Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 16, No. 1, June., 1991

시뮬레이션에서 Total Hazard를 이용한 신뢰도 추정*

전치혁 **

Reliability Estimation by Simulation Using Total Hazard

Chi-Hyuck Jun

Abstract

The hazard estimator is proposed for estimating system failure probability of a general network where all minimal cut sets are given. Theoretical variance of the hazard estimator is derived in a bridge system. It is demonstrated that variance of the hazard estimator is much smaller than that of the raw simulation estimator particularly for small arc failure probability.

1. 서론

마디(node)들은 완벽하며 호(arc)들은 서로 독립적으로 랜덤하게 고장을 일으키는 네트워크 시스템의 신뢰도를 계산하는 문제를 생각해 본다. 호가 모두 n개 있다고 하고 호 i가 고장날 확률이 $q_i(i=1, 2, \cdots, n)$라고 하자. 시스템의 고장확률을 네트워크 중 마디 s와 마디 t가 연결

* 본 연구는 문교부의 '89 년도 대학교수국비해외파유연구에 의해 지원되었음.

** 포항공과대학 산업공학과

되지 않을 확률로 정의하고 이를 u(**q**)로 나타내자. 여기서 **q**는 호들의 고장확률벡타, 즉 $q_i=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$이다. 이 때 이 시스템의 신뢰도 계산 문제는 u(**q**)의 산출로 귀착되며, 따라서 본 논문에서는 이 확률(unreliability 라고도 함)을 추정함을 목적으로 한다.

일반적인 네트워크 시스템의 신뢰도를 정확하게 구하는 것은 거의 불가능하므로, 몬테칼로 시뮬레이션에 의해 추정하고자 하는 방법을 쉽게 생각할 수 있다. 그러나 단순 시뮬레이션(crude simulation 또는 raw simulation)으로서는 필요로 하는 정도(precision)의 추정치를 구하는데 시간과 노력이 매우 들므로 분산축소기법(variance reduction technique)에 대한 연구가 많이 이루어져 왔다. 예를들어 Fishman [4]은 네트워크 신뢰도를 구하는데 사전에 알려진 상하한을 이용한 분산축소기법을 적용하였다. Ross [6]는 k−of−n 시스템의 신뢰도를 시뮬레이션으로 추정할 때 total hazard를 이용함으로써 많은 분산의 축소를 이룩할 수 있음을 보였다.

본 연구는 일반적인 네트워크 시스템의 신뢰도(실제로는 고장확률)를 시뮬레이션에 의해 추정하는데 있어서 total hazard를 이용하는 방안을 모색하며 이 Hazard 추정량의 성능을 단순시뮬레이션 추정량의 것과 비교하고자 한다.

2. 시뮬레이션 방법과 Hazard 추정량

$\{X_n, n\geq 0\}$을 한 Markov process라 하고 어떤 주어진 상태(state)들의 집합 A에 대하여 N을 아래와 같이 정의할 때

$$N=\min\{n>0 : X_n\in A\}$$

다음의 확률 h_n($n>1$에 대해)

$$h_n=P\{N=n \mid X_0, \cdots, X_{n-1}\}$$

을 random hazard라 부르고,

$$H=\sum_{n=1}^{N} h_n$$

를 total hazard로 정의한다. (Ross [6] 참조.) 여기서 N이 확률변수이기 때문에 H 역시 확률변수이다. Ross는 또한

$$E[H] = P\{N < \infty\} \tag{1}$$

임을 보였다.

일반적으로 네트워크의 시스템 고장확률을 구하기 위해 total hazard를 이용하는 방법과 이에 관련된 시뮬레이션방법을 설명하고자한다. 여기서 네트워크의 모든 최소절단집합(minimal cut set)은 안다고 가정한다. 최소절단집합의 정의는 Barlow, Proschan [2]의 것을 따른다. 네트워트에서 최소절단집합을 찾는 방법으로는 Allan, Billinton, De Oliveira [1] 등을 이용할 수 있으며, 본 논문에서는 그 방법을 생략한다.

