

## 이산 비선형시스템에서의 준최적추정자

### A Suboptimal Estimator Design for Discrete Nonlinear Systems

李 淵 錫\* · 李 章 揆\*\*  
(Yeon-Sok Lee · Jang-Gyu Lee)

**Abstract** - An estimator for a discrete nonlinear system is derived in the sense of minimum mean square error. An optimal estimator for nonlinear system is very difficult to find and it will be infinite dimensional even if it is found. It has been known that the statistical linearization technique makes it possible to obtain a finite dimensional estimator. In this paper, the procedure of its derivation using the statistical linearization technique that gives an exact mean and variance information is introduced in the sense of minimum mean square error. The derived estimator cannot be claimed to be globally optimal estimator because it uses the Gaussian assumption to the non-Gaussian distributed nonlinear output. However, the proposed filter exhibits a better performance compared to extended Kalman filter. Simulation results of a simple example present the improvement of the proposed filter in convergent property over the extended Kalman filter.

#### 1. 서 론

추정자(estimator)는 불확실성을 지닌 시스템에서 시스템의 출력으로부터 상태변수의 변화를 관측하는 도구이다. 시스템의 동특성이 상태변수의 선형미분방정식으로 표현되고 그 출력도 역시 상태변수의 선형식으로 표현될 수 있는 경우에 있어서, 시스템의 모든 랜덤요소가 정규분포를 지니고 있다고 하면 칼만필터는 여러가지 의미로 최적추정자가 됨은 잘 알려져 있다.[1~4] 그러나, 실제의 시스템이 이와 같은 조건을 만족시키는 경우는

그리 많지 않으므로, 실제의 사용에 있어서는 칼만 필터를 응용한준최적추정자가 주로 많이 사용된다.[2, 3, 4, 6]

특히 이들중에서 확장칼만필터는 시스템의 동특성이 상태변수의 비선형미분방정식으로 표현되거나 시스템의 출력이 상태변수의 비선형식으로 표현되는 경우에 있어서 일반적으로 사용되는 방법이다. 확장칼만필터는 전상태의 추정치로부터 비선형식으로 테일러다항식을 구하고, 이로부터 그 일차항만을 이용한 선형식을 구성하여 최적칼만필터를 적용하는 방법이다. 이와 같은 방법은 비선형식이 비교적 완만한 비선형성을 나타내는 경우에 상당히 좋은 결과를 보여주고 있다. 그러나 비선형식의 선형화 과정에서 상태변수의 랜덤요소는 고려되지 않고 다만 전상태의 추정치에 의하여 선

\*正 會 員 : 서울大 大學院 制御計測工學科 博士課程

\*\*正 會 員 : 서울大 工大 制御計測工學科 副教授  
· 工博

接受日字: 1991年 3月 25日  
1次修正: 1991年 7月 31日

형화되므로 이에 따르는 오차를 무시할 수 없는 경우가 발생된다.

이와 같은 단점을 해소하기 위하여 사용되는 통계적인 선형화방법은 동작점근처에서의 입력이 지니는 통계적인 특성을 고려하게 된다. 이러한 선형화방법중에서 랜덤입력서술함수(RIDF: random input describing function)을 이용하는 방법은 Booton이 제안한 이후로 주로 비선형시스템의 오차해석에 사용되어 왔으며, [8, 9, 10] Phaneuf는 이를 이용하여 의사선형추정자를 유도하였다. [6] 또한 이와 유사하게 Sunahara는 근사오차의 측정치에 대한 조건평균을 최소로 하는 선형근사식을 구하여 추정자를 구성하였으나, [7] 이 방법도 결국 랜덤입력서술함수와 같은 결과식을 지시하고 있다.

본 논문에서는 이러한 랜덤입력서술함수를 이용하는 통계적인 선형화 방법과는 달리, 공분산정합법에 의한 통계적인 선형화방법[11]을 이용하여 비선형식의 선형화 근사식을 구하고, 이 근사식에서의 추정자를 구성하였다. 본 논문의 구성은 2장에서 새로운 통계적인 선형화방법인 공분산정합법을 소개하고, 이를 이용한 준최적추정자의 유도과정을 3장에 서술하도록 한다. 또한 4장에서는 간단한 시뮬레이션을 통하여 유도된 추정자와 확장 칼만필터를 비교하여 보고, 5장에서 결론을 맺는다.

