1538 大韓機械學會論文集 第15卷 第5號, pp. 1538~1550, 1991.

〈論 文〉

# 접합된 탄성층 내에 존재하는 균열의 응력강도계수

박 재 학*

(1991년 5월 14일 접수)

# Stress Intensity Factors of a Crack Embedded in Bonded Elastic Layers

Jai Hak Park

**Key Words:** Crack(균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Bonding(접합), Elastic Layers(탄성층), Interface(계면), Dislocation(전위)

**Abstract**

The stress intensity factors of cracks embedded in bonded elastic layers were obtained. The cracks were represented by continuous distribution of edge dislocations and the crack problems were solved from the equilibrium conditions in dislocation density functions. And the stress fields of an edge dislocation embedded in bonded elastic layers were obtained by using Fourier transformation. The effects of bonded materials, thickness of layers, crack location and crack inclination on stress intensity factors and crack growth directions were examined. And it was found that the method used here is effective method in obtaining acurate values of stress intensity factors for cracks embedded in bonded elastic layers.

## 기 호 설 명

$a$ : 균열길이의 반
$b_x$, $b_y$ : 버거스벡터
$c$ : 계면과 전위 사이의 거리
$f_1$ : 글라이드(glide) 전위의 밀도함수
$f_2$ : 클라임(climb) 전위의 밀도함수
$G$ : 전단탄성계수
$H_1$, $H_2$ : 접합된 층의 각각의 두께
$K_I$, $K_{II}$ : 응력강도계수(stress intensity factor)
$K_I^*$,$K_{II}^*$ : 무차원화된 응력강도계수
$p_o$ : 균일수직응력
$q_o$ : 균일전단응력
$u$,$v$ : 변위
$\alpha$,$\beta$ : 던더스(Dundurs)의 매개변수
$\kappa$ : $3-4\nu$(평면변형) 또는 $(3-\nu)/(1+\nu)$(평면응력)
$\lambda$, $\mu$ : 라메(Lame)의 상수
$\nu$ : 프와송 비
$\sigma$ : 응력
$\chi$ : 에어리(Airy) 응력함수

## 1. 서 론

서로 성질이 상이한 두 층(layer)이 접합된 경우, 층 내에 존재하는 임의의 길이 및 임의의 기울기를 가지는 균열에서의 응력강도계수(stress intensity factor)를 구하였다. 이때 두 층은 각각 유한한 두께를 가지고 있는, 균질한(homogeneous) 등방성(isotropic)의 선형 탄성층이라고 가정하였고, 하중조건으로는 균일한 수직 혹은 전단응력이 균열면에 작용한다고 가정하였다.

이러한 문제에서 접합된 두 층이 무한한 경우에

* 정회원, 충북대학교 산업안전공학과

는 많은 사람에 의하여 해석되었지만[1] 유한한 두께를 가진 경우는 몇 편의 논문[2~4]에 불과하고 또한 이 경우에 균열은 계면(interface)에 대하여 평행 혹은 수직인 경우에 국한되어 있다. 따라서 본 논문에서는 접합된 두 층이 유한한 두께를 가지고, 또한 균열은 임의의 각도로 기울어져 있는 경우의 문제를 해석하여 층의 두께 등이 응력강도계수에 미치는 영향을 살펴보았다.

한편으로 본 논문은 길이가 무한하고 폭이 유한한 띠 내에 존재하는 균열-문제의 발전이라고도 볼 수 있는데, 균질재료의 띠 내에 존재하는 에지균열(edge crack)[5], 내부균열[6], 임의의 각도로 기울어진 균열[7], 또는 둘 이상의 균열이 띠의 측면에 수직[8] 또는 임의의 각도로 기울어져 있을 때의 문제[9]에 대하여 본 논문은 서로 성질이 상이한 두 탄성 재료가 접합되어 이루어진 띠 내에 존재하는 임의의 각도로 기울어진 균열문제를 해석한 것이다.

균열문제의 해석에는 균열전위(crack dislocation)를 이용하였다. 즉 접합된 두 탄성층 내에 존재하는 임의의 크기 및 임의의 기울기를 가지는 균열은, 모드 I 및 모드 II의 하중의 경우 인선전위(edge dislocation)가 연속적으로 분포된 것으로 나타낼 수가 있고, 평형조건을 만족하는 전위밀도함수(dislocation density function)를 구함으로써 응력강도계수를 구하게 된다. 이 경우 접합된 두 탄성층의 내부에 존재하는 전위에 의한 응력장은 푸리에 변환 (fourier transformation)을 이용하여 구하였다. 이는 Civelek[9]이 단일재료로 된 층 내에 존재하는 균열문제를 해석한 방법과 유사한 방법으로 푸리에변환을 직접 균열문제에 적응하는 방법[2,3]에 비하여 모드 I 과 모드 II가 동시에 존재하는 복합모드인 경우 문제를 훨씬 간단히 풀 수 있도록 하여 준다. 본 논문에서 사용한 해석방법과 유사한 해석방법이 최근 Suo와 Hutohinson[4]에 의하여 계면에 평행한 반무한 균열문제의 해석에 사용되었다. 본 논문에서는 변위에 푸리에변환을 적용한데 반하여 Suo 등은 포텐셜함수에 푸리에변환을 적용하여 해석하고 있다.

이러한 해석 방법을 사용하여 접합된 두 탄성층 내에 존재하는, 계면에 평행한 균열 또는 기울어진 균열에 대하여 접합된 재료의 조합과 층의 두께, 그리고 균열의 위치에 따라 응력강도계수를 구하였고, 층 내에 존재하는 균열의 성장 방향에 대해서도 살펴보았다.

## 2. 전위에 의한 응력장

Fig. 1에서와 같이 두께가 각각 $H_1$, $H_2$이고 길이가 무한히 긴 두 탄성층이 $x$축을 따라 접합되어

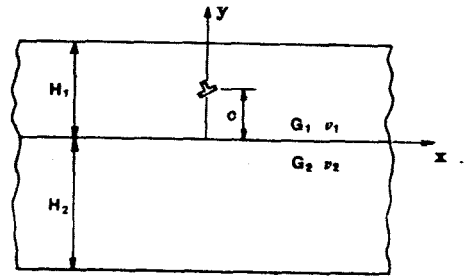


Fig. 1 An edge dislocation in bonded layers

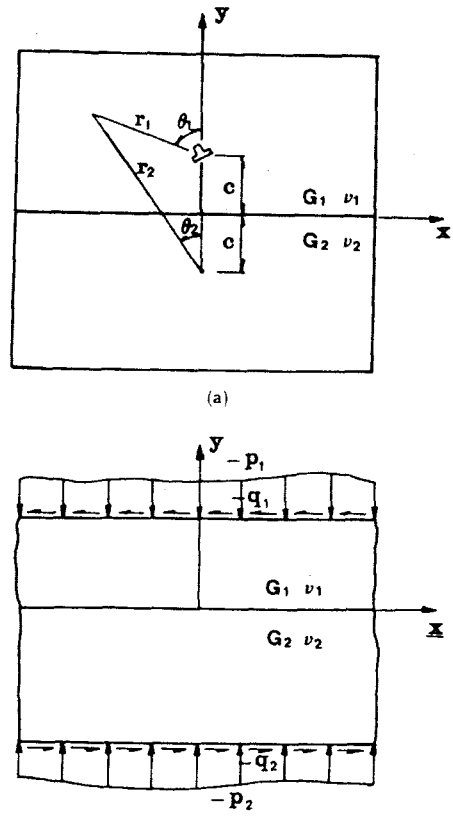


Fig. 2 (a) An edge dislocation in infinite bonded plates. (b) Bonded layers under surface loading.

있고, 버거스벡터(burgers vector) $b_x$(또는 $b_y$)인 인선전위(edge dislocation)가 그림과 같은 위치에 존재하는 경우의 응력장에 대하여 고려하여 보자. 이러한 응력장은 접합된 두 탄성층 내에 존재하는 임의의 크기 및 임의의 기울기를 가지는 균열을 해석하는데 유용하게 사용된다.