초기의 절단집합 리스트에는 모든 최소절단집합이 포함된다. 이를 $\mathcal{C}^{(1)}$이라 하자. 시뮬레이션에서는 이 중 한 집합만을 선택하여 이 집합에

포함된 호들의 작동여부를 본 다음 작동하는 호를 포함하는 최소절단집합은 삭제시키고 고장난 호들은 제외시켜 리스트를 수정한다. 이를 $\mathcal{C}^{(2)}$라고 하자. 그리고 다시 이 중에서 한 집합을 선택하여 시뮬레이션을 수행하고 리스트를 수정하는 과정을 반복한다. 한가지 주의를 요하는 것은 리스트를 수정하는 과정에서 최소가 아닌 집합이 포함될 수 있는데 이들 역시 리스트에서 제외시켜야 한다. 일반적으로 i번째 리스트를 $\mathcal{C}^{(i)}$라고 하고, 이 리스트 중 시뮬레이션을 위해 선택된 집합을 $C^{(i)}$라고 하자. 어떤 리스트가 주어졌을 경우 이 중 어떤 집합을 선택하느냐에 따라 total hazard가 다를 수 있으며, 이 선택을 위해서는 특정 규칙이 있어야 하는데 이에 대해서는 차후 다시 언급하기로 한다.

예를 들어, 〈그림 1〉의 브릿지(bridge) 시스템을 볼 때 최소절단집합들은 다음과 같다.

{1,2}, {1,3,5}, {2,3,4}, {4,5}

따라서 $\mathcal{C}^{(1)}$은 위와 같으며, 리스트 중 호의 수가 가장 적은 집합을 선택한다고 할 때, $C^{(1)}$은 {1, 2}(또는 {4,5})가 된다. 시뮬레이션에서 호 1은 작동하고 호 2는 고장이 났다고 하면, $\mathcal{C}^{(2)}$는 아래와 같다.

{3,4}, {4,5}

그리고 $C^{(2)}$는 {3,4} (또는 {4,5})가 된다.

위와 같은 과정에서 다음과 같은 Markov Chain을 구성할 수 있다. 즉, 집합 $C^{(1)}$에서 고장난 호의 갯수를 첫 상태로, $C^{(2)}$에 포함된 고장난 호의 갯수를 다음 상태, 일반적으로 Xn을 $C^{(n)}$에 포함된 고장난 호의 갯수로 정의할 때, $\{X_n, n > 0\}$은 Markov Chain이 된다. 그리고 N을 아래와 같이 정의하면

$$N=\min\{n>0 : X_n = |C^{(n)}|\}$$

(여기서 $|C^{(n)}|$은 $C^{(n)}$에 포함된 호의 갯수)

N은 시뮬레이션 과정 중 시스템이 고장난 시점을 의미한다. (시간의 의미는 아니며 반복수를 나타낸다.) 이 때 random hazard 는 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$h_n = \prod_{i \in C^{(n)}} q_i$$

total hazard를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H=\sum_{n=1}^{N} h_n$$

그리고 식 (1)로 부터 E[H]가 바로 시스템의 고장확률이 됨을 알수있다. 따라서 이 H를 Hazard 추정량이라 부르기로 한다.

Hazard 추정량 H가 단순시뮬레이션 추정량보다 분산이 작을 것이라는 것은 다음과 같은 설명으로 짐작할 수 있다. 즉, Brown, Ross [3] 또는 Schechner[7]에서 보였듯이 total hazard H가 연속확률변수이고 E[H]=1인 경우에는 H가 지수분포를 따르므로, 우리의 경우 (E[H]=u(q)인 경우)에 있어서도 Var[H]가 대략 $(u(q))^2$이 된다고 할 때 이는 단순시뮬레이션 추정량의 분산인 u(q)(1−u(q)) 보다 (특히 시스템 고장확률이 매우 작은 경우에) 작게 된다.

다음 3절 및 4절에서는 이론적으로 Var[H]의 계산이 가능한 간단한 시스템의 예를 들어 이 분산이 단순시뮬레이션 추정량의 분산보다 얼마

나 작은 가를 보이며, 특히 3절에서는 최소절단집합 리스트 중 시뮬레이션 할 한 집합을 선택하는 규칙에 따라 total hazard가 달라짐을 보이고자 한다.