## 2. 공분산정합법

랜덤요소를 지닌 비선형시스템을 선형화시키는 방법은 여러가지가 있으며, 이들 중에는 랜덤요소에 대한 통계적인 특성을 고려하여 선형화시키는 방법도 있다. [4, 5] 여기서는 비선형시스템의 추정법에 있어서의 관심의 대상이 되는 상태변수의 평균과 분산을 정확하게 지시할 수 있는 선형화 방법에 대하여 살펴본다. 식(1)과 같이 주어지는 비선형요소를 선형적으로 근사시키는 방법을 살펴보자. [5]

$$y=f(x) \quad (1)$$

여기에서 입력  $x$ 는 평균  $m$ 과 분산  $P$ 를 갖는 랜덤입력이라 하고, 이때의 출력을 통계적인 특성에 따라 선형화시키는 방법으로서 식(2)와 평균값  $M$ 과 랜덤요소의 합으로 표현하는 방법을 고려할 수 있으며, 이때의 랜덤요소는 입력의 랜덤요소인  $(x-m)$ 이 출력에 선형적으로 나타난다고 가정한다.

$$\hat{y}=M+N(x-m) \quad (2)$$

식(1)의 비선형요소를 식(2)와 같은 형태로 근사시킬 때의 근사식의 평가지표를 실제값  $y$ 의 평균이 근사식  $\hat{y}$ 의 평균과 같도록 하고, 이와 동시에 실제값  $y$ 의 분산과 근사식  $\hat{y}$ 의 분산이 서로 같도록 선택한다. 이와 같은 평가지표를 선택하면, 식(2)에서의  $M$ 과  $N$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E\{y\} &= E\{\hat{y}\} = E\{M+N(x-m)\} \\ &= M \\ E\{(y-E\{y\})^2\} &= E\{(\hat{y}-E\{\hat{y}\})^2\} \\ &= N^2 E\{(x-m)^2\} \\ M &= E\{y\} = E\{\hat{y}\} \\ N^2 &= \frac{E\{(y-E\{y\})^2\}}{E\{(x-m)^2\}} \\ &= \frac{E\{y^2\}-M^2}{E\{(x-m)^2\}} \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)과 식(4)와 같이 구한  $M$ 과  $N$ 을 이용하여 식(2)와 같은 형태의 근사식을 구할 수 있다. 이와 같은 형태의 근사식은 식(1)의 비선형식을 선형화시킨 것과는 다르다. 실제로  $M$ 은  $m$ 과  $P$ 의 복잡한 비선형식으로 표현되며  $N$ 도 마찬가지이다. 다만 비선형요소의 출력  $y$ 를 비랜덤요소와 랜덤요소로 구분하여 표현하되 입력의 평균과 랜덤요소의 함수로 표현하였을 따름이다. 그러나 시스템에 비선형요소가 포함되어 있을 경우에는 이러한 형태로 비선형요소를 표현하여 선형시스템에서와 같은 방법으로 비선형시스템의 추정자를 직접 유도할 수 있는 장점을 지니게 된다. 특히 기존의 테일러다항식을 이용한 선형화 방법들이 동작점 근처에서의 통계적인 특성을 고려하지 않음으로써 발생하는 단점들을 상당히 해소할 수 있다. 즉, 테일러다항식을 이용하였을 때, 함수의 비선형적인 특성에 의하여 평균이나 분산에 관한 오차등이 발생되는데, 여기에서는 근사식의 평균과 분산을 실제값의 평균과 분산과 같도록 하였으므로, 이러한 오차들이 줄어들게 된다.

그러나 실제로 주어진 비선형 함수와, 그 입력의 확률밀도함수에 따라 출력의 정확한 평균과 분산을 구하기란 쉬운일은 아니며, 해석적인 방법으로 구할 수 없는 경우도 있다. 특히 입력의 확률밀도함수가 정규분포를 지니고 있을 경우에는  $M$ 과  $N$  두가지 모두를 해석적인 방법으로 구할 수 있으며, 몇가지 형태의 비선형요소에 대하여 해석적으로 이들을 구하는 방법을 부록에 소개하였다.

이상과 같이 비선형요소가 단일입출력으로 표현

되는 경우에 대하여 선형화과정을 살펴보았다. 그러나 이 결과를 그대로 다변수입출력의 비선형요소에 사용할 수는 없다. 그러면 식(5)와 같이 표현되는 다변수함수에 대한 적용방법을 살펴보자.

$$y = \underline{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)]^T \quad (5)$$

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T \in R^m$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \in R^n$$

식(5)에서 출력  $y$ 는  $f_i(x)$ 의 요소들로 구성되어 있으며, 각각  $n$ 개의 입력  $x_j$ 들로 구성되는 함수들로서 식(6)과 같이 나타나며, 식(7)의 형태로 근사될 수 있다. 여기에서도 각각의  $x_j$ 들은 정규분포로 가정한다.

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

$$\bar{y}_i = M_i + \underline{N}_i^T(x - m) \quad (7)$$

먼저 출력  $y_i$ 의 평균값  $M_i$ 는 식(6)의 평균값과 식(7)의 평균값을 같게하여 직접 구할 수 있다. 즉, 단일입력일 때의 식(3)과 같이 식(7)에서의  $M_i$ 도 식(8)과 같이 주어진다. 또한  $\underline{N}_i$ 도 역시 식(4)에서와 같이 구하기 위하여 실제출력의 분산과 근사식의 출력의 분산을 같게 하여 정리하면 식(9)와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$M_i = E\{y_i\} = E\{f_i(x)\} \quad (8)$$

$$E\{(y_i - M_i)^2\} = \underline{N}_i^T E\{(x - m)(x - m)^T\} \underline{N}_i \quad (9)$$

