

출력궤환가변구조제어를 위한 동적스위칭함수의 제안과 응용

A new Dynamic Switching Function for Output Feedback Variable Structure Control

李 起 常* · 宋 明 現** · 趙 相 鎬***
(Kee-Sang Lee · Myung-Hyun Song · Sang-Ho Cho)

Abstract - In order to remove the assumption of full state availability which is one of the major difficulties with the practical realization of variable structure control systems, a new switching function with a dynamic structure is proposed. And the control performances of the output feedback variable structure control systems with the dynamic switching function are evaluated through simulation studies.

The proposed dynamic switching function is driven by small number of measured output and input variables while conventional static switching function requires full state information. Therefore, the proposition of the dynamic switching function makes practical implementation of output feedback variable structure control scheme possible for the systems with unmeasurable state variables, high order systems and large scale systems that the conventional variable structure control schemes with static switching function cannot be applied. In the variable structure control systems with the dynamic switching function, desired control performance can be guaranteed by proper choice of design parameters such as poles of switching function dynamic equation and switching control gains even though small number of measured output and input variables are provided as shown in simulation results.

1. 서 론

최근 가변구조제어기법이 제어관련분야에서 매우 활발히 연구되고 있다. 가변구조제어는 프란트의 상태가 스위칭평면에 도달하여 슬라이딩운동을 하도록 고속스위칭입력을 인가하는 제어방식으로 스위칭평면을 적절히 설계함으로써 계통안정화,

*正 會 員：檀國大 工大 電氣工學科 副教授·工博
**正 會 員：順天大 工大 電氣工學科 專任講師·工博
***正 會 員：檀國大 大學院 電氣工學科 碩士課程
接受日字：1990年 11月 14日
1次修正：1991年 6月 1日
2次修正：1991年 6月 26日

조정(regulation), 기준입력추적 등의 제어목적을 수행할 수 있다. 특히 가변구조제어는 슬라이딩모우드에서 프로세스 파라미터의 변화, 모델링오차 및 외란에 대하여 둔감하고 응답의 속응성면에서도 다른 제어기법에 비해 우월하기 때문에 자동비행제어계, 로보트매니퓰레이터 및 각종 전동기를 이용한 위치, 속도제어계 등에 적극적으로 도입되고 있으며 이론적 측면에서도 비표준형(non-canonical form) 프로세스, 다변수계통 및 일부 비선형계통 등에 대한 제어이론이 제안 발전되어 왔다. [1-3]

그러나 이제까지의 연구결과는 이론적, 실제적으로 몇가지 문제점을 갖고 있다. [4] 그중 제어계 실현과 관련된 가장 중요한 문제의 하나는 스위칭함수와 입력의 제산에 모든 상태변수의 정보가 요구된다는 사실이다. [5] 이문제는 가변구조제어기법을 측정불가능한 변수가 포함된 계통 및 모든 상태변수가 측정가능하다 하더라도 이를 위해 과다한 측정경비가 요구되는 고차계통 또는 대단위 계통에 확장적용하기 위해 가장 먼저 해결되어야 할 중요연구과제이면서도 Decarlo의 지적과 같이 아직 특별한 대책이 제시되지 못하고 있는 실정이다.

현재까지 비측정변수를 포함한 프로세스의 가변구조제어와 관련된 모든 상태변수의 가용성(full state availability) 문제는 서로 다른 출발점을 가진 두 가지 접근방법에 의해 그 해결이 시도되고 있다. 그중 하나는 모든 상태변수가 측정가능하다는 가정하에 스위칭함수와 제어입력결정논리를 기존기법에 의해 설계하고 상태변수의 추정을 위해 Luenberger 관측자를 별도로 도입하는 방법으로 이 방법은 Utkin에 의해 강력히 추천된 바 있다. [5] 또 다른 접근방법은 Chun 등과 같이 측정변수의 선형결합과 그 도함수를 적절히 결합하여 그 결과가 모든 상태변수를 고려한 스위칭함수와 같도록 계수를 조정하는 방법과 비측정변수를 스위칭함수 구성에 포함시키지 않는 방법을 들 수 있다. [6, 7]

그러나 이 두 방법은 모두 실제적 적용에 다음의 문제점을 갖고 있다. 전자의 경우에는 일반적으로 계통차수와 같은 차수를 가진 관측자방정식이 별도로 추가되므로 특히 고차계통의 경우 고속스위칭을 요구하는 가변구조제어계의 실현이 매우 곤란하여 Utkin의 추천에도 불구하고 이용도는 매우 낮은 실정이다. 후자는 계통방정식이 원천적으로 위상변수표준형인 경우, 측정출력의 미분치가 비측정변수의 값을 제공할 수 있으므로 측정출력과

그 미분으로 구성된 스위칭함수가 모든 상태변수를 포함한 스위칭함수와 일치하도록 선정될 수 있다. 그러나 이 방법은 비표준형모델을 갖는 계통에의 적용이 불가능 할 뿐 아니라 측정출력의 연속도함수를 포함하기 때문에 잡음에 의해 제어계의 성능이 크게 감퇴될 수 있으며 이론적 확장이 거의 불가능한 것으로 판단된다. 또한 White의 연구결과는 제안자 스스로의 언급처럼 두 개이상의 비측정변수가 있을 경우 적용이 매우 곤란하고 표준형모델을 가진 계통만을 대상으로 전개되었다는 문제점을 갖고있어 일반적 시스템에의 적용은 불가능하다.

따라서 현존하는 접근방식의 문제점을 동시에 해결할 수 있는 스위칭함수와 출력회환가변구조제어방식의 제안은 이론적측면과 가변구조제어기법의 적용범위 확장이라는 실질적측면에서 매우 중요한 의의를 갖는다고 하겠다. 본 연구에서는 이러한 목적을 달성할 수 있는 스위칭함수와 이를 이용한 제어계설계기법을 제안함에 구체적 목적을 두었으며 이를 위해 측정출력과 입력에 의해 구동되는 동태방정식으로 표현된 새로운 형태의 스위칭함수와 그 설계기법을 제시하고 이와 함께 사용될 수 있는 출력회환제어입력에 대해 고찰하였으며 마지막으로 수치예를 통해 그 유용성을 입증하기로 한다.

2. 가변구조제어의 기본이론

전개의 편의상 다음의 선형시불변 단일입력계통을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1b}$$

여기서 x 는 n 차원 상태벡터, u 는 스칼라입력, y 는 q 차원 출력벡터 이며 A, B, C 는 각각 $(n, n), (n, 1)$ 및 (q, n) 차원의 행렬이다.

가변구조제어에서 제어입력은 스위칭평면에서 스위칭논리에 따라 계통구조를 변화시켜 슬라이딩모우드가 발생하도록 식(2)의 형태로 주어지며

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{if } s(x, t) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{if } s(x, t) < 0 \end{cases} \tag{2}$$

위에서 스위칭함수 $s(x, t)$ 는 식(3)과 같이 상태변수의 선형결합으로 주어진다.

$$s(x, t) = Px(t) \tag{3}$$

식(3)에서 P 는 $(1, n)$ 차원 행렬이다.