3. 두 부품 직렬 시스템

두개의 호가 직렬로 연결된 시스템(각 호가 부품에 해당되는)에서 호 i가 고장날 확률이 q_i($i=1, 2$)라고 하고 $q_1>q_2$라 가정하자. 우리는 이 시스템의 고장확률을 시뮬레이션으로 추정하고자 한다. 단순시뮬레이션 추정량 J는 아래와 같이 주어지므로

$$J = \begin{cases} 1 & \text{w.p. } q_1+q_2-q_1q_2 \\ 0 & \text{w.p. } (1-q_1)(1-q_2) \end{cases}$$

이의 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}[J]=(1-q_1)(1-q_2)(q_1+q_2-q_1q_2).$$

고장확률이 큰 호부터 시뮬레이션하는 규칙(규칙 g라 하자)에 의한 total hazard Hg는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} Hg &= Hg(\{1\}, \{2\}) \\ &= q_1+H(\{2\} \mid \{1\}) \\ &= q_1+q_2\, I. \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 I는

$$I = \begin{cases} 1 & \text{w.p. } 1-q_1 \\ 0 & \text{w.p. } q_1 \end{cases}$$

으로 정의되는 지시변수(indicator variable)이다. 윗식 (2)의 첫째줄은 최소절단집합이 {1}, {2}인 시스템에서 규칙 g에 의한 total hazard을 의미하며, 둘째줄의 두번째 항은 집합 {1}에 있는 호들의 상태(고장여부)가 주어진 조건하에서 추가로 더해지는 random hazard를 뜻한다.

따라서 Hg의 분산은

$$\mathrm{Var}[Hg]=q_2^2q_1(1-q_1) \tag{3}$$

과 같다.

반면에 고장확률이 작은 호, 즉 호 2부터 고려하는 규칙 s에 의한 Hazard 추정량 Hs의 분산은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{Var}[Hs]=q_1^2q_2(1-q_2). \tag{4}$$

식 (3)과 (4)로 부터 규칙에 따라 Hazard 추정량의 분산이 다름을 볼 수 있다. 따라서 우리는 가능한한 분산이 작게되는 규칙을 찾아야 할 것이다.

또한 다음과 같은 관계에 의하여

$$\frac{\mathrm{Var}[Hs]}{\mathrm{Var}[Hg]}=\frac{q_1/q_2}{(1-q_1)/(1-q_2)}>1$$

규칙 g가 규칙 s보다 항상 좋음을 알 수 있다.

상대적으로 나쁜 규칙 s에 의한 Hazard 추정량과 단순시뮬레이션 추정량을 비교하더라도 전자의 분산이 후자의 분산보다 작음을 볼 수 있다.

즉,

$$\frac{\mathrm{Var}[J]}{\mathrm{Var}[Hs]}=\frac{(1-q_1)(q_1+q_2-q_1q_2)}{q_1^2\,q_2} \tag{5}$$

이고, $q_1+q_2<1$에 대해

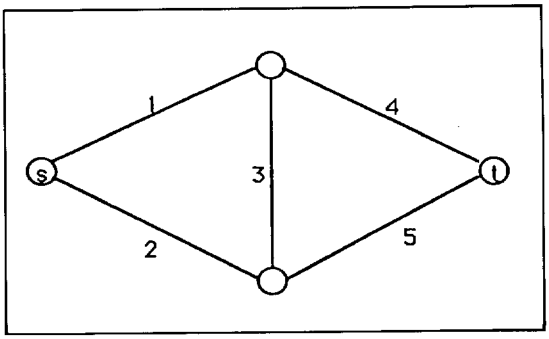
$$q_1(1-q_1-q_2)+q_2(1-q_1)>0$$

이므로 식 (5)가 1 보다 큼을 알 수 있다. q_1과 q_2가 매우 작을 경우에는(이를 공히 q라고 하자) 식 (5)의 비율이 대략 2 q^{-2}이 된다. 예를

들어 $q=0.01$일 때 Hazard 추정량의 분산은 단순추정량보다 약 20,000배가 작게된다.

4. 브릿지 (Bridge) 시스템

본 절에서는 <그림 1>과 같은 간단한 브릿지 시스템의 고장확률에 대한 Hazard 추정량의 기대치와 분산을 이론적으로 유도해 보며, 단순추정량의 것과 비교하고자 한다.