그러나 식(9)와 같이 주어지는  $\underline{N}_i$ 를 구하는 문제는 쉽지 않다. 식(9)에서보면 미지수인 벡터  $\underline{N}_i$ 의 요소는  $n$ 가 있으나  $\underline{N}_i$ 를 구할 수 있는 방정식은 단 하나뿐이므로 식(9)를 만족하는 해는 수없이 많이 있을 수 있기 때문이다. 특히 출력의 분산정도를 결정하는 요인인 각 입력들의 분산정도가 출력에 독자적으로 영향을 끼친다고 한다면 문제는 쉬울 수 있으나, 여러 입력들의 상호작용으로 나타나는 항들이 존재하므로 이문제는 그리 단순하지는 않다. 이를 구하는 방법의 한가지 예를 부록에 정리하여 보았다.

이와 같이 구한  $M_i$ 와  $\underline{N}_i$ 를 사용하면 식(5)의 근사식은 식(10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{y} = \underline{M} + \underline{N}(x - m) \quad (10)$$

$$\underline{M}^T = (M_1, M_2, \dots, M_m)$$

$$\underline{N}^T = (\underline{N}_1, \underline{N}_2, \dots, \underline{N}_m)$$

이상과 같이 식(1)로 주어지는 비선형요소를 식(2)의 형태로 입력의 랜덤요소와 출력의 랜덤요소가 선형적인 관계를 나타내도록 하는 근사방법에 대하여 살펴보았다. 이 근사방법은 비선형요소의 출력을 그 입력의 통계적인 특성으로 표현하되,

그 근사식의 분산과 평균을 실제 출력의 분산과 평균과 같도록 하는 방법이다. 또한 식(2)에서 알 수 있듯이 출력의 랜덤요소는 입력의 랜덤요소가  $N$ 배 증폭되어 나타난 형태이므로, 그 분포형태는 입력의 분포형태와 같도록 근사한 것이다. 이러한 형태는 랜덤입력 서술함수를 이용하여 선형화시키는 방법과 매우 유사하게 보인다. 그러나 랜덤입력서술함수를 이용하는 방법은 비선형함수의 입력과 출력의 통계적인 특성이 지니는 상관관계로부터 유도되고 있는 반면에, 여기에서는 단지 그 평균과 분산을 실제의 것과 같도록 하여 유도되는 점이 크게 다르다.

실제의 경우에 있어서는 비선형요소의 출력은 그 분포형태가 입력의 분포형태와 같지 않다. 따라서 근사식의 가정은 오차를 유발시키게 된다. 이러한 오차로 인하여다음 장에서 소개되는 최소제곱평균치의 의미를 갖도록 유도하 추정자는 최적추정자가 되지 못한다. 또한 모든 비선형함수에 대하여 식(3)과 식(4)로 주어지는 근사식의 요소들을 구할 수는 없으며, 정규분포를 지니는 입력에 대하여서는 비교적 상당히 많은 경우에 대하여 이들을 구할 수 있으므로 입력의 정규분포성은 상당히 중요한 비중을 차지한다. 실제로 다양한 확률밀도함수를 지닌 입력들에 대한 이와 같은 근사식이 지니는 오차의 정도는, 이를 적용하기에 앞서 검토하여 보아야 할 사항이다. 그러나 대체적으로 시스템에서는 여러 개의 랜덤요소들이 복합적인 상호관계를 갖고 있으며, 비선형요소의 출력은 다른 랜덤요소를 지닌 출력들과 섞여서 다른 요소의 입력으로 사용되는 경우가 많다. 이와 같은 경우에는 중앙극한값 정리에 의하여 여러 랜덤요소들이 섞여진 상태에서의 분포는 정규분포로 접근하게 되어, 정규분포를 지닌 입력에 대한 식(3)과 식(4)의 근사식을 그대로 이용할 수도 있다.

### 3. 준최적추정자

앞에서 설명한 공분산정합법을 이용하여 식(11)와 같이 주어지는 비선형시스템에서의 준최적추정자를 유도하여 보도록 한다.

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{F}x_k + \underline{f}(x_k) + \underline{G}k\underline{w}_k, \quad \underline{x}_0$$

$$\underline{y}_k = \underline{H}x_k + \underline{h}(x_k) + \underline{v}_k \quad (11)$$

식(11)로 주어지는 시스템은 선형관계식  $F, H$ 와 비선형관계식  $\underline{f}(\cdot), \underline{h}(\cdot)$ 로 주어지는 일반적인 비선형시스템이다. 여기에  $\underline{x}_0$ 는 초기치 평균

$m_0$ 와 초기공분산  $P_0$ 의 정규분포라 가정하고,  $w_k$ 와  $v_k$ 는 각각 공분산  $Q_k, V_k$ 를 지니는 영평균 백색 가우시안잡음이라고 가정한다. 또한  $x_k$ 로 표현되는 상태변수는 비선형함수  $f(\cdot)$ 에 의하여 그 정규분포성이 상실되지만, 2장에서 설명한 바와 같은 의미로 정규분포로 근사될 수 있다고 가정한다.