전술된 문제의 해는, Fig. 2에 도시된 두 문제를 각각 해석한 후 각 문제에서 구해진 응력장을 중첩(superposition) 함으로써 구할 수 있다. Fig. 2에 도시된 두 문제를 각각 문제A 및 문제 B라고하면 두 문제는 다음과 같이 기술되어진다.

문제A : Fig. 2(a)와 같이 서로 성질이 상이한 두 반무한 평판이 $x$축을 따라 접합되어 있고, 버거스벡터 $b_x$(또는 $b_y$)인 인선전위가 그림과 같은 위치에 존재하는 경우에 응력장을 구하는 문제.

문제B : Fig. 2(b)에서와 같이 두께가 각각 $H_1$, $H_2$이고 길이가 무한한 두 탄성판이 $x$축을 따라 접합되어 있고, $y=H_1$과 $y=-H_2$인 면에 $-p_1(x)$, $-p_2(x)$의 수직응력과 $-q_1(x)$, $-q_2(x)$의 전단응력이 작용하는 경우에 응력장을 구하는 문제. 여기서 $p_1(x)$와 $q_1(x)$는 문제 $A$에서 구해진 응력장의 $y=H_1$면에 작용하는 수직응력과 전단응력, $p_2(x)$와 $q_2(x)$는 $y=-H_2$면에 작용하는 수직응력과 전단응력이다.

### 2.1 문제 A의 해석

이 경우의 응력장은 Dundurs 등[10,11]에 의하여 이미 구해졌으며, Fig. 2(a)의 좌표계에 대하여 다음과 같이 표현된다. 즉 버거스벡터 $b_x$의 인선전위가 존재할 경우에는,

$$\chi_1=\frac{G_1 b_x}{\pi(\kappa_1+1)}[-2r_1\log r_1\cos\theta_1 + (B+A)r_2\log r_2\cos\theta_2-(B-A)r_2\theta_2\sin\theta_2 - 2A_o(2\log r_2-\cos 2\theta_2+\frac{2_o}{r_2}\cos\theta_2)], \quad (1)$$

$$\chi_2=\frac{G_1 b_x}{\pi(\kappa_1+1)}[(A+B-2)r_1\log r_1\cos\theta_1 + (B-A)(r_1\theta_1\sin\theta_1+2_c\log r_1)] \quad (2)$$

이고, 버거스벡터 $b_y$의 인선전위가 존재할 경우에는,

$$\chi_1=\frac{G_1 b_y}{\pi(\kappa_1+1)}[-2r_1\log r_1\sin\theta_1 + (B+A)r_2\log r_2\sin\theta_2 + (B-A)r_2\theta_2\cos\theta_2 - 2A_c(\sin 2\theta_2-\frac{2_c}{r_2}\sin\theta_2)], \quad (3)$$

$$\chi_2=\frac{G_1 b_y}{\pi(\kappa_1+1)}[(A+B-2)r_1\log r_1\sin\theta_1 + (B-A)(r_1\theta_1\cos\theta_1+2_c\theta_1)]. \quad (4)$$

이다. 여기서 $\chi_1$, $\chi_2$는 에어리 응력함수(airy stress function)로 각 응력 성분과는 다음과 같은 관계를 가진다 :

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} \qquad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \qquad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}$$

또한

$$A=(G_1-G_2)/(G_1+G_2\kappa_1),$$
$$B=(G_1\kappa_2-G_2\kappa_1)/(G_1\kappa_2+G_2) \quad (5)$$

이다. 여기서 $G$는 전단탄성계수이고, 프와송비를 $\nu$라 할때, $\kappa$는 평면변형의 경우 $3-4\nu$, 평면응력의 경우 $(3-\nu)/(1+\nu)$의 관계를 가진다. 본 문제는 평면변형으로 가정하였으므로 $\kappa=3-4\nu$이다. 그리고 $\theta_1$과 $\theta_2$는 Fig. 2(a)에 도시된 각도, $r_1$, $r_2$ 및 $c$는 Fig. 2(a)에 도시된 길이이다. 하첨자 1은 재료 1에서의 값, 2는 재료 2 에서의 해당되는 값이다. 식(1)에서 식(4)로 주어진 응력함수에 의한 응력장의 자세한 표현식은 참고문헌[12]에 수록되어 있다.

### 2.2 문제 B의 해석

우선 $b_x$에 의한 응력장에 대하여 고려하여 보자. 이 경우에 식(1) 및 식 (2)로부터 구해진 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$ 및 $q_2(x)$는 다음과 같은 관계를 가진다. 즉,

$$p_1(x)=p_1(-x),\quad p_2(x)=p_2(-x),$$
$$q_1(x)=-q_1(-x),\quad q_2(x)=-q_2(-x). \quad (6)$$

따라서 재료 $i(i=1, 2)$에서의 변위를 각각 $u_i$, $v_i$라고하면 $u_i$는 $x$에 대하여 기함수(odd function), $v_i$는 우함수(even function)가 되므로 다음과 같이 푸리에적분(fourier integral)으로 나타낼 수가 있다 :

$$u_i(x, y)=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty \Phi_i(s, y)\sin sx\, ds,$$
$$v_i(x, y)=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty \Phi_i(s, y)\cos sx\, ds, \quad (7)$$
$$(i=1, 2)$$

평면변형의 경우 평형방정식(equilibrium equation)을 변위에 대하여 표현하면 다음과 같다:

$$\mu\nabla^2 u+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,$$
$$\mu\nabla^2 v+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \tag{8}$$

여기서 $\lambda$와 $\mu$는 라메(Lame)의 상수로 전단탄성계수 $G$ 및 프와송비 $\nu$와 다음과 같은 관계를 가진다:

$$\lambda=2G\nu/(1-2\nu),\quad \mu=G$$

식(7)을 식(8)에 대입하여 풀어주면,

$$u_i(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty[(A_{i1}+A_{i2}\,y)e^{-sy}+(A_{i3}+A_{i4}\,y)e^{sy}]\sin sx\,ds, \tag{9}$$
$$v_i(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty[\{A_{i1}+(\kappa_i/s+y)A_{i2}\}e^{-sy}+\{-A_{i3}+(\kappa_i/s-y)A_{i4}\}e^{sy}]\cos sx\,ds.$$

여기서 $A_{ij}$는 $s$의 함수로, 경계조건과 접합면에서의 연속조건에 의하여 결정된다. 그리고 $A_{ij}$가 알려질 경우 응력값은 다음식에 의하여 구해진다:

$$(\sigma_{xx})_i=\frac{4G_i}{\pi}\int_o^\infty[\{s(A_{i1}+A_{i2}\,y)-2\nu_i A_{i2}\}e^{-sy}+\{s(A_{i3}+A_{i4}y)+2\nu_i A_{i4}\}e^{-sy}]\cos sx\,ds,$$
$$(\sigma_{yy})_i=\frac{4G_i}{\pi}\int_o^\infty[-(s(A_{i1}+A_{i2}\,y)+2(1-\nu_1)A_{i2}\}e^{-sy}+\{-s(A_{i3}+A_{i4}\,y)+2(1-\nu_i)A_{i4}\}e^{sy}]\cos sx\,ds, \tag{10}$$
$$(\sigma_{xy})_i=\frac{4G_i}{\pi}\int_o^\infty[-(s(A_{i1}+A_{i2}\,y)+(1-2\nu_1)A_{i2}\}e^{-sy}+\{s(A_{i3}+A_{i4}\,y)-(1-2\nu_i)A_{i4}\}e^{sy}]\sin sx\,ds.$$

만족되어야 할 경계조건과 접합면에서의 연속조건은 다음과 같다:

$$\sigma_{yy}^1(x,\ H_1)=-p_1(x),$$
$$\sigma_{yy}^2(x,\ -H_2)=-p_2(x),$$
$$\sigma_{yy}^1(x,\ o)=\sigma_{yy}^2(x,\ o),$$
$$u_1(x,\ o)=u_2(x,\ o),$$
$$\sigma_{xy}^1(x,\ H_1)=-q_1(x),$$
$$\sigma_{xy}^2(x,\ -H_2)=-q_2(x),$$
$$\sigma_{xy}^1(x,\ o)=\sigma_{xy}^2(x,\ o),$$
$$v_1(x,\ o)=v_2(x,\ o). \tag{11}$$

여기서 상첨자 1은 재료1 에서의 값, 2는 재료2에서의 값이다.