또한 스위칭평면에서 슬라이딩모우드가 일어나

기 위한 조건은

$$s(x, t) \dot{s}(x, t) < 0 \quad (4)$$

이며 슬라이딩모우드 내에서 상태체적은 다음 조건을 만족하므로 계통파라미터의 변화, 모델링오차 등에 둔감한 특성을 나타낸다.

$$s(x, t) = 0 \quad (5a)$$

$$\dot{s}(x, t) = P\dot{x}(t) = P[Ax(t) + Bu(t)] = 0 \quad (5b)$$

식(5b)를 만족하는 식(6)의 입력을 등가입력 (U_{eq})이라 하며 이것은 슬라이딩모우드를 일으켜 주는 스위칭입력의 평균치에 해당한다.

$$U_{eq}(t) = -(PB)^{-1}PAx(t) \quad (6)$$

이 등가입력은 슬라이딩모우드가 안정하도록 스위칭함수의 계수행렬 P 를 선정하는데 사용된다. 이를 위해 식(6)을 식(1)에 대입하면 슬라이딩모우드에서 계통의 동태방정식은 다음과 같고

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [I - B(PB)^{-1}P]Ax(t) \\ &= A_{eq}x(t) \end{aligned} \quad (7)$$

행렬 P 는 A_{eq} 의 모든 고유치가 부의 실수부를 갖도록 선정된다.

위의 기본적 가변구조제어와 관련하여 주지해야 할 사실은 식(2)에 기술된 바와 같이 슬라이딩모우드의 발생을 위한 제어입력과 입력결정논리에 사용되는 스위칭함수가 모든 상태의 정보를 요구하며, 이중 제어입력은 상태회환입력 대신 출력회환입력을 사용하는 방법을 모색할 수도 있고 입력의 최대최소치가 알려진 경우 온-오프제어입력을 도입함으로써 모든 상태의 정보없이도 효과적인 제어를 수행할 수 있으나 입력결정논리를 위한 스위칭함수에는 반드시 모든 상태변수정보가 필요하다는 사실이다.

3. 제안된 동적스위칭함수와 설계조건

본절에서는 모든 상태변수의 가용성 문제와 관련하여 서론에서 언급한 두접근방법의 문제점을 해결해줌으로서 가변구조제어를 대규모계통 및 고차계통에 적용가능케 할 수 있는 스위칭함수를 제안한다.

제안된 스위칭함수는 측정출력 $y(t)$ 와 입력 $u(t)$ 에 의해 구동되는 동태방정식으로 표현되며 식(8)과 같다.

$$D(z, y, u, t) = Ly(t) + Qz(t) \quad (8a)$$

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Jy(t) + Gu(t) \quad (8b)$$

여기서 $z(t)$ 는 식(1)의 계통에 대한 가관측지수를 r 이라할때 $r-1$ 을 최대차원으로 갖는 벡터로서 식(9)와 같이 전체상태변수들의 선형결합으로 표현되며 계수행렬은 $z(t)$ 의 차원에 따라 적절한 차원을 갖는다.

$$z(t) = Tx(t) \quad (9)$$

만일 식(9)의 관계가 항상 성립된다고 가정하면 제안된 스위칭함수와 그 도함수는 다음과 같이 표현되며

$$\begin{aligned} D(z, y, u, t) &= Ly(t) + Qz(t) \\ &= (LC + QT)x(t) \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}(z, y, u, t) &= L\dot{y}(t) + Q\dot{z}(t) \\ &= (LCA + QJC + QFT)x(t) \\ &\quad + (LCB + QG)u(t) \end{aligned} \quad (10b)$$

식(10)으로부터 등가입력을 구한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_{eq}(t) &= -(LCB + QG)^{-1} \\ &\quad (LCA + QJC + QFT)x(t) \end{aligned} \quad (11)$$

스위칭함수는 슬라이딩모우드에서 계통이 안정하도록 결정되어야 하며 이를 위해서는 식(1)의 상태방정식에 식(11)의 등가입력을 도입한 결과식인 식(12)에서 A_{eq} 의 고유치가 부의 실수부를 갖도록 파라미터 L, Q, G, J, F 및 T 를 선정하여야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \{A - B(LCB + QG)^{-1} \\ &\quad (LCA + QJC + QFT)\}x(t) \\ &= A_{eq}x(t) \end{aligned} \quad (12)$$

기본적인 가변구조제어계의 경우 스위칭함수의 설계는 식(7)에 근거한 극점배치에 의해 쉽게 수행될 수 있지만 제안된 스위칭함수의 경우에는 식(12)로부터 직접 L, Q, G, J, F 및 T 를 구하는 것이 불가능하다. 동적스위칭함수 설계시 고려해야 할 또 하나의 중요사항은 출력회환의 경우와 같이 상태변수 중 비측정변수가 존재하는 경우 초기시간에서 식(9)의 관계를 충족시킬 수 없고 따라서 가능한 한 짧은 시간내에 이 편차가 없어지도록 설계되어야 한다는 사실이다.

따라서 본절에서는 먼저 일반적인 방법에 의해 식(3)의 정적스위칭함수를 구하고 이를 기준스위칭함수로 설정하여 측정입출력에 의해 구동되는 동적스위칭함수가 점근적으로 기준스위칭함수와 같아지도록 파라미터를 결정하기 위한 방법을 기술한다.

먼저 두 스위칭함수 $s(x, t)$ 와 $D(z, y, u, t)$ 가 점근적으로 일치하기 위한 조건은 다음 정리와 같다.

[정리 1] $s(x, t)$ 와 $D(z, y, u, t)$ 의 점근적 일치 조건

i) $LC + QT = P$ (13)

ii) $TA - JC = FT$ (14)

iii) $G = TB$ (15)

iv) 행렬 F 의 모든 고유치가 부의 실수부를 가질 것

증명. 위 정리는 2절의 결과와 3절의 결과를 직접 비교함으로써 매우 쉽게 입증된다. 즉, 조건 (i)은 식(3)과 식(8)의 직접 비교에서, 그리고 조건 (ii)와 (iii)은 등가입력 식(6)과 식(11)의 비교와 조건(i)의 도입으로 증명된다. 조건 (iv)는 $Tx(t)$ 와 $z(t)$ 의 편차 $e(t) = Tx(t) - z(t)$ 에 관한 동특성 방정식을 구함으로써 증명된다. 편차방정식을 구하기 위해 식(1)에서 $Tx(t)$ 를 구한 다음 $Jy(t) = JCx(t)$ 를 더하고 빼면 식(16)이 얻어지며,

$$T\dot{x}(t) = (TA - JC)x(t) + Jy(t) + Gu(t) \quad (16)$$

이식에 조건 (ii)를 대입하면 식(17)이 얻어진다.

$$T\dot{x}(t) = FTx(t) + Jy(t) + Gu(t) \quad (17)$$

이식에서 식(8b)를 빼면 다음의 편차방정식이 얻어진다.

$$\dot{e}(t) = Fe(t) \quad (18)$$

따라서 행렬 F 의 모든 고유치가 부의 실수부를 가지면 초기편차 $e(0)$ 에 관계없이 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = Tx(t)$

가 되므로 $D(z, y, u, t)$ 도 $s(x, t)$ 에 수렴한다.