이와 같은 가정아래에서 식(11)로 주어지는 비선형시스템의 최소공분산추정자를 2장에서 설명된 방법을 이용하여 구한 선형화근사식으로부터 유도할 수 있다. 본 논문에서는 이를 수학적귀납법을 이용하여 유도하도록 하겠다.

먼저 초기치  $x_0$ 에 대한 최소공분산추정자를 살펴보자

$x_0$ 의 추정자를  $\hat{x}_0$ 라 하면, 각 상태변수에서 추정오차의 공분산의 합은 식(12)와 같이 주어지며, 식(12)를  $J_0$ 로 표현하고  $E\{x_0^T x_0\} = \text{trace} E\{\hat{x}_0 \hat{x}_0^T\}$ 의 관계식을 이용하면  $J_0$ 는  $\hat{x}_0$ 의 불록함수이므로 그 최소값은  $J$ 의  $\hat{x}_0$ 에 대한 미분치가 0으로 되는 값이 된다. 따라서  $\hat{x}_0$ 은  $E\{x_0\} = m_0$ 이 된다.

$$J_0 = E\{(\hat{x}_0 - x_0)^T (\hat{x}_0 - x_0)\} \quad (12)$$

여기에서  $n=k-1$ 일때 측정치  $Y_{k-1} = \{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$ 로부터 구한 추정치를  $\hat{x}_{k-1}$ 로 나타내고, 이때의 추정오차의 공분산을  $P_{k-1}$ 이라 표시하도록 한다. 그러면,  $n=k$ 일때의 측정치  $Y_{k-1}$ 에 의한 최소공분산 추정치를  $\hat{x}_k$ 라 하면, 그때의 추정오차의 공분산은 식(13)과 같이  $J_{kp}$ 로 주어진다. 따라서 이와같이 주어지는  $J_{kp}$ 를 최소화시키는 추정치  $\hat{x}_k$ 는 식(14)와 같이 구할 수 있다.

$$J_{kp} = E\{(\hat{x}_k - x_k)^T (\hat{x}_k - x_k) | Y_{k-1}\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= E\{x_k | Y_{k-1}\} \\ &= E\{F\hat{x}_{k-1} + f(x_{k-1}) + G_{k-1}w_{k-1} | Y_{k-1}\} \\ &= F\hat{x}_{k-1} + E\{f(x_{k-1}) | Y_{k-1}\} \\ &= F\hat{x}_{k-1} + M(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= (F + N(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}))P_{k-1}(F + N(\hat{x}_{k-1}, \\ & P_{k-1}))^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T \end{aligned} \quad (15)$$

또한 이때의 추정오차의 분산은 식(15)와 같이 구할 수 있으며, 식(14)와 식(15)에서의  $M(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1})$ 와  $N(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1})$ 는 2장에서 설명된 비선형함수  $f(\cdot)$ 의 통계적인 선형화의 변수이다.

여기에서  $n=k$ 일때의 측정치  $y_k$ 가 추가된 상태에서의  $Y_k$ 로부터 식(16)으로 주어지는 추정오차의 공분산  $J_{ku}$ 를 최소로 하는 추정치  $\hat{x}_k$ 를 고려할 수 있다. 이때 추정치  $\hat{x}_k$ 는  $Y_k$ 의 조건평균으로 나타

나며, 이를 구하기 위하여 식(17)과 같이  $\hat{y}_k$ 의 직교성을 이용하는 선형구조의 추정자를 설정하도록 한다. [1, 3] 여기에서의  $\hat{y}_k$ 는 식(18)로 주어지는  $Y_{k-1}$ 로부터 추정된  $y_k$ 의 추정오차이다.

$$J_{ku} = E\{(\hat{x}_k - x_k)^T (\hat{x}_k - x_k) | Y_k\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= E\{x_k | Y_k\} \\ &= \hat{x}_k + K\hat{y}_k \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= y_k - E\{Hx_k + h(x_k) | Y_{k-1}\} \\ &= y_k - H\hat{x}_k - M_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k) \end{aligned} \quad (18)$$

식(17)과 같이 주어지는  $\hat{x}_k$ 을 식(16)에 대입하여 선형구조를 지니는 추정자의 필터이득  $K$ 를  $J_{ku}$ 가 최소로 되도록 선택하면 식(19)와 같이 나타난다. 이와같이 구한  $K$ 를 이용하면 식(17)로 주어지는 추정치  $\hat{x}_k$ 은 최소공분산추정법을 만족하는 추정치가 된다.

$$K = E\{(\hat{x}_k - x_k)\hat{y}_k^T\} E\{\hat{y}_k \hat{y}_k^T\}^{-1} \quad (19)$$

식(19)에서  $E\{(\hat{x}_k - x_k)\hat{y}_k^T\}$ 는  $x$ 와  $h(x)$ 의 곱으로 표현되는 새로운 비선형함수로 표현할 수 있으며, 이는 식(20)과 같이 비선형함수에서의 랜덤입력서술함수의 랜덤이득  $R_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k)$ 의 형태로 표현되고, 또한  $E\{\hat{y}_k \hat{y}_k^T\}$ 는 2장에서 설명된 선형화방법에 따라 식(21)과 같이 표현된다.