〈그림 1〉 브릿지 시스템

이 시스템의 최소절단집합들은 2절에서 언급한 바와 같다. 시뮬레이션할 집합의 선택은 리스트에 있는 집합 중 맨 처음 것을 택하는 규칙을 사용한다고 하자. 호 i가 고장날 확률은 q_i(i =1, 2, ⋯, 5)이며, 호 i 의 고장여부 상태를 x_i로 나타낸다. 즉, $x_i=1$은 작동상태를 나타내며, $x_i=0$은 고장상태를 나타낸다. 이때 total hazard는 다음의 과정을 거쳐 계산된다.

$$H=H(\{1,2\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{4,5\})$$
$$=q_1q_2+H(\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{4,5\} \mid \{1,2\}).$$

여기서 첫째줄은 3절에서와 같이 초기 최소절단집합 리스트로 부터 total hazard를 구함을 의미하며(선택규칙 부호는 생략되었음), 둘째줄의 두번째 항은 {1, 2}의 호들의 상태에 따른 추가 hazard를 의미한다. 이 추가 hazard를 H_1으로 나타내면, 이는 다음과 같이 표현된다.

$H_1=0$

$x_1=x_2=0$일때($I_1=0$으로 정의)

$=H(\{3,5\},\{4,5\})$

$x_1=0,\ x_2=1$일때($I_1=1$로 정의)

$=H(\{3,4\},\{4,5\})$

$x_1=1,\ x_2=0$일때($I_1=2$로 정의)

$=H(\{4,5\})=q_4q_5$

$x_1=x_2=1$일때($I_1=3$으로 정의).

위의 둘째줄의 hazard를 H_2로, 세째줄의 hazard를 H_3로 할 때, total hazard H의 기대치와 분산은 아래와 같이 표현된다.

$$E[H]=q_1q_2+E[H_1]$$
$$=q_1q_2+q_1(1-q_2)E[H_2]+(1-q_1)q_2E[H_3]$$
$$+(1-q_1)(1-q_2)q_4q_5 \qquad (6)$$

$$Var[H]=Var[H_1]$$
$$=E[Var[H_1 \mid I_1]]+Var[E[H_1 \mid I_1]]$$
$$=q_1(1-q_2)\ Var[H_2]+(1-q_1)q_2Var[H_3]$$
$$+q_1(1-q_2)E^2[H_2]+(1-q_1)q_2E^2[H_3]$$
$$+(1-q_1)(1-q_2)q_4^2q_5^2$$
$$-\{q_1(1-q_2)E[H_2]+(1-q_1)q_2E[H_3]$$
$$+(1-q_1)(1-q_2)q_4q_5\}^2 \qquad (7)$$

또한 H_2와 H_3의 기대치와 분산을 각각 구하면 다음과 같다.

$$E[H_2]=q_3q_5+(1-q_3)q_4q_5$$
$$Var[H_2]=(1-q_3)q_4^2q_5(1-q_3+q_3q_5)$$

$E[H_3]=q_3q_4+(1-q_3)q_4q_5$

$Var[H_3]=(1-q_3)q_4q_5^2(1-q_4+q_3q_4).$

따라서 식 (6)과 (7)로 부터 Hazard추정량의 기대치와 분산을 구할 수 있다.

모든 호의 고장확률이 q로 동일하다고 하면, H의 기대치 (시스템 고장확률)와 분산은 다음과 같다.

$E[H]=q^2(2+2q-5q^2+2q^3)$

$Var[H]=q^4(1-q)(2-2q-3q^2+17q^3-16q^4+4q^5).$

그리고 이 시스템에 대한 단순시뮬레이션 추정량 J의 분산은 다음과 같다.

$Var[J]=q^2(2+2q-5q^2+2q^3)$
$(1-2q^2-2q^3+5q^4-2q^5).$

따라서 단순추정량과 Hazard 추정량의 분산비를 몇개의 q값에 대하여 구해보면 〈표 1〉과 같다.