이제 동적스위칭함수의 설계문제는 계통파라미터 A, B, C 와 기준스위칭함수의 계수행렬 P 가 주어진 상태에서 정리[1]을 만족하는 L, Q 및 T 를 결정하는 문제로 귀결되고 그 결정은 다음절에 기술한 간단한 알고리즘에 의해 수행될 수 있다.

4. 동적스위칭함수의 설계 알고리즘

본 연구에서 제안한 동적스위칭함수의 설계는 결국 정리에 기술된 조건을 만족하는 파라미터 P, L, Q, T, F, J 및 G 의 선정문제로 귀착된다. 따라서 본절에서는 이들 파라미터의 결정을 위한 간단한 알고리즘을 소개하기로 하겠다. 이 알고리즘과 그 증명은 참고문헌[8]을 참조하여 쉽게 도출될 수 있다.

step 1) 식(7)의 A_{eq} 가 안정하도록 $(1, n)$ 차원의

행렬 P 를 선정.

step 2) 스위칭함수의 동태방정식의 차수(벡터 $z(t)$ 의 차원) 결정. $z(t)$ 의 차원은 식(1)에서 $[C : A]$ 의 가관측지수를 r 이라할 때, 최대 $r-1$ 이며 여기서 제시한 알고리즘의 경우 $z(t)$ 는 $r-1$ 차원 벡터이다.

step 3) $(r-1, r-1)$ 차원의 행렬 F 를 다음의 대각행렬로 선정하고

$$F = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_{r-1}) \quad (19)$$

이 행렬의 고유치가 부의 실수값을 가지면서 행렬 A 의 고유치와 모두 다른값을 갖도록 f_i 를 임의 선정한다. 여기서 행렬 F 의 고유치를 A 의 고유치와 다르게 선정하는 이유는 식(14)가 T 에 관한 유일한 해를 갖게하기 위함이다.

step 4) $(1, r-1)$ 차원의 행렬 Q 의 모든 요소를 $q_i = 1$ 로 선정.

step 5) $(1, q)$ 차원의 행렬 $L = (l_1, l_2, \dots, l_q)$ 와 $(r-1, q)$ 차원의 행렬

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & \dots & j_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_{r-1,1} & j_{r-1,2} & \dots & j_{r-1,q} \end{bmatrix} \quad (20)$$

는 측정출력과 관계된 파라미터로서 다음식에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned} [L : \text{1st row of } J : \dots : (r-1)\text{th row of } J]W \\ = P \prod_{i=1}^{r-1} (A - f_i I) \end{aligned} \quad (21)$$

위 식에서 W 는 (rq, n) 차원의 행렬로서 다음과 같다.

$$W = \begin{bmatrix} C \prod_{i=1}^{r-1} (A - f_i I) \\ C \prod_{i=1}^{r-1} (A - f_i I) \\ C \prod_{i=1}^{r-1} (A - f_i I) \\ \dots \\ C \prod_{i=1}^{r-2} (A - f_i I) \end{bmatrix} \quad (22)$$

step 6) $(r-1, n)$ 차원의 행렬 T 의 각 행벡터 T_i 는 식(23)에서 구한다.

$$T_i = J_i C (A - f_i I)^{-1}, \quad i=1, 2, \dots, r-1 \quad (23)$$

step 7) 식(15)에서 G 를 계산한다.

[주] 위에서 스위칭함수내의 동적변수 $z(t)$ 의 차원은 $(r-1)$ 로 고정되므로 차수의 입장에서 이 알고리즘은 최선이라 할 수 없다. 그러나 계산 및 적용은 상대적으로 매우 용이하다. 차수를 최소화

할 수 있는 알고리즘은 참고문헌[9]을 참고하여 구할 수 있다

5. 동적스위칭함수를 이용한 가변구조제어계의 특성

5.1 일반적 특성

본절에서는 제안된 동적스위칭함수를 포함한 가변구조제어계에 대하여 슬라이딩모우드가 발생하기 위한 조건과 슬라이딩모우드내에서 동특성을 고찰한다. 먼저 슬라이딩모우드내에서의 동특성 고찰을 위해 $D(z, y, u, t)$ 와 $\dot{D}(z, y, u, t)$ 를 상태변수 $x(t)$ 와 z -방정식의 과도편차 $e(t)$ 의 항으로 구한 결과는 식(24), 식(25)와 같다.

$$\begin{aligned} D(z, y, u, t) &= Ly(t) + Qz(t) \\ &= Px(t) - Qe(t) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}(z, y, u, t) &= Ly(t) + Qz(t) \\ &= PAX(t) + PBu(t) - QFe(t) \end{aligned} \quad (25)$$

위에서 식(24)는 식(1)의 계통방정식과 식(18)로 주어진 편차방정식을 결합한 식(26)의 확대계통에 대한 정적스위칭함수로 간주할 수 있다.

$$\dot{x}_{aug}(t) = A_{aug}x_{aug}(t) + B_{aug}u(t) \quad (26)$$

여기서 $x_{aug} = (x^T : e^T)^T$ 이고 $A_{aug} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$,

$B_{aug} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

슬라이딩모우드에서는 $D(z, y, u, t) = 0$, $\dot{D}(z, y, u, t) = 0$ 이 만족되어야 하고, 이를 달성해 주는 스위칭입력의 평균치인 등가제어입력은 식(25)의 우변을 영으로 놓고 입력에 관한 해를 구한 결과로서 다음과 같이 구해진다.

$$U_{eq}(x, e, t) = -(PB)^{-1}[PAX(t) - QFe(t)] \quad (27)$$

이제 슬라이딩모우드에서 제어계의 동특성은 식(26)의 확대계통에 식(27)의 등가제어입력을 대입함으로써 식(28)의 등가제어시스템이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I - B(PB)^{-1}P]A & \\ 0 & \\ & -B(PB)^{-1}QF \\ & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

결국 동적스위칭함수를 포함한 가변구조제어계에 대한 등가제어계의 고유치는 식(7)에 정의된 $A_{eq} = [I - B(PB)^{-1}P]A$ 의 고유치와 z -방정식의 행렬 F 의 고유치의 합(direct sum)으로 된다. 이와 같이 동적스위칭함수의 도입이 정적스위칭함수에 근거하여 얻어지는 등가제어계의 고유치를 변화시키지 않는다는 사실은 정적스위칭함수의 설계과정과 이에 근거한 동적스위칭함수의 설계과정을 완전히 분리 수행할 수 있음을 의미하는 중요한 사항인 동시에 행렬 F 의 고유치를 적절히 선정함으로써 응답속도를 포함한 과도특성의 조정이 가능함을 의미한다.