식(13)의 8개의 조건을 만족하는 $A_{ij}$를 구하기 위하여 다음과 같이 $P_1$, $Q_1$, $P_2$ 및 $Q_2$를 정의한다:

$$P_1(s)=\frac{1}{2G_1}\int_o^\infty[-p_1(x)]\cos sx\,dx,$$
$$Q_1(s)=\frac{1}{2G_1}\int_o^\infty[-q_1(x)]\sin sx\,dx, \tag{12}$$
$$P_2(s)=\frac{1}{2G_2}\int_o^\infty[-p_2(x)]\cos sx\,dx,$$
$$Q_2(s)=\frac{1}{2G_2}\int_o^\infty[-q_2(x)]\sin sx\,dx.$$

식(1) 및 식(2)의 응력함수로부터 $p_1$, $q_1$, $p_2$ 및 $q_2$를 구하고, 이를 식(12)에 대입하면 다음과 같이 된다:

$$P_1(s)=\frac{-b_x}{2(\kappa_1+1)}[-y_1 se^{-sy_1}+\{\frac{A-B}{2}+Ay_1 s-2AcH_1 s^2\}e^{-sy_2}],$$
$$Q_1(s)=\frac{-b_x}{2(\kappa_1+1)}[(1-y_1 s)e^{-sy_1}+\{-\frac{A+B}{2}+Ay_2 s-2AcH_1 s^2\}e^{-sy_2}],$$
$$P_2(s)=\frac{G_1 b_x}{2(\kappa_1+1)G_2}[\frac{(A-B)z_1}{2|z_1|}+\{(1-B)z_1+(A-B)c\}s]e^{-s|z_1|},$$
$$Q_2(s)=\frac{-G_1 b_x}{2(\kappa_1+1)G_2}[\frac{2-A-B}{2}+\{(1-B)z_1+(A-B)c\}s]e^{-s|z_1|}. \tag{13}$$

여기서 $y_1=H_1-c$, $y_2=H_1+c$, $z_1=-H_2-c$이다.

따라서 식(11)의 경계조건 및 연속조건은 다음과 같이 표현된다:

$$-[s(A_{11}+A_{12}H_1)+2(1-\nu_1)A_{12}]e^{-sH_1}+[-s(A_{13}+A_{14}H_1)+2(1-\nu_1)A_{14}]e^{sH_1}=P_1(s),$$
$$-[s(A_{11}+A_{12}H_1)+(1-2\nu_1)A_{12}]e^{-sH_1}$$

$$
\begin{aligned}
&+[s(A_{13}+A_{14}H_1)-(1-2\nu_1)A_{14}]e^{sH_1}=Q_1(s),\\
&-[s(A_{21}-A_{22}H_2)+2(1-\nu_2)A_{22}]e^{sH_2}\\
&+[-s(A_{23}-A_{24}H_2)+2(1-\nu_2)A_{24}]e^{-sH_2}=P_2(s),\\
&-[s(A_{21}-A_{22}H_2)+(1-2\nu_2)A_{22}]e^{sH_2}\\
&+[s(A_{23}-A_{24}H_2)-(1-2\nu_2)A_{24}]e^{-sH_2}=Q_2(s),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{11}+A_{13}=A_{21}+A_{23},\\
&sA_{11}+\kappa_1A_{12}-sA_{13}+\kappa_1A_{14}\\
&=sA_{21}+\kappa_2A_{22}-sA_{23}+\kappa_2A_{24},\\
&-G_1[sA_{11}+2(1-\nu_1)A_{12}]\\
&+G_1[-sA_{13}+2(1-\nu_1)A_{14}]\\
&=-G_2[sA_{21}+2(1-\nu_2)A_{22}]\\
&+G_2[-sA_{23}+2(1-\nu_2)A_{24}],\\
&-G_1[sA_{11}+(1-2\nu_1)A_{12}]\\
&+G_1[sA_{13}-(1-2\nu_1)A_{14}]\\
&=-G_2[sA_{21}+(1-2\nu_2)A_{22}]\\
&+G_2[sA_{23}-(1-2\nu_2)A_{24}],
\end{aligned}
$$

식(14)로부터 경계조건과 연속조건을 만족하는 $A_{ij}$를 $s$의 함수로 풀어 줄 수 있으므로, 구해진 $A_{ij}$를 식(9)와 식(10)에 대입하여 적분을 행함으로써 변위장과 응력장을 구하게 된다. 그러나 이러한 계산은 너무 복잡하여 폐형해(closed solution)로 구할 수는 없으므로 식(9)와 식 (10)의 적분을 수치적으로 행하였다.

수치적분은 주어진 $x$에 대하여 cos sx(또는 sin sx)가 0이 되는 $s$의 점들 사이를 한 구간으로 하여 각 구간에 대하여 수치적분을 행한뒤 그 값들을 더하였다. 그리고 각 구간의 적분값이 일정치 이내로 되면 적분을 중단하였다. 수렴이 잘 되지않을 때는 오일러변환(euler transformation)[13]을 이용하여 수렴을 빠르게 하였다. 각 구간에서의 수치적분은 구간을 다시 몇개의 작은 구간으로 나누고 각 작은 구간 내에서는 Gaussian 적분공식을 이용하였다.

다음으로 버거스벡터 $b_y$에 의한 응력장에 대하여 고려하여 보자. 이 경우에 식(3) 및 식(4)로부터 구해진 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$ 및 $q_2(x)$는 다음과 같은 관계를 가진다. 즉,

$$
\begin{aligned}
&p_1(x)=-p_1(-x),\quad p_2(x)=-p_2(-x),\\
&q_1(x)=q_1(-x),\quad q_2(x)=q_2(-x).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

따라서 재료 $i(i=1,2)$에서의 변위를 각각 $u_i$, $v_i$라고하면 $u_i$는 $x$에 대하여 우함수(even function), $v_i$는 기함수(odd function)가 되므로 다음과 같이 푸리에적분(fourier integral)으로 나타낼 수가 있다:

$$
\begin{aligned}
u_i(x,y)&=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty \Phi_i(s,y)\cos sx\,ds,\\
v_i(x,y)&=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty \Phi_i(s,y)\sin sx\,ds.
\end{aligned}
\qquad (i=1,2)
\tag{16}
$$

식(16)을 식(8)에 대입하여 풀어주면,

$$
\begin{aligned}
u_i(x,y)&=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty[(A_{i1}+A_{i2}y)e^{-sy}\\
&\quad+(A_{i3}+A_{i4}y)e^{sy}]\cos sx\,ds,\\
v_i(x,y)&=\frac{2}{\pi}\int_o^\infty[\{-A_{i1}-(\kappa_i/s+y)A_{i2}\}e^{-sy}\\
&\quad+\{A_{i3}-(\kappa_i/s-y)A_{i4}\}e^{sy}]\sin sx\,ds.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

여기서 $A_{ij}$는 $s$의 함수로 경계조건과 접합면에서의 연속조건에 의하여 결정된다. 그리고 $A_{ij}$가 알려질 경우 응력값은 다음식에 의하여 구해진다:

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{xx})_i&=\frac{4G_i}{\pi}\int_o^\infty[\{-s(A_{i1}+A_{i2}y)+2\nu_iA_{i2}\}e^{-sy}\\
&\quad+\{-s(A_{i3}+A_{i4}y)-2\nu_iA_{i4}\}e^{sy}]\\
&\quad\sin sx\,ds,\\
(\sigma_{yy})_i&=\frac{4G_i}{\pi}\int_o^\infty[\{s(A_{i1}+A_{i2}y)\\
&\quad+2(1-\nu_i)A_{i2}\}e^{-sy}\\
&\quad+\{s(A_{i3}+A_{i4}y)\\
&\quad-2(1-\nu_i)A_{i4}\}e^{sy}]\sin sx\,ds,\\
(\sigma_{xy})_i&=\frac{4G_i}{\pi}\int_o^\infty[-\{s(A_{i1}+A_{i2}y)\\
&\quad+(1-2\nu_i)A_{i2}\}e^{-sy}\\
&\quad+\{s(A_{i3}+A_{i4}\}\\
&\quad-(1-2\nu_i)A_{i4}\}e^{sy}]\cos sx\,ds.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

만족되어야 할 경계조건과 접합면에서의 연속조건은 식(11)과 동일하다. 다음과 같이 $P_1$, $Q_1$, $P_2$ 및 $Q_2$를 정의한다:

$$
\begin{aligned}
P_1(s)&=\frac{1}{2G_1}\int_o^\infty[-p_1(x)]\sin sx\,dx,\\
Q_1(s)&=\frac{1}{2G_1}\int_o^\infty[-q_1(x)]\cos sx\,dx,
\end{aligned}
$$

$$P_2(s)=\frac{1}{2G_2}\int_o^\infty[-p_2(x)]\sin sx\,dx, \qquad (19)$$
$$Q_2(s)=\frac{1}{2G_2}\int_o^\infty[-q_2(x)]\cos sx\,dx.$$

식(3) 및 식(4)의 응력함수로부터 $p_1$, $q_1$, $p_2$ 및 $q_2$를 구하고, 이를 식(12)에 대입하면 다음과 같이 된다:

$$P_1(s)=\frac{-b_y}{2(\kappa_1+1)}[(1+y_1s)e^{-sy_1}-\{\frac{A+B}{2}+Ay_2s+2AcH_1s^2\}e^{-sy_2}],$$
$$Q_1(s)=\frac{-b_y}{2(\kappa_1+1)}[-y_1se^{-sy_1}+\{-\frac{A-B}{2}+A_{y1}s+2AcH_1s^2\}e^{-sy_2}],$$
$$P_2(s)=\frac{G_1b_y}{2(\kappa_1+1)G_2}[\frac{A+B-2}{2}-\{(B-1)z_1-(A-B)c\}s]e^{-s|z_1|} \qquad (20)$$
$$Q_2(s)=\frac{-G_1b_y}{2(\kappa_1+1)G_2}[\frac{(A-B)z_1}{2|z_1|}-\{(1-B)z_1+(A-B)c\}s]]e^{-s|z_1|}.$$

여기서 $y_1=H_1-c$, $y_2=H_1+c$, $z_1=-H_2-c$이다.

따라서 식(11)의 경계조건 및 연속조건은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned}
&[s(A_{11}+A_{22}\ H_1)+2(1-\nu_1)\ A_{12}]e^{-sH_1}\\
&+[s(A_{13}+A_{14}\ H_1)-2(1-\nu_1)\ A_{14}]e^{sH_1}=P_1(s),\\
&-[s(A_{11}+A_{22}\ H_1)+(1-2\nu_1)\ A_{12}]e^{-sH_1}\\
&+[s(A_{13}+A_{14}\ H_1)-(1-2\nu_1)\ A_{14}]e^{sH_1}=Q_1(s),\\
&[s(A_{21}-A_{22}\ H_2)+2(1-\nu_2)\ A_{22}]e^{sH_2}\\
&+[s(A_{23}-A_{24}\ H_2)-2(1-\nu_2)\ A_{24}]e^{-sH_1}=P^2(s),\\
&-[s(A_{21}-A_{22}\ H_2)+(1-2\nu_2)\ A_{22}]e^{sH_2}\\
&+[s(A_{23}-A_{24}\ H_2)-2(1-\nu^2)\ A_{24}]e^{-sH_2}=Q_2(s),\\
&A_{11}+A_{13}=A_{21}+A_{23}, \qquad (21)\\
&sA_{11}+\kappa_1A_{12}-sA_{13}+\kappa_1A_{14}\\
&=sA_{21}+\kappa_2A_{22}-sA_{23}+\kappa_2A_{24},\\
&G_1[sA_{11}+2(1-\nu_1)A_{12}]\\
&+G_1[sA_{13}-2(1-\nu_1)A_{14}]\\
&=G_2[sA_{21}+2(1-\nu_2)A_{22}]\\
&+G_2[sA_{23}-2(1-\nu_2)A_{24}],\\
&-G_1[sA_{11}+(1-2\nu_1)A_{12}]\\
&+G_1[sA_{13}-(1-2\nu_1)A_{14}]\\
&=-G_2[sA_{21}+(1-2\nu_2)A_{22}]\\
&+G_2[sA_{23}-(1-2\nu_2)A_{24}].
\end{aligned}$$

식(21)로부터 경계조건과 연속조건을 만족하는 $A_{ij}$를 $s$의 함수로 풀어 줄 수 있으므로, 구해진 $A_{ij}$를 식(9)와 식(10)에 대입하여 적분을 행함으로써 변위장과 응력장을 구하게 된다. 그러나 이러한 계산은 너무 복잡하여 전술한 바와 같이 수치적으로 행한다.

## 3. 균열문제의 해석

Fig. 3과 같이 두께가 각각 $H_1$, $H_2$이고 길이가 무한히 긴 두 탄성층이 접합되어 있고, 층 내부에는 길이가 $2a$이고 $x$축과 $\theta$의 각도를 이루는 임의의 균열이 존재하는 경우의 문제에 대하여 고려하여 보자. 그리고 균열면 상에는 수직응력 $p(x_1)$과 전단응력 $q(x_1)$이 작용하고 있다고 한다.

이러한 경우에 균열면 상에서 서로 대응하고 있는 두 점 사이에는 $x_1$과 $y_1$ 방향의 변위의 불연속이 발생할 것이므로 균열을 클라임전위(climb dislocation)와 글라이드전위(glide dislocation)의 연속된 분포로 나타낼 수 있다. 이러한 목적으로 사용되는 전위를 균열전위라고 하여 균열해석에 유용한 도구로 사용되어지고 있다. 그리고 전위를 사이의 평형조건(equilibrium condition)을 만족하는 전위밀도함수(dislocation density function)를 구함으로써 문제의 해를 구하게 된다.

$-a<x_1<a$에서의 글라이드전위의 밀도함수를 $f_1(x_1)$, 클라임전위의 밀도함수를 $f_2(x_1)$라고 하면, 전위를 사이에 만족하여야 할 평형조건은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{m}M_{11}(x_1,\zeta)\ f_1(\zeta)\ d\zeta\\
&+\int_{-a}^{m}M_{12}(x_1,\zeta)\ f_2(\zeta)\ d\zeta=p(x_1),\\
&\int_{-a}^{m}M_{21}(x_1,\zeta)\ f_1(\zeta)\ d\zeta
\end{aligned} \qquad (22)$$

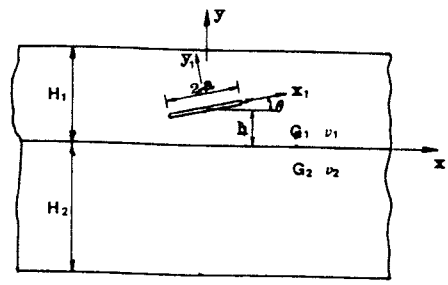


Fig. 3 A crack in bonded layers

$$+\int_{-a}^{a} M_{22}(x_1,\zeta)\ f_2(\zeta)\ d\zeta = q(x_1).$$

여기서 $M_{ij}(x_1, \zeta)$는 균열면에서의 좌표 $\zeta$에 존재하는 단위 글라이드 전위($j=1$인 경우) 또는 단위 클라임전위($j=2$인 경우)에 의하여 균열면에서의 좌표 $x_1$에 생기는 균열면에 대한 수직응력($i=1$인 경우) 또는 전단응력($i=2$인 경우)을 뜻하는 것으로 식(10) 및 식(18)에 의하여 구해진다. 버거스벡터 $b_1$의 글라이드전위가 있는 경우에는 $b_x=b_1\cos\theta$에 의한 응력장과 $b_y=b_1\sin\theta$에 의한 응력장의 합이된다. 또한 버거스벡터 $b_2$의 글라이드전위가 있는 경우에는 $b_x=-b_2\sin\theta$에 의한 응력장과 $b_y=b_2\cos\theta$에 의한 응력장의 합이된다.

