Buffer Behaviour for Batch Poisson Arrival and Single Constant Output,"*IEEE, Trans. Commun*, v18(1970),pp. 613-618

[5] Chu, W.W., and A.G.Konheim, "On the Analysis and Modeling of a Class of Computer Communication Systems," *IEEE, Trans. Commun*, v 20(1972),pp. 645-660

[6] Doshi, B.T., "Queueing System with Vacations-A Survey," *Queueing System*, v1(1986),pp. 29-66

[7] Fuhrmann, S.W. and R.B. Cooper,"Stochastic Decompositions in the M/G/1 Queue with Generalized Vacations," *Opns. Res.*, v33(1985), pp.1117-1129

[8] *Gavish, B. and S.C.Graves*,"Production/Inventory Systems with a Stochastic Production Rate under a Continuous Review Policy," *Comp. & Opns. Res.*, v8, no 3(1980),pp. 169-183

[9] Grabill, T., Gross and N. Magazine,"A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Contral of Queues," *Opns. Res.* v25(1977),pp. 219-232

[10] Kella, O., "The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vacations,"*Naval Research Logistics*, v36(1989),pp. 111-123

[11] Lee, H.S. and M.M. Srinivasan,"Control Policies for the $M^X/G/1$ Queueing System," *Mgmt Sci*, v35, no 6(1989),pp. 708−721

[12] Neuts, M.F., *Matrix−Geometric Solutions in Stochastic Models*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD,(1981)

[13] Ross, S.M., *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden−Day, Inc.,(1970)

[14] Srinivasan, M.M. and H.S. Lee,"Random Review Production/Inventory Systems with Compound Poisson Demands and Arbitrary Processing Times,"*Mgmt. Sci.*, v37,no7(1991),pp. 813−833

[15] Takagi, H., "Queueing Analysis of Vacation Models, Part I : M/G/1, Part II : M/G/1 with Vacations,"*Tech. Rrport TR* 87−0032, IBM Tokyo Research Lab.,(1988)

[16] Teghem, J., "Control of the Service Process in a Queueing System,"*European J. Oper. Res.*, v23 (1986),pp. 141−158

[17] Tijms, H.C., *Stochastic Modeling and Analysis : a Computational Approach*, John Wiley & Sons,(1986)

[18] Van Hoorn, M.H., "Algorithms for the State Probabilities in a General Class of Single Server Queueing Systems with Group Arrivals,"*Mgmt. Sci.*, v27(1981),pp. 1178−1187