다음으로 슬라이딩모우드의 발생조건인 $D(z, y, u, t) \dot{D}(z, y, u, t) < 0$ 는 식(27)로 구해진 등가제어입력을 기준으로 한 식(29)의 스위칭입력을 투입함으로써 만족된다. [제6절 참조]

$$u = \begin{cases} u^+(\cdot, t) < u_{eq}(x, e, t) & \text{if } D(z, y, u, t) > 0 \\ u^-(\cdot, t) > u_{eq}(x, e, t) & \text{if } D(z, y, u, t) < 0 \end{cases} \quad (29)$$

식(28), 식(29)로부터 파악되는 또 다른 사실은 식(29)를 만족하는 스위칭 입력이 투입되는 한 가변구조제어계는 제안된 동적스위칭함수에 의해 규정되는 시변스위칭라인을 따라 슬라이딩 운동을 하며 초기편차와 F 의 고유치에 의해 결정되는 비교적 짧은 과도기간 이후 즉, 편차가 영에 수렴하면, 식(28)의 등가제어계 표현은 정적스위칭함수를 사용한 경우에 대한 등가제어계의 방정식인 식(7)과 일치한다는 것이다.

이상의 분석결과는 모든 스위칭함수가 아무런 전제조건 없이 비측정 변수를 포함한 계통의 가변구조제어에 효과적으로 도입될 수 있음을 명확히 해준다.

5.2 초기과도특성에 대한 고찰

본절에서는 동적스위칭함수가 1차의 z -방정식을 갖는 경우에 대하여 동적스위칭함수를 포함한 제어계의 슬라이딩모우드 발생이 의미하는 바를 정적스위칭함수의 입장에서 고찰하였다. 이 고찰사항은 $D(z, y, u, t) \neq S(x, t)$ 인 매우 짧은 과도기간에만 적용되고 또한 z -방정식이 1차인 경우에만 성립하지만 초기과도기간 중 두 슬라이딩모우드간의 관계에 대한 완전한 해석을 제공하여 준다는 관점 및 측정출력의 수가 비측정 상태변수의 수보다 같거나 많은 모든 경우를 포함하여 매우 많은 단일 입력계통에 대해 1차의 동적스위칭함수가 설계가능하다는 관점에서 의미를 갖는다.

z -방정식이 1차인 경우 F, Q 는 스칼라이므로 행렬과 구분하기 위해 f, g 로 표현한다. 동적스위

칭함수를 사용한 제어계에서 슬라이딩모우드가 발생하면 다음 식이 만족된다.

$$\begin{aligned} D(z, y, u, t) &= 0 \\ \dot{D}(z, y, u, t) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

식(24)(25)를 도입하면 식(30)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= ge(t) \\ \dot{s}(x, t) &= gfe(t) \end{aligned} \quad (31)$$

위 식은 s - \dot{s} 평면에서 식(32)을 만족하는 직선을 형성하며

$$\dot{s}(x, t) = -\beta s(x, t) \quad (\text{단 } \beta = |f|) \quad (32)$$

따라서 동적스위칭함수에 대한 식(30)은 정적스위칭함수와 관련된 슬라이딩모우드 발생조건을 충족시켜준다. 즉

$$s(x, t) \dot{s}(x, t) = -\beta s^2(x, t) < 0 \quad (33)$$

다음으로 슬라이딩모우드의 존재조건 $D\dot{D} < 0$ 이 $s\dot{s}$ 의 입장에서 의미하는 바를 고찰한다. 먼저 $D\dot{D} < 0$ 을 D 와 \dot{D} 에 관한 조건으로 분리하면,

$$D\dot{D} < 0 = (D < 0, \dot{D} > 0) \text{ 또는 } (D > 0, \dot{D} < 0) \quad (34)$$

으로 되고 여기서 식(3), 식(24) 및 식(25)를 도입하면 다음관계가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \text{i) } D(z, y, u, t) < 0 &\Rightarrow s(x, t) < ge(t) \\ \dot{D}(z, y, u, t) > 0 &\Rightarrow \dot{s}(x, t) > gfe(t) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } D(z, y, u, t) > 0 &\Rightarrow s(x, t) > ge(t) \\ \dot{D}(z, y, u, t) < 0 &\Rightarrow \dot{s}(x, t) < gfe(t) \end{aligned} \quad (36)$$

위에서 z -방정식의 고유치 f 는 부의 실수이므로 식(35), 식(36)은 모두 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned} D(z, y, u, t) \dot{D}(z, y, u, t) < 0 &\Rightarrow \\ s(x, t) \dot{s}(x, t) < 0 \end{aligned} \quad (37)$$

식(37)의 결과는 식(30)이 식(33)를 의미한다는 사실과 함께 1차 동적스위칭함수를 이용한 경우에 대한 슬라이딩모우드의 발생조건이 정적스위칭함수를 이용한 경우에 대한 슬라이딩모우드 발생조건을 포함함을 의미한다.

[주] 위의 해석은 전술했듯이 z -방정식이 2차이상인 경우에는 적용되지 않는다. 그러나 이러한 해석이 적용되지 않는다는 사실로 인해 발생하는 적용상의 문제점은 없다.

6. 스위칭 제어입력

지금까지의 논의에서는 구체적인 제어입력을 고

려하지 않은 상태에서 슬라이딩모우드의 발생조건, 슬라이딩모우드 내에서의 동특성 등을 다루었다. 그러나 가변구조제어계에서 슬라이딩모우드가 발생되기 위해서는 스위칭함수와 그 도함수의 곱이 부의 값을 갖도록 적절한 스위칭입력을 투입하여야 한다.

현재까지 제안된 스위칭입력의 형태는 상태제환에 관한 한 매우 다양하여 제어목적과 계통특성에 따라 선택될 수 있다. 그러나 본 연구에서 제안된 동적스위칭함수와 함께 사용되어 완전한 출력제환 가변구조제어계를 실현할 수 있는 출력제환스위칭입력에 대한 해석적 연구는 거의 없는 실정으므로 본 연구에서는 우선 종래에 제안된 제어입력 중 출력제환에 이용될 수 있는 온-오프입력과 $u = -\Phi x$ 형태의 단일변수제환입력을 도입하여 출력제환 가변구조제어계를 설계하기로 한다.