또한 균열면에서의 적절한 변위장을 위해서,

$$\int_{-a}^{a} f_1(\zeta)\ d\zeta=0,$$
$$\int_{-a}^{a} f_2(\zeta)\ d\zeta=0 \tag{23}$$

의 조건을 만족하여야 한다.

적분구간을 −1에서 1로 만들어 주기위하여 다음과 같이 정의 되는 변수를 도입한다.

$$\zeta=at, \qquad x=as \tag{24}$$

식(22)를 식(24)로 정의되는 변수로 표현하면,

$$a\int_{-1}^{1} M_{11}(s,t)\ f_1(t)\,dt$$
$$+a\int_{-1}^{1} M_{12}(s,t)\ f_2(t)\ dt=p(s),$$
$$a\int_{-1}^{1} M_{21}(s,t)\ f_1(t)\ dt$$
$$+a\int_{-1}^{1} M_{22}(s,t)\ f_2(t)\ dt=q(s). \tag{25}$$

또한 식(23)은 다음과 같이 된다.

$$\int_{-1}^{1} f_1(t)\ dt=0,$$
$$\int_{-1}^{1} f_2(t)\ dt=0. \tag{26}$$

열림균열선단을 가정할 경우 균열선단에서는 전위밀도함수가 무한한 값을 가지게 되고, $f_1(t)$와 $f_2(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다[14] :

$$f_1(t)=\frac{\phi_1(t)}{\sqrt{1-t^2}},$$
$$f_2(t)=\frac{\phi_2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \tag{27}$$

식(27)을 식(25)에 대입하면,

$$a\int_{-1}^{1} M_{11}(s,t)\frac{\phi_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$+a\int_{-1}^{1} M_{12}(s,t)\frac{\phi_2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=p(s),$$
$$a\int_{-1}^{1} M_{21}(s,t)\frac{\phi_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{28}$$
$$+a\int_{-1}^{1} M_{22}(s,t)\frac{\phi_2(t)}{\sqrt{1-t_2}}dt=q(s).$$

이 되고, 식(27)을 식(26)에 대입하면,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=0,$$
$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi_2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=0. \tag{29}$$

이 된다.

풀어야 할 식(28)과 식(29)는 Cauchy 형태의 연립 특이적분방정식(singular intergal equation)으로 이의 풀이는 Erdogan과 Gupta[15,16]에 의해 개발된 수치적인 방법을 사용한다.

Gauss-Chebyshev 적분공식을 적용하면 식(28)은 다음과 같이 된다 :

$$\sum_{k=1}^{n} M_{11}(s_r,\ t_k)\ \phi_1(t_k)$$
$$+\sum_{k=1}^{n} M_{12}(s_r,\ t_k)\ \phi_2(t_k)$$
$$=\frac{np(s_r)}{\pi a},$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{21}(s_r,\ t_k)\,\phi_1(t_k) \tag{30}$$
$$+\sum_{k=1}^{n} M_{22}(s_r,\ t_k)\ \phi_2(t_k)$$
$$=\frac{nq(s_r)}{\pi a}.$$

여기서

$$t_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad k=1,2\cdots n \tag{31}$$

$$s_r=\cos\frac{\pi r}{n} \qquad r=1, 2\cdots n-1$$

이다. 또한 식(29)는,

$$\sum_{k=1}^{n}\phi_1(t_k)=0,$$
$$\sum_{k=1}^{n}\phi_2(t_k)=0 \tag{32}$$

이 된다. 즉 $2n$개의 연립방정식으로 표현된다. 구해야 할 미지수가 $\phi_1(t_1)\cdots\phi_1(t_n)$, $\phi_2(t_1)\cdots\phi_2(t_n)$의 $2n$개 이므로 미지수를 유일하게 결정할 수 있는 충분한 방정식이 존재함을 알 수 있다.

$t_k(k=1, \cdots n)$ 점에서의 전위밀도함수 값을 구하면 $t=\pm1$에서의 전위밀도함수 값은 다음 식으로부터 구해진다[17].

$$\phi(1)\simeq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin[(2n-1)(2i-1)\pi/(4n)]}{\sin[(2i-1)\pi/(4n)]}\phi(t_i),$$
$$\phi(-1)\simeq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin[(2n-1)(2i-1)\pi/(4n)]}{\sin[(2i-1)\pi/(4n)]}\phi(t_{n+1-i}) \tag{33}$$

$t=\pm1$에서의 전위밀도함수와 응력강도계수와의 관계는 다음과 같다:

$$(K_I)_{t=1}=-\frac{2G_1\sqrt{\pi a}}{(\kappa_1+1)}\phi_2(1),$$
$$(K_{II})_{t=1}=-\frac{2G_1\sqrt{\pi a}}{(\kappa_1+1)}\phi_1(1),$$
$$(K_I)_{t=-1}=\frac{2G_1\sqrt{\pi a}}{(\kappa_1+1)}\phi_2(-1),$$
$$(K_{II})_{t=-1}=\frac{2G_1\sqrt{\pi a}}{(\kappa_1+1)}\phi_1(-1). \tag{34}$$

$t=i$이 재료 2에 포함되는 경우는 $G_1$, $\kappa_1$ 대신 $G_2$, $\kappa_2$를 사용하여야 하고, $t=-1$에 대해서도 마찬가지로 하여야 한다.

## 4. 응력강도계수의 계산

### 4.1 중심균열

완성된 프로그램의 정확성을 검토하기 위하여 정확한 해석 결과가 존재하는, 길이가 무한이고 유한한 폭을 가진 띠의 중앙에 균열이 존재하는 Fig. 4에 도시된 문제를 해석하였다. 이 문제는 Fig. 3에서 $H_1=H_2=H$, $G_1=G_2$, $\nu_1=\nu_2$로 하고, $c=0$, $\theta=90°$로 하면 해석할 수 있다.