$$E\{(\hat{x}_k - x_k)\hat{y}_k^T\} = (H + R_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k))\bar{P}_k \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E\{\hat{y}_k \hat{y}_k^T\} &= (H + N_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k))\bar{P}_k \\ & (H + N_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k))^T + V_k \end{aligned} \quad (21)$$

이와 같이 구한  $K$ 는 식(22)과 같이 정리되며, 이를 식(18)에 대입하여 얻은  $\hat{x}_k$ 의 분산은 식(23)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} K &= (H + R_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k))\bar{P}_k((H + N_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k))\bar{P}_k \\ & (H + N_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k))^T + V_k)^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

$$P_k = \bar{P}_k - K(H + R_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k))\bar{P}_k \quad (23)$$

이상으로 초기치  $x_0$ 의 평균과 분산으로부터 측정치  $y_1$ 의 정보를 사용한 다음 상태의 추정치  $\hat{x}_1$ 를 구할 수 있으며,  $\hat{x}_1$ 으로부터 시간이 전개됨에 따라 식(8)과 식(9), 그리고 식(10)과 식(16), 식(17)을 순차적으로 계산하면, 주어진 조건아래에서의 매시간의 최소공분산추정치를 구할 수 있게 된다.

이와 같이 유도된 최소공분산추정법은 선형화된 근사식에 있어서 주어진 가정아래 최적추정자의 성질을 지니고 있지만, 실제로는 비선형요소에 의하여 각 상태변수들의 정규분포성이 상실되며, 매 시간마다 계산되는  $M(\hat{x}_k, P_k)$ 와  $N(\hat{x}_k, P_k)$ , 그리고  $M_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k)$ 와  $N_h^T(\hat{x}_k, \bar{P}_k)$ , 그리고  $R_h(\hat{x}_k, \bar{P}_k)$ 는  $f(\cdot)$ 와  $h(\cdot)$ 의 비정규성으로 인하여 오차를 지니

게 된다. 따라서 유도된 최소공분산추정법은 최적 추정자가 되지 못한다.

#### 4. 시뮬레이션

3장에서 유도한 최소공분산추정자의 성능을 알아보기 위하여 식(24)와 같은 간단한시스템을 설정하여 시뮬레이션을 실행하여 보았다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - ax_k^3 + w_{k+1} \\ y_k &= \sin(x_k) + v_{k+1} \end{aligned} \quad (24)$$

$x_0 \sim N(m_0, P_0)$   
 $x_k \sim N(0, Q), v_k \sim N(0, R)$   
 $E\{w_k v_j\} = 0$

식(24)로 주어지는 시스템은 백색 가우시안잡음인  $w_k$ 로 구동되는 시스템으로서,  $a$ 가 0이면 선형시스템을,  $a$ 가 0이 아닐 때에는 비선형시스템을 각각 의미한다. 이와같이 주어지는 시스템에서 앞의 3장에서 유도한 최소공분산추정자의 관계식을 구하면 식(25)와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \bar{x}_{k-1} - a\bar{x}_{k-1}^3 - 3a\bar{x}_{k-1}P_{k-1} \\ \bar{P}_k &= P_{k-1} + 9a^2\bar{x}_{k-1}^4\bar{P}_{k+1} \\ &\quad + 36a\bar{x}_{k-1}\bar{P}_{k-1} + 15a\bar{P}_{k-1} \\ &\quad - 6a\bar{x}_{k-1}\bar{P}_{k-1} - 6a\bar{P}_{k-1} + Q \\ \bar{y}_k &= y_k - \exp(-\bar{P}_k/2)\sin(\bar{x}_k) \end{aligned} \quad (25)$$

$$K_k = \frac{\bar{P}_k \exp(-\bar{P}_k/2) \cos(\bar{x}_k)}{0.5 - \exp(-2\bar{P}_k) \cos(2\bar{x}_k) - \exp(-\bar{P}_k) \sin^2(\bar{x}_k) - R}$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k \bar{y}_k$$

$$P_k = \bar{P}_k - K_k \exp(-\bar{P}_k/2) \cos(\bar{x}_k) \bar{P}_k$$

식(25)로 주어지는 최소공분산추정자는 확장칼만필터에서와 같이 전상태의 추정치로부터 다음상

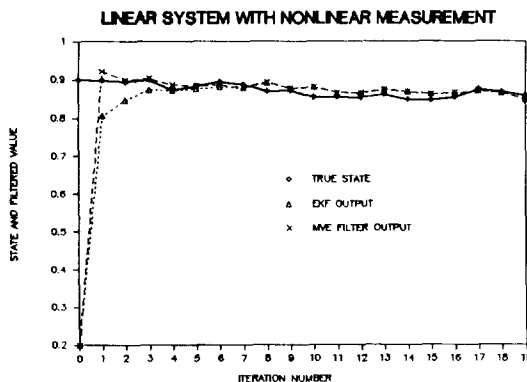


그림 1. 선형시스템에서의 추정치  
Fig. 1. Estimate of linear system

태의 필터이득 등이 결정되는데, 이때 전상태의 추정치 이외에도 그 공분산에 대한 정보가 같이 사용된다. 따라서 확장칼만필터와 같은 구조를 지니고 있지만, 그 계산은 상당히 복잡하다. 이는 2차 비선형필터에서 추정치의 바이어스를 없애기 위하여 그 공분산을 사용하는 경우와는 그 의미가 다르다.