〈표 1〉 단순추정량과 Hazard 추정량의 분산비(브릿지시스템)

q	0.001	0.01	0.05	0.1	0.2
시스템고장확률	$2.002\text{x}10^{-6}$	$2.020\text{x}10^{-4}$	0.0052	0.0215	0.0886
Var[J]/Var[H]	$1.003\text{x}10^{6}$	10,302	461.6	131.0	39.7

호의 고장확률 q의 값이 작은 경우 위의 분산비는 약 q^{-2}이 됨을 알 수 있다. 예를 들어 q=0.01인 경우 단순추정량의 경우보다 Hazard 추정량의 경우 분산이 약 1/10,000로 줄어든다. Hazard 추정량의 경우 약간의 추가계산량이 요구되지만 시뮬레이션 횟수의 축소로 인한 이득에 비하면 이는 별로 크지 않으리라 사료된다.

5. 일반적 시스템의 시뮬레이션

2절에서 언급하였지만 일반적인 네트워크 시스템의 고장확률을 추정하기 위해 본 연구에서 제안하는 시뮬레이션 방법을 요약하면 아래와 같다.

단계 0. 모든 최소절단집합을 찾고, 선택규칙을 정한다.

단계 1. total hazard 를 집계하는 변수 Y 를 0 으로 놓는다.

단계 2. i) 현재의 최소절단집합 리스트 중 선택규칙에 의해 한집합을 선택한다. (이를 C라고 하자.)

ii) $Y=Y+\prod_{i\in C} q_i$

단계 3. 집합 C에 있는 호들을 시뮬레이션한다.

단계 4. 집합 C에 있는 모든 호들이 고장이면 중지하고(이 때의 Y가 Hazard 추정량의 시뮬레이션된 한 값임), 그렇지 않으면 단계 5를 수행한다.

단계 5. 작동하는 호를 포함하는 최소절단집합을 삭제하고 고장난 호를 제외시킴으로써 리스트를 수정한다. 또한

최소가 아닌 절단집합도 삭제한다.
그리고 단계 2로 간다.

보다 정도가 높은 추정량의 가대치를 구하기 위해 위의 시뮬레이션 절차(단계 1 부터 5까지)를 많은 횟수 반복한다. 몇몇 시스템에 대한 시뮬레이션 경험에 의하면 10,000회 정도로 충분한 것으로 사료된다.

그러나 단순시뮬레이션은 훨씬 많은 횟수의 반복을 요하므로 한 컴퓨터 프로그램으로 두가지를 비교할 때 많은 쪽의 회수 반복을 양쪽에 적용하여야 할 필요가 있다. 시뮬레이션 결과로부터 보통의 방법으로 표본 평균, 표본 분산을 취하여 시스템 고장확률을 추정하며, 추정량의 분산을 추정할 수 있다. 고장확률추정치에 대한 신뢰구간 등을 원할때에는 Law, Kelton [5, p. 288] 등의 방법을 이용할 수 있다.

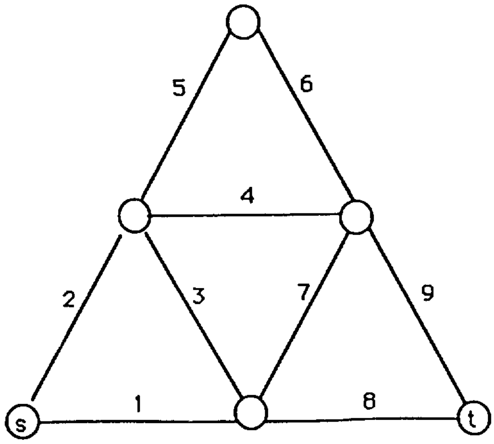
예로써 〈그림 2〉와 같은 삼각형시스템의 고장확률을 시뮬레이션에 의해 추정하고, 단순추정량과 Hazard 추정량의 분산을 비교하고자 한다. 각호의 고장확률(q)은 동일하다고 가정하며, total hazard를 구할 때 호들의 고장확률의 곱이 가장 큰 최소절단집합을 택하는 규칙을 사용한다.

이 시스템의 최소절단집합은 아래와 같다.

{1,2}, {1,3,4,5}, {1,3,4,6}, {1,3,7,9},
{8,9}, {4,6,7,8}, {4,5,7,8}, {2,3,7,8}.