(i) 온-오프제어입력

가변구조제어계에서 슬라이딩모우드가 발생되도록 스위칭입력을 투입하는 일반적인 방법은 스위칭함수의 부호에 따라 등가제어입력보다 크거나 또는 작은 임의입력을 도입하는 것이며 정적스위칭함수를 사용한 경우 다음과 같다.

$$u(t) = \begin{cases} u^+(\cdot, t) < -(PB)^{-1}PAx(t) & \text{if } s(x, t) > 0 \\ u^-(\cdot, t) > -(PB)^{-1}PAx(t) & \text{if } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (38)$$

위의 입력결정논리의 근본적 개념은 동적스위칭함수에 근거한 가변구조제어계에 확장 적용될 수 있으며 식(25)(27) 및 식(29)에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$u(t) = \begin{cases} u^+(\cdot, t) < -(PB)^{-1}[PAx(t) - QFe(t)] & \text{if } D(z, y, u, t) > 0 \\ u^-(\cdot, t) > -(PB)^{-1}[PAx(t) - QFe(t)] & \text{if } D(z, y, u, t) < 0 \end{cases} \quad (39a)$$

위 식에서 $e(t) = Tx(t) - z(t)$ 임을 고려하면 식(39b)이 얻어진다.

$$u(t) = \begin{cases} u^+(\cdot, t) < -(PB)^{-1}[(PA - QFT)x(t) + QFz(t)] & \text{if } D(z, y, u, t) > 0 \\ u^-(\cdot, t) > -(PB)^{-1}[(PA - QFT)x(t) + QFz(t)] & \text{if } D(z, y, u, t) < 0 \end{cases} \quad (39b)$$

식(39a)(39b)의 입력결정논리는 z -방정식의 (짧

은) 과도기간 이후 식(38)의 결정논리와 동일하게 된다. 또한 $u(\cdot, t)$ 는 위의 부등호조건이 만족되는 한 상태제환 또는 온-오프제어 방식등 여러 가지 형태를 취할 수 있다. 특히 입력한계가 알려진 계통에 대해서는 $|u_{eq}| < |u|_{max}$ 가 성립되도록 제반 파라미터가 결정되어야함을 고려한다면 다음의 온-오프입력을 사용함으로써 슬라이딩모우드의 발생이 보장된다.

$$u(t) = -k \text{sign}[D(u, y, u, t)],$$

단, $k = |u|_{max}$ (40)

(ii) 단일변수제환입력

종래에 제안된 제어입력 중 출력제환에 이용될 수 있는 다른 제어입력은 Itkis에 의해 제안된 단일변수제환 입력으로 $y_1(t) = x_1(t)$ 라는 전제하에 다음으로 표현된다. [11]

$$u(t) = -\Phi y_1(t) \quad (41)$$

여기서 Φ 는 다음으로 정의된다.

$$\Phi = \begin{cases} \alpha_1 & \text{if } y_1(t)D(z, y, u, t) > 0 \\ \alpha_2 & \text{if } y_1(t)D(z, y, u, t) < 0 \end{cases} \quad (42)$$

식(41)(42)에 관해 반드시 언급해야할 사항은 스위칭논리와 입력결정식에 비측정변수가 완전히 배제되어있다는 사실이다. 이 경우 슬라이딩모우드의 발생조건은 참고문헌[10]을 이용하여 구할 수 있으며 식(24)과 식(26)로부터 식(43)로 구해진다. 이결과는 식(1)의 계통방정식에 대하여 식(3)의 정적스위칭함수를 이용한 경우와 동일하다. 즉,

$$\alpha_1 > [P : -Q]A_{aug1} = PA_1 \quad (43)$$

$$\alpha_2 < [P : -Q]A_{aug1} = PA_1$$

여기서 A_1 과 A_{aug1} 은 각 행렬의 첫째 열이다.

위의 입력은 Itkis[11] 및 Decarlo[4]의 연구에 언급된 것처럼 모든 상태변수 제환(full state feedback)과 같이 모든 경우에 적용되는 것은 아니지만 적절한 이득을 채택함으로써 동적스위칭함수와 함께 사용될 경우 완전한 출력제환제어를 실현할 수 있다는 관점에서 중요한 의미를 갖는다. 이 입력을 사용할 경우 실제적인 이득의 결정은 일반적으로 시뮬레이션에 근거한다[10]

7. 수치예

본 절에서는 연구 결과의 유용성을 보이기 위하여 제안된 동적스위칭함수를 도입한 가변구조 제어계를 설계하고 시뮬레이션을 통해 모든 상태변

수정보를 이용한 기존제어계의 성능과 제안된 제어계 성능을 비교 검토한다. 수치예로서는 상평면 제어를 보일 수 있는 단일입력 단일출력을 가진 2차계(DC MOTOR)와 2개의 측정변수를 가진 4차 계통을 고려했다. 또한 수치예[1]에 대해서는 전동기 파라미터의 변화와 외란에 대한 제어계의 강인성 분석을 위한 시뮬레이션 결과를 함께 수록하였다. 두 수치예는 모두 set-point 추적문제를 다루었으며 따라서 시뮬레이션 수행시에는 추적문제를 조정기(regulator)문제로 변형하여 처리하였음을 밝혀둔다.

수치예[1] 다음의 DC전동기 모델을 고려하자.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = -1/\tau_m x_2(t) + b/\tau_m u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

위 식에서 x_1 은 각변위로서 측정출력이고, x_2 는 각속도이며 전동기 파라미터는 각각 $\tau_m = 0.094$, $b = 16.6675$ 이다.

먼저 슬라이딩모우드에서 얻어지는 감소차수 동태방정식의 고유치가 -12 에 존재하도록 스위칭함수를 구한 결과는 다음과 같고,

$$s(x, t) = 12x_1(t) + x_2(t)$$

측정변수만에 의해 구동되는 스위칭함수는 4절의 알고리즘에 의해 다음으로 구해진다.

$$\dot{z}(t) = -15.0z(t) - 65.43y(t) + 177.309u$$

$$D(z, y, u, t) = 16.362(t) + z(t)$$

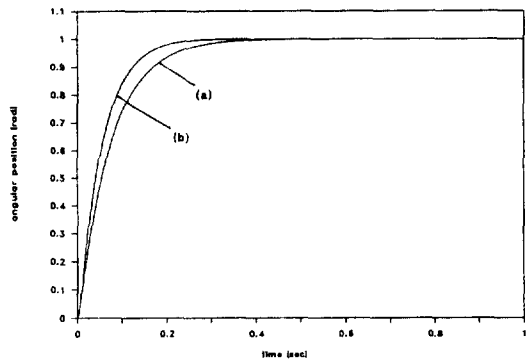
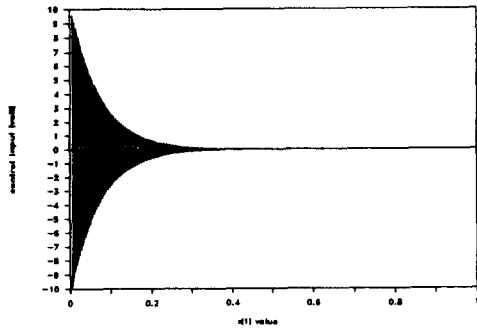
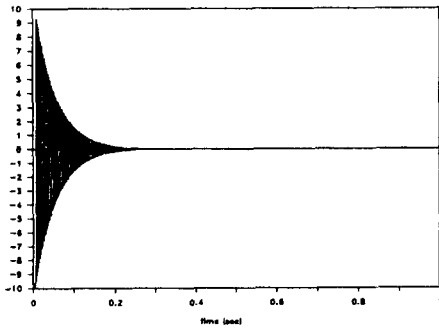