이와 같이 구성된 주어진 시스템의 최소공분산추정자를 확장칼만필터와 같은 조건으로 시뮬레이션을 통하여 비교하여 보았다. 먼저 그림 1은  $a=0$ 으로 주어지는 선형시스템에서 비선형추정치로부터의 추정능력을 도시한 것이다. 시뮬레이션에서 초기치의 공분산은 0.3으로 하였고, 시스템의 초기치는 0.9, 추정자들의 초기치는 0.2로 주었으며, 시스템잡음의 공분산  $Q$ 는 측정잡음의 공분산  $R$ 과 같이 0.0001로 하였다. 그림에서 보면, 확장칼만필터는 3, 4단계 후에 정상상태에 도달하고

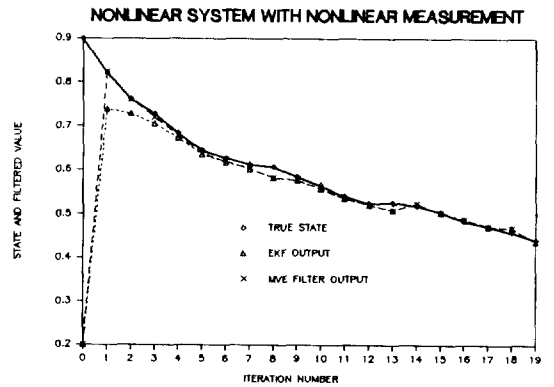


그림 2. 비선형시스템에서의 추정치 I  
Fig. 2. Estimate of nonlinear system I

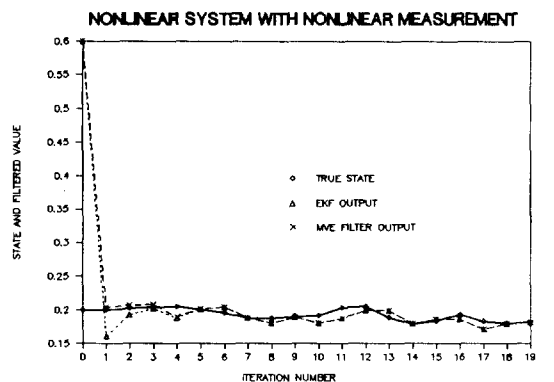


그림 3. 비선형시스템에서의 추정치 II  
Fig. 3. Estimate of nonlinear system II

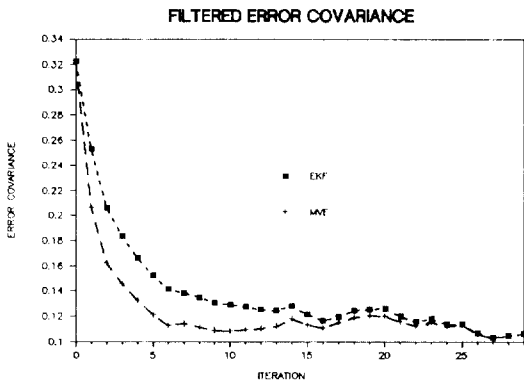


그림 4. 추정자들의 추정오차 분산  
Fig. 4. Covariance of estimated Value

있는 반면에, 제안된 추정자는 이보다 빠른 속도로 정상상태에 도달하고 있음을 보여주고 있다. 이와 같은 특성은 시스템이 비선형일 경우에도 나타나는데, 그림 2는 그림 1의 경우와 같은 조건에서 시스템이  $\alpha=0.1$ 의 비선형성을 지니고 있는 경우의 확장칼만필터와 제안된 추정자의 추정능력을 도시한 것이다. 비선형시스템의 경우에서도 확장칼만필터는 제안된 추정자보다 느린 속도로 수렴하고 있는 것을 볼 수 있다. 이상의 결과들은 추정자들의 초기치가 실제 시스템의 초기치보다 큰 경우만을 살펴보았는데, 이와는 반대로 시스템의 초기치가 추정자들의 초기치보다 큰 경우를 고려할 수 있다. 그림 3은 실제 시스템의 초기치를 0.2, 추정자들의 초기치를 0.6으로 하고, 그 초기분산  $P_0$ 를 0.4, 시스템의 비선형요소인  $\alpha$ 를 0.3, 그리고 각 잡음의 크기는 앞에서와 같은 조건으로 하였을 때의 결과를 보여주고 있다. 여기에서도 앞에서의 결과와 같이 제안된 추정자의 빠른 수렴특성을 보여주고 있다. 그러나 추정자들이 충분히 수렴한 후에는 확장칼만필터와 제안된 추정자는 모두 비슷한 크기의 추정오차를 보여주고 있다. 이는 시스템이 백색가우시안 잡음으로 구동됨으로 인한 결과이다.