시뮬레이션 반복수를 100,000회로 하였을 경우 q 값에 따른 시스템고장확률및 단순추정량과 Hazard 추정량의 분산은 〈표 2〉와 같다.

여기서 분산비는 단순추정량의 분산을 Hazard 추정량의 분산으로 나눈 값이다.



〈그림 2〉 삼각형 시스템

〈표 2〉 단순추정량 및 Hazard 추정량의 분산(삼각형 시스템)

q	0.005	0.01	0.05	0.1
시스템고장확률	5.000×10^{-5}	2.000×10^{-4}	5.030×10^{-3}	0.0203
단순추정량분산	3.000×10^{-5}	2.000×10^{-4}	5.242×10^{-3}	0.0205
Hazard추정량분산	4.391×10^{-14}	3.221×10^{-12}	7.256×10^{-7}	1.056×10^{-5}
분산비	6.833×10^{8}	6.209×10^{7}	7,225	1,946

〈표 2〉에서 보듯이 특히 호의 고장확률이 작을 때에는 Hazard 추정량의 분산이 단순추정량의 것보다 매우 작음을 알 수 있다. 부품의 고장확률이 매우 작은 시스템으로는 원자로, 항공기 등 드물지 않게 찾아 볼 수 있으며, 오히려 이러한 시스템의 신뢰도를 예측하는 일이 중요

할 수 있다. <표 2>의 시스템고장확률은 Hazard 추정량의 기대치이다. 여기서 한 가지 부언할 것은 시뮬레이션으로 추정한 단순추정량분산은 그다지 정확하지 않은 경우가 있다. 예를 들어 q=0.005일 때 이론적 단순추정량의 분산은 5.000x10^{-5}이 되어야 할 것이다.

6. 결론 및 제언

최소절단집합을 아는 네트워크 시스템의 고장 확률을 추정할 때 본 논문에서 제시한 Hazard 추정량은 단순시뮬레이션 추정량에 비해 그 분산이 매우 작음을 알 수 있다. Hazard 추정량은 특히 각 호(부품)의 고장확률이 작은 경우에 매우 효율적임을 보이고 있다.

모든 최소절단집합을 구하기 어려운 또는 구하는 데 노력이 많이 드는 시스템에 대해서는 단계적으로 시뮬레이션과 병행하여 최소절단집합을 구하는 방안이 요구된다. 즉, 초기에 하나의 최소절단집합을 찾고 이에 속한 호들을 시뮬레이션하며, 이들의 상태에 따라 네트워크를 축소(작동하는 호에 대해서는 양쪽 마디를 합하고, 고장난 호는 삭제하는 등의 방법으로)시켜 축소된 네트워크에서 다음의 한 최소절단집합을 찾아 시뮬레이션하는 과정을 생각할 수 있겠다.

또한 Ress [6]에서 언급한 바와 같이 Importance Sampling 과 Hazard 추정량을 결합함으로써 좀더 분산 축소를 이룩할 가능성이 있을 것이다.

-參考文獻-

[1] Allan, R.N., R. Billinton and M.F. De Oliveira, "An Efficient Algorithm for Deducing the Minimal Cuts and Reliability Indices of a General Network Configuration", *IEEE Transactions on Reliability*, **R-25, 4,** 226-233, 1976.

[2] Barlow, Richard E. and Frank Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Reprinted Edition, To Begin With, Silver Spring, 1981.

[3] Brown, Mark and Sheldon M. Ross, "*The Observed Hazard and Multicomponent Systems*", *Naval Research Logistics Quarterly*, **29, 4,** 679-683, 1982.

[4] Fishman, George S., "A Monte Carlo Sampling Plan for Estimating Network Reliability", *Operations Research*, **34, 4,** 581-594, 1986.

[5] Law, A.M. and W.D. Kelton, *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1982.

[6] Ross, Sheldon M., "Variance Reduction In Simulation Via Random Hazards", *Probability in the Engineering and Informational Sciences,* **4**, 299–309, 1990.

[7] Schechner, Zvi, "A Note On Randomly Evolving Hazard Rate Functions", *Naval Research Logistics Quarterly,* **29**, **4**, 693–695, 1982.