그림 1 가변구조위치제어계의 기준입력추적특성
(a) 정적스위칭 함수
(b) 동적스위칭함수(극점-15)

Fig. 1 The set point tracking characteristics of position servo VSCS
(a) static full state switching function
(b) dynamic switching function with pole at -15



(2a)



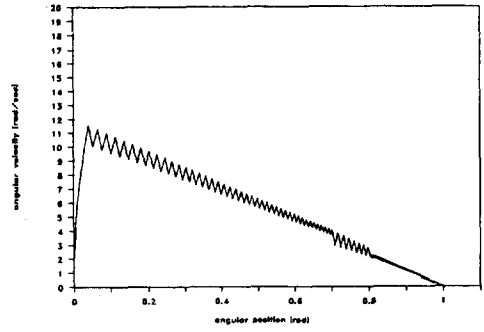
(2b)

그림 2 위치제어계의 스위칭제어입력
(2a) 정적스위칭함수의 경우
(2b) 동적스위칭함수의 경우

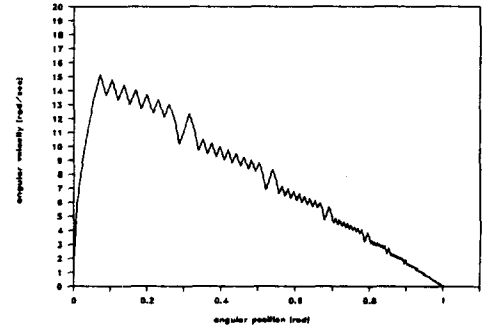
Fig. 2 The switching control inputs of Position servo VSCS
(2a) static switching function
(2b) dynamic switching function with pole at -15

여기서 z -방정식의 고유치 -15 는 임의 선정한 값이다.

스위칭입력은 식(41)에 주어진 출력궤환형태를 취했으며 궤환이득상수는 시뮬레이션검토를 통하여 $\alpha_1=10$, $\alpha_2=-10$ 로 선정하였다. 제어목적은 기준입력 $y_{ref}=1$ 의 추적이며 시뮬레이션은 정적스위칭함수 $s(x, t)$ 를 이용한 경우와 출력정보만을 포함한 위의 동적스위칭함수를 이용한 경우에 대해 수행되었고 특성비교를 위해 궤환이득은 동일한 값을 적용하였다. 그림(1)은 기준입력의 추적특성, 그림(2a)(2b)는 스위칭입력이며 그림(3a)(3b)는 상평면 궤적이다. 모든 그림에서 (a)는 정적스위칭함수의 경우, (b)는 동적스위칭함수를 이용한 경우이다. 그림(1)로부터 두 경우 모두 오우버슈트없는 기준입력추적특성을 갖고 있으나 속응성면에서 동적스위칭함수를 사용한 경우가 더욱 우월함을 알 수 있으며 이러한 사실은 제안된 제어



(3a)



(3b)

그림 3 위치제어계의 상평면궤적
(3a) 정적스위칭함수의 경우
(3b) 동적스위칭함수의 경우

Fig. 3 The phase-plane trajectories of position servo VSCS
(3a) static switching function
(3b) dynamic switching function with pole at -15

계가 측정입출력만을 사용함에도 불구하고 모든 상태변수의 가용성을 전제한 전형적인 제어계보다 좋은 성능을 갖도록 설계될 수 있음을 의미한다. 그림(3a)(3b)의 상평면 궤적은 초기과도기간 중 정적스위칭함수와 동적스위칭함수의 편차가 스위칭평면(라인)에 미치는 영향을 보여주며 여기에서 정적스위칭함수의 경우에는 당초 설정한 일정기울기의 스위칭라인이 형성되는 반면 동적스위칭함수의 경우에는 시변기울기를 갖는 스위칭라인이 형성됨을 알 수 있고 따라서 동적스위칭함수를 사용한 경우의 슬라이딩모드는 정적스위칭함수를 기준으로 보아 그 제어성능이 우월하다는 사실에 관계없이 준슬라이딩모드(quasi-sliding mode)에 해당함을 알 수 있다. 이 예는 제안된 제어계의 일반적 성능평가를 위한 것이므로 $z(0)=0$ 으로 놓았으나 실제적인 위치제어의 경우 $y(0)=\theta(0)$ 의 측정치와 $w(0)=0$ 에 의해 결정되는 $z(0)$ 를 도입한

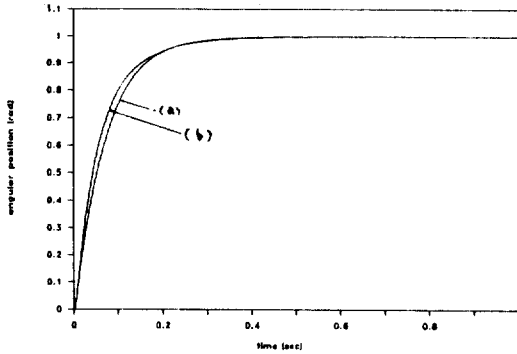


그림 4 파라미터 변화시 위치제어계의 기준입력 추적특성
 (a) 정적스위칭함수의 경우
 (b) 동적스위칭함수의 경우

Fig. 4 The set point tracking characteristics when parameter variation occurred
 (a) static full state switching function
 (b) dynamic switching function with pole at -15

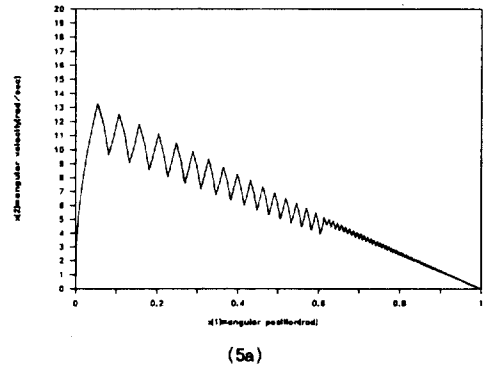
다면 두경우의 응답은 일치된다.

그림(4)와 그림(5)는 제안된 동적스위칭함수를 포함한 제어계의 강인성을 고찰하기 위해 전술한 2차 전동기 모델의 파라미터 중 τ_m 과 b 가 각각 $\tau_m' = \tau_m/1.2$, $b' = b/1.2$ 로 변화한 경우에 대한 시뮬레이션을 수행한 결과이다.