이상으로 살펴본 시뮬레이션의 결과에서 제안된 추정자는 확장칼만필터보다 빠른 수렴특성을 지니고 있음을 살펴볼 수 있었다. 여기에서는 이와 같은 특성을 몬테칼로시뮬레이션 방법으로 확인하여 보았다. 몬테칼로시뮬레이션의 조건은 시스템의 초기치를 0.3으로 하고 추정자들의 초기치는 초기공분산을 0.3으로 하여 발생시킨 값으로 하였다. 그림 4는 이와 같은 조건으로 100회 실행의 결과로부터 얻는 확장칼만필터의 추정오차의 제곱평균

값과 제안된 추정자의 추정오차의 제곱평균값을 보여주고 있다. 그림에서 초기오차의 분산이 0.3이 아니고 0.323으로 나타난 것은 100회 실행으로 얻은 몬테칼로 분석방법의 결과가 1% 이내의 오차를 가질 확률이 0.82임을 상기시켜주고 있다. 또한 그림에서 알 수 있는 결과는 앞에서의 결과를 확인하여 주고 있다. 즉 제안된 추정자의 추정오차의 크기는 확장칼만필터의 추정오차의 크기보다 적으며, 빨리 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

이상으로 살펴 본 시뮬레이션의 결과에서 제안된 최소공분산추정자는 선형시스템과 비선형시스템 모두에서 확장칼만필터보다 적은 오차분산을 지닌 추정능력을 지니고 있으며, 또한 그 수렴특성도 우수함을 살펴볼 수 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 이산 비선형시스템에 적용될 수 있는 최소공분산의 의미를 지닌 추정자를 제안하였다. 비선형시스템의 추정자로서 일반적으로 사용되어 오던 확장칼만필터가 비선형함수의 테일러 다항식으로부터 고차항을 절삭하여 얻어지는 방법인데 반하여, 제안된 방법은 비선형함수에서 통계적인 특성을 고려하여 선형화시키는 방법을 채택함으로써 절삭오차가 없이 구성되었다. 또한 선형화근사식이 지니는 평균과 분산에 대한 정확한 정보를 이용함으로써 추정오차의 공분산이 최소가 되도록 하는 최소공분산의 의미를 지닌 추정자를 구성할 수 있었다.

이와 같이 구성된 최소공분산추정자는 그 유도과정에서 매 시간마다 상태변수의 확률밀도함수에 대한 가정으로 인하여 최적추정자의 성질을 유지하지는 못한다. 그러나 시뮬레이션의 결과에서 알 수 있듯이 그 추정능력은 확장칼만필터에 비하여 수렴특성이 우수함을 보여주고 있다.

이상과 같이 살펴본 제안된 추정자는 그 통계적 선형화과정에서 다소 복잡한 과정을 거치기는 하지만 그 만큼의 우수한 추정능력을 보여주고 있으며, 그 구조도 확장칼만필터의 구조와 같이 전상태의 추정치를 이용하게 되어있는 순환구조를 지니고 있으므로, 기존의 확장칼만필터가 사용되는 곳에 모두 사용될 수 있음을 보여준다.

### 부록 1. 멱급수다항식 (polynomial nonlinearity)

다음의 식(26)으로 주어지는 멱급수다항식에서

정규분포의 입력이 인가되는 경우에는 식(3)과 식(4)의  $M$ 과  $N$ 을 직접 적분하여 구할 수 있다.

$$y = \sum_n c_n x^n, \quad x \sim N(m, \sigma^2) \quad (26)$$

$$M = E\{y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( \sum_n c_n x^n \right) \exp\left(\frac{-1}{2} \left[ \frac{x-m}{\sigma} \right]^2\right) dx \quad (27)$$

$$N^2 \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( \sum_n c_n x^n \right)^2 \exp\left(\frac{-1}{2} \left[ \frac{x-m}{\sigma} \right]^2\right) dx - M^2 \quad (28)$$

### 부록 2. 삼각함수 (trigonometric nonlinearity)

다음의 식(29)로 주어지는 삼각함수에 정규분포의 입력이 인가되는 경우에는 삼각함수를 식(30)과 식(31)과 같이 지수함수로 바꾸어  $M$ 과  $N$ 을 구할 수 있다.

$$y = \cos(x), \quad x \sim N(m, \sigma^2) \quad (29)$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \exp\left(\frac{-1}{2} \left[ \frac{x-m}{\sigma} \right]^2\right) dx = \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2}\right) \cos(m) \quad (30)$$

$$E\{y^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \exp\left(\frac{-1}{2} \left[ \frac{x-m}{\sigma} \right]^2\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-2\sigma^2) \cos(2m) \\ N^2 \sigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-2\sigma^2) \cos(2m) - \exp(-\sigma^2) \cos^2(m) \quad (31)$$