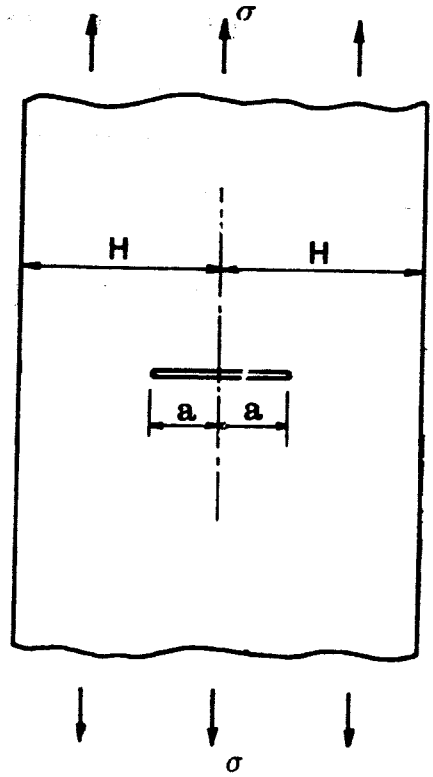


Fig. 4 A center crack

Table 1 Analysis of center crack

| a/H | $K_I$(solution of present study) | | | $K_I$(solution of Isida) |
|---|---|---|---|---|
| | $n=5$ | $n=10$ | $n=15$ | |
| 0.1 | 1.00600 | 1.00600 a | 1.00600 | 1.0060 |
| 0.2 | 1.02459 | 1.02459 | 1.02459 | 1.0246 |
| 0.3 | 1.05776 | 1.05774 | 1.05774 | 1.0577 |
| 0.4 | 1.10947 | 1.10937 | 1.10937 | 1.1094 |
| 0.5 | 1.18713 | 1.18666 | 1.18666 | 1.1867 |
| 0.6 | 1.30508 | 1.30331 | 1.30331 | 1.3033 |
| 0.7 | 1.49440 | 1.48828 | 1.48831 | 1.4882 |
| 0.8 | 1.83725 | 1.81661 | 1.81600 | 1.8160 |
| 0.9 | 2.65609 | 2.59203 | 2.58052 | 2.5776 |

In this table, superscript ·denotes $\sigma\sqrt{\pi a}$ non-dimensionalized item

해석된 결과는 Table 1에서와 같이 Isida[16]의 해와 비교하였다. Isida의 해와는 $a/H\leq0.9$인 경우,

식(30)의 $n$이 5일때는 최대 3%, 10일 때는 0.6%, 그리고 15일 때는 최대 0.1%의 차이를 보였다. 즉 본 해석 방법은 $n$값이 작은 경우에도 정확한 응력강도계수값을 주고 있음을 알 수 있다. 이하 계산에서는 $n=15$를 사용하였다.

### 4.2 계면에 평행한 균열

Fig. 3의 문제에서 $\theta=0°$인 경우, 즉 균열이 계면에 평행한 경우의 문제를 해석하였다. 이 경우 균열면에는 수직응력 $p_o$ 또는 전단응력 $q_o$의 일정한 응력이 작용한다고 한다.

(1) 접합된 재료의 영향

먼저 접합된 재료의 성질이 응력강도계수에 미치는 영향을 살펴보았다. 접합된 두 탄성재료의 영향은 Dundurs[19]의 계면에 대한 매개변수 $\alpha$, $\beta$에 의하여 기술될 수 있다. 여기서 $\alpha$, $\beta$는 다음과 같이 정의 된다:

$$\alpha=\frac{G_2(\kappa_1+1)-G_1(\kappa_2+1)}{G_2(\kappa_1+1)+G_1(\kappa_2+1)},$$
$$\beta=\frac{G_2(\kappa_1-1)-G_1(\kappa_2-1)}{G_2(\kappa_1+1)+G_1(\kappa_2+1)}. \tag{35}$$

Fig. 5(a)와 Fig. 5(b)는 $H_1=H_2=a$, $h=a/4$이고 균열면에 수직한 응력 $p_o$가 작용하는 경우 $\alpha$, $\beta$에 따른 무차원화된 응력강도계수 $K_I^*$ 및 $K_{II}^*$를 각각 도시한 것이다. 여기서 $K_I^*=K_I/(p_o\sqrt{\pi a})$, $K_{II}^*=K_{II}/(p_o\sqrt{\pi a})$이다.

Fig. 5(a)에서 볼 때, $\alpha$ 및 $\beta$ 값이 1에 접근하는 경우, 즉 $G_1\ll G_2$이 될수록 $K_I^*$값이 감소하고, $\alpha$값이 $-1$에 접근하는 경우 즉 $G_1\gg G_2$인 경우는 $K_I^*$값이 증가함을 알 수 있다.

계면에 평행한 균열이 자유표면 즉 Fig. 3에서 위쪽으로 성장을 할 것인지, 계면 쪽으로 성장을 할 것인지 또는 계면에 평행하게 성장을 할 것인지는 $K_{II}^*$에 의하여 판단된다. 즉 $K_{II}^*=0$인 경우는 계면에 평행하게, $K_{II}^*<0$은 자유표면 쪽으로, $K_{II}^*>0$은 계면 쪽으로 성장을 할 것이다. Fig. 5(b)에서 볼 때 접합된 두 재료의 성질에 따라 $K_{II}^*$의 부호가 바뀌어짐을 알 수 있다. 즉 접합된 재료의 조합에 따라 균열의 성장 방향이 달라진다.

Fig. 6(a)와 Fig. 6(b)는 $H_1=H_2=a$, $h=a/8$이고 균열면에 수직한 응력 $p_o$가 작용하는 경우 $\alpha$, $\beta$에 따른 무차원화된 응력강도계수 $K_I^*$ 및 $K_{II}^*$를

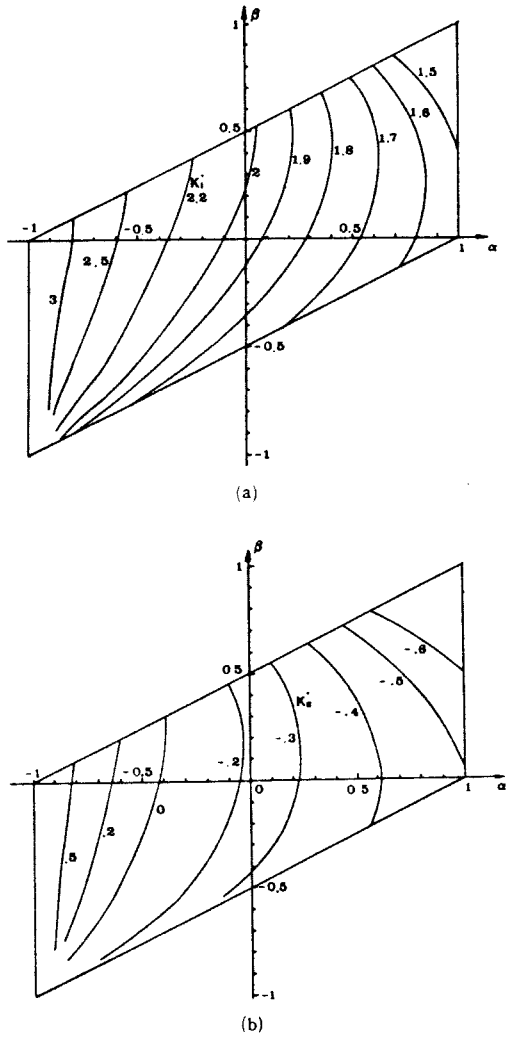


**Fig. 5** (a) Non-dimensionalized stress intensity factors $K_I^*$ for various material combination when $h=a/4$
(b) Non-dimensionalized stress intensity factors $K_{II}^*$ for various material combination when $h=a/4$

각각 도시한 것이다. Fig. 6(a)를 Fig. 5(a)와 비교해 보면, $\alpha$ 및 $\beta$ 값이 1이 될수록 $K_I^*$값의 감소되는 율이 심하고, $\alpha$값이 $-1$에 접근하는 경우 $K_I^*$의 증가되는 율이 심하여 $h$가 작아질수록 조합된 재료의 영향을 많이 받게 됨을 알 수 있다. 또한 Fig. 6(b)를 Fig. 5(b)와 비교해 보면, $K_{II}^*=0$인 곡선이 변화하고 있음을 알 수 있고 따라서 균열의