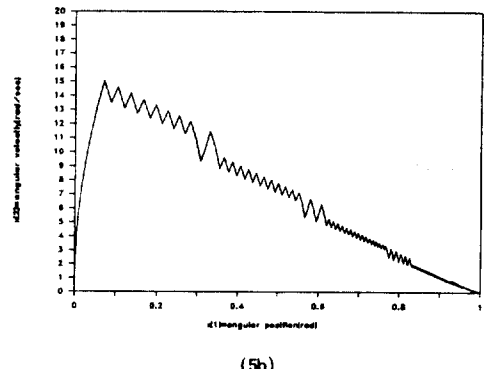
그림(4)는 정적스위칭함수를 사용한 경우와 동적스위칭 방정식의 고유치가 -15인 동적스위칭함수를 사용한 제어계의 출력응답특성을 비교한 것이며 그림(5a)(5b)는 각각 정적스위칭함수를 사용한 제어계 및 동적스위칭함수를 사용한 제어계의 상평면궤적이다. 이 결과는 두가지 형태의 스위칭함수를 포함한 가변구조제어계가 두 경우 모두 파라미터변화에 대해 강인함을 보여주고 있다.

그림(6)과 그림(7a)(7b)은 각각 외란 $T_1 = -1$ 을 투입한 경우의 응답비교와 상평면 궤적이다 그림에 나타난 바와 같이 초기과도기간 중 두제어계의 과도특성은 외란에 의한 영향을 거의 받지 않으며 정상상태에서 10^{-4} 이하의 편차를 갖는 정도이다.

수치예[2]. 수치예[1]은 동적스위칭함수를 이용한 경우 상평면해석과 파라미터와 외란의 변화에 대한 강인성 분석을 위한 것이다. 그러나 제안된 동적스위칭함수를 포함한 가변구조제어는 계통차수보다 적은 개수의 출력변수정보에 근거해 설계, 실현될 수 있다는 매우 중요한 특성을 가진다. 따라서 본 연구결과가 고차계에도 효과적으로 적용될 수 있음을 보이기 위해 다음의 비표준형모델을



(5a)



(5b)

그림 5 파라미터 변화시 상평면궤적
 (5a) 정적스위칭함수의 경우
 (5b) 동적스위칭함수의 경우

Fig. 5 The phase plane trajectories when parameter variation occurred
 (5a) static switching function
 (5b) dynamic switching function with pole at -15

고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.2x_1(t) + 0.5x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.5x_2(t) + 1.6x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -2.9x_3(t) + 10.0x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -5.0x_4(t) + 15.0u(t) \\ y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_3(t) \end{aligned}$$

먼저 모든 상태정보를 가정한 정적스위칭함수는 슬라이딩모우드에서 감소차수 모델이 -6에 3중극점을 갖도록 다음과 같이 선정했다.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= 24.38x_1(t) + 5.987x_2(t) \\ &\quad + 1.44x_3(t) + 1.0x_4(t) \end{aligned}$$

4절의 알고리즘에 따라 고유치 (-20)을 갖도록

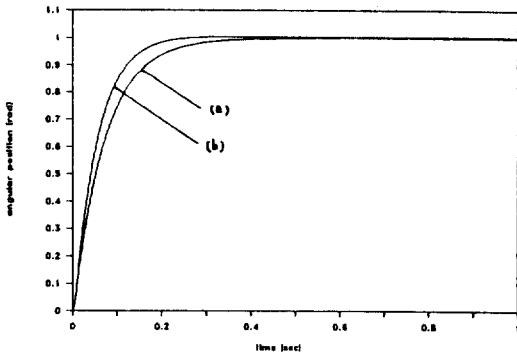


그림 6 외란 투입시 위치제어계의 기준입력추적 특성

- (a) 정적스위칭함수의 경우
- (b) 동적스위칭함수의 경우

Fig. 6 The set point tracking characteristics for external disturbance

- (a) static full state switching function
- (b) dynamic switching function with pole at -15

동적스위칭함수를 구한 결과는 다음과 같다.

$$D(z, y, u, t) = 1257.882y_1(t) + 2.94y_2(t) + z(t)$$

$$\dot{z}(t) = -20z(t) - 4623.0y_1(t) - 16.071y_2(t) + 15u(t)$$

여기서 $z(t) = -233.485x_1(t) + 5.987x_2(t) - 1.5x_3(t) + x_4(t)$ 이다.

시뮬레이션은 예(1)의 경우와 같이 정적스위칭함수를 이용한 경우와 동적스위칭함수를 이용한 두가지 경우 (스위칭함수 동태방정식의 근이 -10

인 경우와 -20인 경우)에 대하여 수행되었으며 투입된 입력은 식(40)의 형태로서 제한이득은 $k=40$ 으로 선정했다. 제어목적은 변수 y_1 이 $y_{ref}=1$ 을 추적하는 것이다. 추적특성은 그림(8)에 종합하였으며 그림에서 (a)는 정적스위칭함수 (b)는 고유치 -10인 동적스위칭함수, 그리고(c)는 -20인 고유치를 갖는 동적스위칭함수를 이용한 경우의

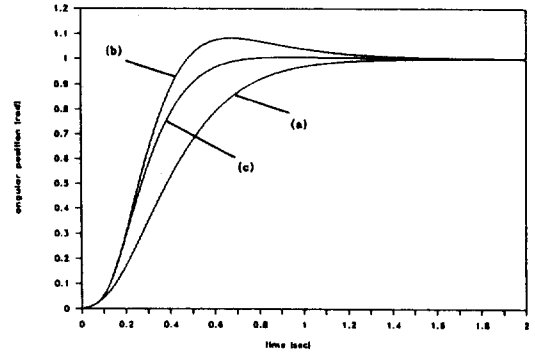
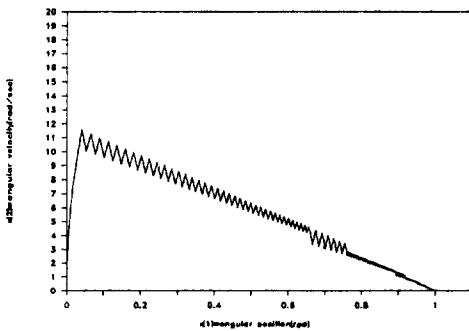


그림 8 수치예[2]에 대한 가변구조제어계의 추적 특성

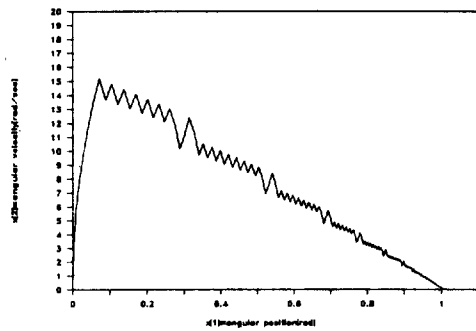
- (a) 정적스위칭함수
- (b) 동적스위칭함수(극점: -10)
- (c) 동적스위칭함수(극점: -20)