### 부록 3. 구간적 선형함수 (piecewise-linear function)

구간적으로 선형적인 특성을 지니는 비선형요소로는 포화함수, 양자화함수, 불감대를 지닌 함수 등으로 제어계에 자주 사용되는 형태가 많다. 이들 함수에서  $M$ 과  $N$ 을 구하기 위하여 식(32)와 같은 보조함수들을 사용한다.

$$PF(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \\ PI(x) = \int_{-\infty}^x PF(s) ds \quad (32)$$

$$GI(x) = \int_{-\infty}^x PI(s) ds$$

이와 같은 보조함수를 이용하여 식(33)으로 주어지는 포화함수의  $M$ 과  $N$ 을 구하면 식(34)와 식(35)의 관계식을 얻을 수 있다.

$$y = \begin{cases} x & \text{if } |x| \leq a \\ a \operatorname{sign}(x) & \text{if } |x| > a \end{cases}, \quad x \sim N(m, \sigma^2) \quad (33)$$

$$M = \sigma \left[ GI\left(\frac{a+m}{\sigma}\right) - GI\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \right] - m$$

$$N^2 \sigma^2 = a^2 - (\sigma^2 + m^2 - a^2) M_I + 2\sigma m M_F - a M_J$$

$$M_I = PI\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - PI\left(\frac{-a-m}{\sigma}\right)$$

$$M_F = PF\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - PF\left(\frac{-a-m}{\sigma}\right)$$

$$M_J = \left[ \frac{a-m}{\sigma} \right] PF\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - \left[ \frac{-a-m}{\sigma} \right] PF\left(\frac{-a-m}{\sigma}\right)$$

### 부록 4. 다변수 함수 (multi-input nonlinear function)

다변수 함수의 경우에서  $M$ 은 유일하게 결정되지만  $N$ 은 그렇지 않다. 여기에서는 식(34)와 같이 주어지는 함수에서  $M$ 과  $N$ 을 구하는 한가지 방법을 소개한다.

$$y = x_1^2 x_2 \quad (34)$$

$$x_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2), \quad x_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$$

$$E\{x_1 x_2\} = m_1 m_2$$

$$M = E\{y\} = m_1^2 m_2 + \sigma_2^2 m_2 \quad (35)$$

$$E\{(y - E\{y\})^2\} = E\{y^2\} - M^2 = (4m_1^2 m_2^2) \sigma_1^2 + m_1^4 \sigma_2^2 + (6m_1^2 + 3\sigma_1^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 \quad (36)$$

식(36)과 같이 주어지는 다변수 함수의 출력의 분산에서 첫번째 항은  $x_1$ 의 랜덤요소에 의한 출력의 랜덤요소이고, 두번째 항은  $x_2$ 의 랜덤요소에 의한 출력의 랜덤요소이다. 이와 같이 입력의 랜덤요소가 출력의 랜덤요소에 끼치는 영향을 구분할 수 있는 경우도 있지만 식의 세번째의 항과 같이  $x_1$ 의 랜덤요소와  $x_2$ 의 랜덤요소가 혼합되어 출력의 랜덤요소에 영향을 미치는 항들도 발생되게 된다. 이러한 경우에는  $x_1$ 과  $x_2$ 의 랜덤요소들이 균일하게 출력에 영향을 끼치는 것으로 고려할 수 있으며, 이들의 효과를 절반씩 나누어 처리할 수 있다. 이와 같이 구한  $N_1$ 과  $N_2$ 는 식(37)과 같이 나타낸다.

$$N_1^2 = 4m_1^2 m_2^2 + \frac{1}{2}(6m_1^2 + 3\sigma_1^2)\sigma_2^2 \quad (37)$$

$$N_2^2 = m_1^4 + \frac{1}{2}(6m_1^2 + 3\sigma_1^2)\sigma_1^2$$

### 참 고 문 헌

- [1] R.E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," Trans. ASME, J. Basic Eng., ser. D., vol. 82, pp. 35~45, 1960.
- [2] A.H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York : Academic, 1970.
- [3] R.G. Brown *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, 1983.
- [4] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, Mass : MIT Press, 1974.
- [5] Richard C. Booton, Jr., "Nonlinear Control Systems with Random Inputs," Transactions of the IRE, Professional Group on Circuit Theory, Vol. CT-1, March 1954, No. 1, pp. 2~7.
- [6] Roger J. Phaneuf, "Approximate nonlinear estimation," Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, May 1, 1968.
- [7] Y. Sunahara, "An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems," Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 92, pp. 385~393, Jun. 1970.
- [8] James H. Taylor, "Handbook of the direct statistical analysis of missile guidance systems via CADET™," The Analytic Science Corp., Report No. TR-385-2, May 1975.
- [9] James H. Taylor and Charles F. Price, "Direct statistical analysis of missile guidance systems via CADET™," The Analytic Science Corp., Report No. ONR-CR215-214-3, Mar. 1976.
- [10] Gelb, A. and R.S. Warren, "Direct statistical analysis of nonlinear systems: CADET," AIAA Journal, Vol. 11, no. 5, pp. 689~694, May 1973.
- [11] 이장규, 이연석, "비선형시스템의 새로운 통계적선형화방법," 1990년도 전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 72~76, 1990. 7.