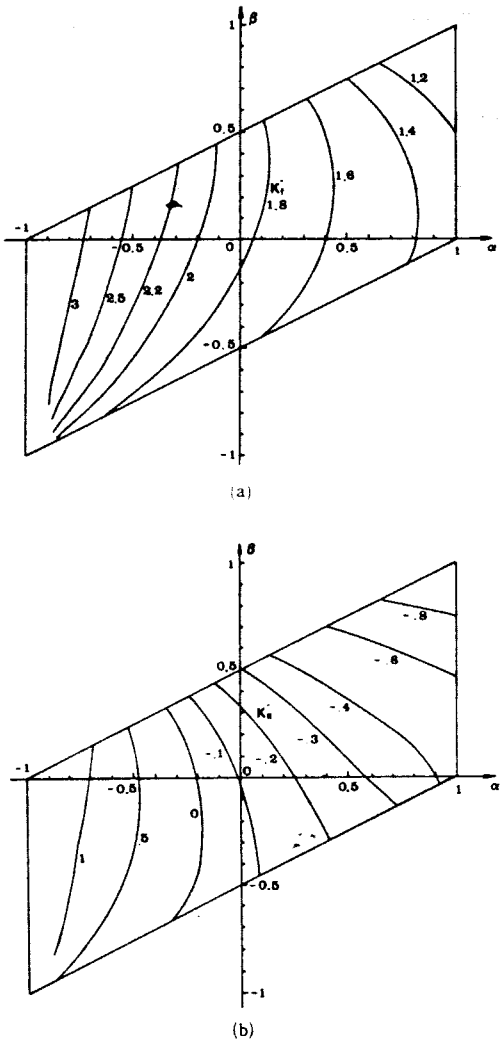


**Fig. 6** (a) Non-dimensionalized stress intensity factors $K_I^*$ for various material combination when $h=a/8$
(b) Non-dimensionalized stress intensity factors $K_{II}^*$ for various material combination when $h=a/8$

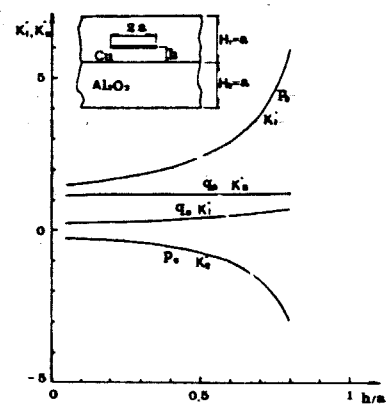


**Fig. 7** Non-dimensionalized stress intensity factors $K_I^*$, $K_{II}^*$ as a function of h/a when uniform normal stress $p_o$ or shear stress $q_o$ is applied on crack surface

성장방향은 재료의 조합 뿐만아니라 균열이 존재하고 있는 위치에 의해서도 영향을 받게됨을 알 수 있다.

(2) $h$의 영향

다음으로 $h$의 변화가 응력강도계수에 미치는 영향을 살펴보았다. 재료는 Cu와 $Al_2O_3$가 접합된 경우로 선택하였다. Cu는 $G=47800$ MPa, $\nu=0.345$이고 $Al_2O_3$는 $G=197200$ MPa, $\nu=0.207$로 Cu/$Al_2O_3$의 접합인 경우, 즉 Cu가 재료 1이고 $Al_2O_3$가 재료 2인 경우는 $\alpha=0.512$, $\beta=0.0887$이 되고, $Al_2O_3$/Cu에서는 $\alpha$ 및 $\beta$ 부호가 반대로 된다.

$H_1=H_2=a$, $p_o$ 혹은 $q_o$의 하중이 작용되는 경우의 $h/a$에 따른 $K_I^*$, $K_{II}^*$의 변화를 Fig. 7에서 보여주고 있다. 여기서 상첨자 *는 $p_o$의 응력이 작용되는 경우는 $p_o\sqrt{\pi a}$에 대하여, $q_o$의 응력이 작용되는 경우는 $q_o\sqrt{\pi a}$에 대하여 무차원화 되었음을 의미한다.

Fig. 7의 결과에서 볼 때, $p_o$의 하중이 작용되는 경우 $h/a$가 1에 접근할수록 $K_I^*$의 값이 커지고, 0에 접근하는 경우는 일정한 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다. $K_{II}^*$의 경우는 $h/a$의 모든 값에 대하여 0보다 작은 값이 얻어져 균열의 진행방향은 항상 자유표면 쪽이 됨을 알 수 있다. 즉, $G$값이 작은 Cu와 $G$값이 큰 $Al_2O_3$가 접합된 경우, Cu내에 존재하는 평행균열의 진행방향은 모두 자유표면 쪽을 향하게 된다. 그러나 $h/a$가 0이 될수록 $K_{II}^*/K_I^*$의 비가 작아짐을 알 수 있는 바, 이는 균열의 성장방향은 자유표면 쪽을 향하게 되지만 계면에 접근할수록 자유표면을 향하는 각도는 점차 완만하게 됨을 의미한다. $q_o$의 하중이 작용되는 경우는 $h/a$ 값이 $K_I^*$ 및 $K_{II}^*$에 미치는 영향이 비교적 작음을 알 수 있다. 그리고 균열의 성장방향은 $q_o$의 부호에 따라결정되어, $q_o$가 (−)인 경우는 자유표면 쪽으로, $q_o$가 (+)인 경우는 항상 계면 쪽으로 향하

게 된다.

Fig. 8은 $Al_2O_3$/Cu의 접합인 경우 $h/a$에 따른 $K_I^*$, $K_{II}^*$의 변화를 보여주고 있다. $p_o$의 하중이 작용되는 경우 $h/a$가 1에 접근할수록 $K_I^*$의 값이 커지고, 0에 접근하는 경우는 일정한 값에 수렴하게 된다. 이 경우 $K_{II}^*$에 따라 +값에서 −값으로 변하고 있음을 알 수 있다. 즉 $h/a<0.27$인 경우는 균열이 계면 쪽으로 진행하지만 $h/a>0.27$인 경우는 진행방향이 자유표면 쪽이 된다.

$q_o$의 하중이 작용하는 경우는 $h/a$가 커질수록 $K_{II}^*$는 조금 감소하고, $K_I^*$는 −값에서 +값으로 증가함을 볼 수 있다. 여기서 $K_I^*$가 −값이 되었다 함은 균열이 닫혀 균열선단 부근에 접촉역(contact zone)이 존재 하고 있음을 의미한다.

(3) $H_2$의 영향

다음으로 $H_2$의 변화가 응력강도계수에 미치는 영향을 살펴보았다. Fig. 9는 Cu/$Al_2O_3$의 접합에서 $H_i=a$, $h=a/4$이고 $p_o$의 일정한 응력이 균열면에 작용하는 경우 $H_2/a$에 따른 $K_I^*$ 및 $K_{II}^*$의 변화를 보여주고 있다. $H_2/a$가 증가할수록 $K_I^*$, $K_{II}^*$의 값은 감소하여 일정한 값($H_2/a=\infty$일 때의 값)에 수렴하고 있음을 알 수 있다. 여기서 $H_2/a=0$인 경우는 균질재료의 띠 내에 존재하는 균열문제가 된다.