Fig. 8 The set point tracking characteristics of VSCS of example[2]

- (a) static full state switching function
- (b) dynamic switching function with pole at -10
- (c) dynamic switching function with pole at -20



(7a)



(7b)

그림 7 외란 투입시 상평면 궤적

- (a) 정적스위칭함수의 경우
- (b) 동적스위칭함수의 경우

Fig. 7 The phase plane trajectories for external disturbance

- (a) static switching function
- (b) dynamic switching function with pole at -15

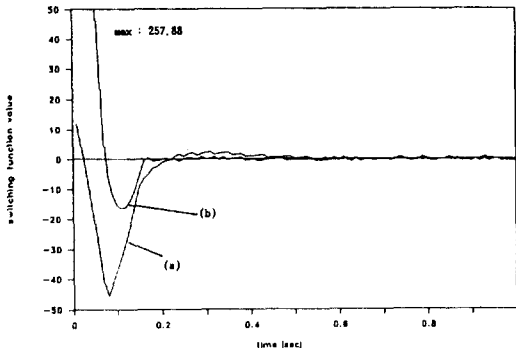


그림 9 수치예 [2]에 대한 가변구조제어계에서 두 스위칭함수의 시간제적
(a) 정적스위칭함수
(b) 동적스위칭함수(극점 : -20)

Fig. 9 Time histories of switching functions in VSCS for example [2]
(a) static full state switching function
(b) dynamic switching function with pole at -20

응답이다.

여기서도 전술한 전동기제어의 경우와 같이 출력변수만을 이용한 동적스위칭함수(고유치 : -20인 경우)를 사용했을 때의 응답이 모든 상태변수 정보를 이용한 제어계의 응답보다 속응성이 개선되었음을 알 수 있다. 4차계의 경우 상평면제적은 작성불가능하므로 시간에 따른 스위칭함수값의 제적을 그림(9)에 보였다. 그림에서 (a)는 정적스위칭함수, (b)는 동적스위칭함수의 제적이며 여기에서 동적스위칭함수는 초기시간구간에서 초기조건 불일치로 인하여 모든 상태변수정보를 이용한 정적스위칭함수에 비해 매우 큰 값을 가짐에도 불구하고 더 짧은 시간내에 슬라이딩평면에 도달함을 알 수 있으며 이러한 사실은 전술한 바와 같이 동적스위칭함수의 고유치를 적절히 선정할 경우 좋은 성능을 가진 가변구조제어계의 설계가 가능함을 의미한다.

8. 결 론

본 연구에서는 가변구조제어계의 실현과 관련하여 해결되어야 할 가장 중요한 문제점의 하나인 모든 상태변수의 가용성을 배제하기 위한 대책으로서 측정출력과 입력만에 의해 구동되는 새로운 형태의 동적스위칭함수를 제안하고 이를 이용한 출력제환제어계의 설계방안을 제시하였으며 그 유용성을 입증하기 위해 두개의 수치예에 대하여도

든 상태의 측정을 가정한 전형적 제어계의 특성과 제안된 제어기법의 성능을 시뮬레이션연구를 통해 비교 검토하였다.

제안된 동적스위칭함수와 이를 이용한 가변구조제어계는 다음의 특징을 갖는다.

첫째, 제안된 제어기법에서는 측정출력만으로 스위칭함수와 제어입력의 계산이 가능하다. 이러한 특징은 측정불가능한 변수를 포함한 계통, 고차계통 및 대단위 계통등과 같이 과거의 정적스위칭함수를 이용한 제어계의 실현이 불가능했던 계통에 대한 가변구조제어의 실현을 가능케 해주는 동시에 측정경비가 매우 큰 변수를 측정할 필요가 없어 제어계 cost를 대폭 절감할 수 있음은 물론 가변구조제어의 적용범위 확장에 기여한다.

둘째, 수치예에서 보인 바와 같이 제안된 제어기법에서는 동적스위칭함수의 z-방정식의 고유치, 스위칭입출력의 형태 및 케환이득을 적절히 선정함으로써 측정입출력정보만을 이용함에도 불구하고 바람직한 과도특성을 얻을 수 있다.

셋째, 수치 예에서 보인바와 같이 제안된 제어계는 전형적인 가변구조제어계와 같이 프로세스 파라미터 변동에 대해 강인한 특성을 갖는다.

넷째, 본 연구에서는 단일입력계통에 대해서만 언급했으나 제안사항은 다중입력계통에도 확장 적용될 수 있다.

마지막으로, 이 연구는 동적스위칭함수를 이용한 가변구조제어의 초기연구로서 스위칭함수자체의 제안과 기 제안된 입력형태를 이용한 출력제환 가변구조제어계 설계에 초점을 두었으므로 여러방식으로 제안된 그외의 제어입력과 관련성, 강인성을 포함한 제안사항에 관한 연구검토가 후속되어야 할 것으로 생각되며 특히 해석적 입장에서 출력제환가변구조계의 실현을 위한 출력제환제어 입력의 제안을 이 후의 연구과제로서 삼고자 한다.

참 고 문 헌

[1] H.S. Ramirez, T.A.W. Dwyer, "Variable Structure Controller design for space craft nutation damping," IEEE Trans. Auto. Contr., AC-32, No. 5, pp. 436~438, 1987.
[2] K.K.D. Young, "Controller design for a manipulator using the theory of variable structure systems," IEEE Trans. sys. man. cybern., Vol. 8, No. 2, pp. 101~109, 1978.

- [3] H. Hashimoto, "Variable structure strategy for motion control systems: application to electrical machines," Proc. IECON'87, pp. 159~165, 1987.
- [4] R.A. Decarlo et. al., "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A Tutorial," IEEE Proc. Vol. 76, No. 3, pp. 212~232, March 1988.
- [5] V.I. Utkin, "Variable structure systems: present and future," Automat. Remote control, Vol. 45, pp. 1105~1120, 1984.
- [6] H.Y. Chun et. al., "Position control of brushless DC motor using variable structure," proc.'90 IPEC-Tokyo, pp. 978~984, 1990.
- [7] B.A. White, "Reduced order switching functions in variable structure control system," IEE proc., Vol. 130, No. 2, pp. 33~40, March 1983.
- [8] P. Murdoch, "Observer design for a linear functional of the state vector," IEEE Trans. Automat. control, AC-16, pp. 308~310, 1973.
- [9] J.B. Moore, G.F. Ledwich, "Minimal order observers for estimating linear functions of a state vector," IEEE Trans. Automat. control, AC-20, No. 5, pp. 623~632, 1975.
- [10] Yuan-Yih Hsu et. al., "Optimal variable structure controller for DC motor speed control," IEE proc., Vol. 131, No. 6, pp. 233~237, Nov. 1984.
- [11] U. Itkis, "Control systems of variable structure," John Wiley & Sons, 1976.