(4) $a$의 영향

Fig. 10은 Cu/$Al_2O_3$의 접합에서 $H_i=H_2$, $h=$

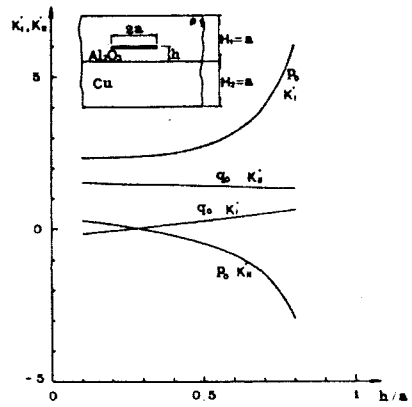


Fig. 8 Non-dimensionalized stress intensity factors $K_I^*$, $K_{II}^*$ as a function of h/a when uniform normal stress $p_o$ or shear stress $q_o$ is applied on crack surface

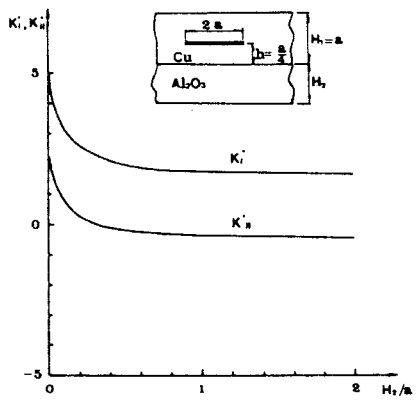


Fig. 9 Non-dimensionalized stress intensity factors $K_I^*$, $K_{II}^*$ as a function of $H_2$/a when uniform normal stress $p_o$ is applied on crack surface

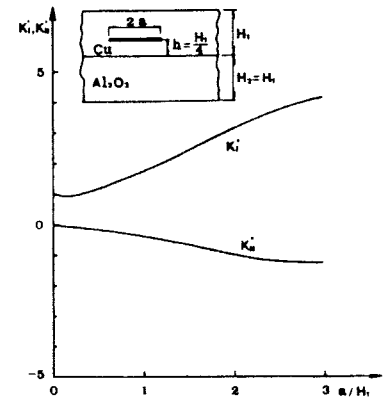


Fig. 10 Non-dimensionalized stress intensity factors $K_I^*$, $K_{II}^*$ as a function of a/$Hi$ when uniform normal stress $p_o$ is applied on crack surface

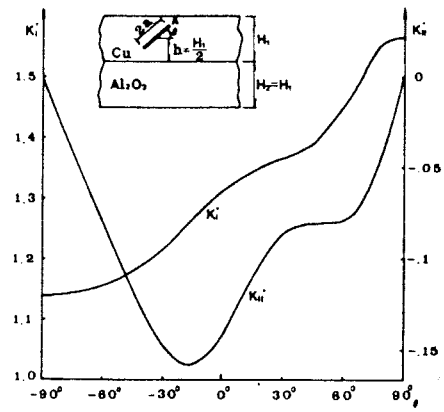


Fig. 11 Non-dimensionalized stress intensity factors $K_I^*$, $K_{II}^*$ as a function of $\theta$ when uniform normal stress $p_o$ is applied on crack surface

$H_i/4$이고 $p_o$의 균일한 응력이 균열면에 작용하는 경우 $a/H_1$에 따른 $K_I^*$ 및 $K_{II}^*$의 변화를 보여주고 있다. 균열의 길이가 작아질수록 $K_I^*$의 값은 점차 1에 접근하고, $K_{II}^*$의 값은 0에 접근하고 있음을 알 수 있다. 즉 균열의 길이가 다른 부분의 길이보다 아주 작아지는 경우는 균질재료의 무한평판내에 존재하는 균열에 대한 해가 된다.

### 4.3 경사진 균열

Fig. 11은 $Cu/Al_2O_3$의 접합에서 $H_1=H_2=2.5a$, $h=1.25a$이고 $p_o$의 균일한 수직응력이 균열면에 작용하는 경우 $\theta$에 따른 $A$점에서의 무차원화된 응력강도계수 $K_I^*$ 및 $K_{II}^*$의 변화를 보여주고 있다. 균열선단이 자유표면에 가까이 갈수록 $K_I^*$의 값이 점차 커지고, Cu보다 $G$값이 큰 $Al_2O_3$에 가까이 갈수록 $K_I^*$의 값이 작아지고 있음을 알 수 있다. $K_{II}^*$의 경우는 $\theta=-20^\circ$ 근처에서 최대의 절대값을 가지고, $\theta=90^\circ$ 또는 $-90^\circ$가 될수록 점차 0으로 됨을 알 수 있다.

## 5. 결 론

서로 성질이 상이한 두 탄성층이 접합된 경우 탄성층 내에 존재하는 임의의 길이 및 임의의 기울기를 가지는 균열에서의 응력강도계수(stress intensity factor)를 구하였다. 이 때 두 층은 각각 유한한 두께를 가진 균질한 등방성의 선형탄성재료이고, 균일한 수직 혹은 전단응력이 균열면에 작용한다고 가정하였다.

균열은 인선전위(edge dislocation)가 연속적으로 분포된 것으로 나타내었고, 평형조건을 만족하는 전위밀도함수(dislocation density function)를 구함으로써 응력강도계수를 구하였다. 이 경우 접합된 두 탄성층의 내부에 존재하는 전위에 의한 응력장은 푸리에변환(fourier transformation)을 이용하여 구하였다.

이러한 해석 방법을 사용하여, 접합된 두 탄성층 내에 존재하는, 계면에 평행한 균열에 대하여 접합된 재료가 응력강도계수에 미치는 영향을 살펴보았고, Cu와 $Al_2O_3$가 접합된 경우에 대하여 층의 두께, 균열의 위치, 균열의 길이 및 경사각도 등이 응력강도계수와 균열의 성장 방향에 미치는 영향을 살펴보았다.

결론적으로, 본 해석방법은 유한 혹은 무한 탄성층이 접합된 경우에 층내에 존재하는 임의의 균열에 대한 응력강도계수를 정확하고 효과적으로 구할 수 있는 좋은 방법임을 알 수 있었다. 특히 균열이 계면에 아주 가까이 존재하는 문제와 같이 F.E.M. (finite element method) 등의 방법으로는 해석하기가 곤란한 경우의 문제에도 적용할 수가 있다.

## 후 기

본 논문은 한국과학재단의 재정지원으로 이루어진 연구결과로 (과제번호 893-0907-020-1), 재정지원을 해준 한국과학재단에 감사드립니다.

## 참고문헌

(1) Murakami, Y., 1987, "Stress Intensity Factors Handbook," Pergamon Press, Oxford.

(2) Erdogan, F. and Gupta, G., 1971, "The Stress Analysis of Multi-Layered Composites with Flaw," Int. J. Solids Struotures, Vol.7, pp.39~61.

(3) Lu, M.C. and Erdogan, F., 1983, "Stress Intensity Factors in Two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface-I. Analysis," Engng. Frac. Mech., Vol, 18, pp.491~506.

(4) Suo, Z. and Hutchinson J.W., 1989, "Steady-State Cracking in Brittle Substrates Beneath Adherent Films," Int. J. Solids Struotures, Vol. 25, pp.1337~1353.

(5) Gupta, G.D. and Erdogan, F., 1974, "The Problem of Edge Cracks in an Infinite Strip," ASME J. Appl. Mech., Vol. 41,pp.1001~1006.

(6) Isida, M., 1966, "Stress-Intensity Factors for the Tension of an Eccentrically Cracked Strip," ASME J. Appl. Mech. Vol. 33, pp. 674~675.

(7) Sneddon, I.N., and Srivastav, R.P., 1971, "The Stress Field in the Vicinity of a Griffith Crack in a Strip of Finite Width," Int. J. Engng Soi., Vol. 9, pp.478~488.

(8) Civelek, M.B. and Erdogan, F., 1982, "Crack Problems for a Rectangular Plate and an Infinite Strip," Int. J. Frac., Vol. 119, pp. 139~159.

(9) Civelek, M.B., 1983, "Stress Intensity Factor for a System of Cracks in an Infinite Strip,"

Fracture Mechanics : Sixteenth Symposium, eds M.F. Kanninen and A.T. Hopper, ASTM STP 868.

(10) Dundurs, J. and Mura, T.,1964, "Interaction between an Edge Dislocation and a Circular Inclusion," J. Mech, Phys. Solids, Vol. 12, pp.177 ~189.

(11) Dundurs, J. and Sendeokyj, G.P., 1965, "Behavior of an Edge Dislocation near Bimatallic Interface," J. Appl. Phys., Vol. 36, pp. 3353 ~3354.

(12) 박재학, 1990, "접합된 두 탄성층의 파괴에 관한 연구", 한국과학재단 연구보고서, 과제번호 893-0907-020-1.

(13) Davis, P.J. and Rabinowitz, P., 1975, "Methods of Numerical Integration," Academic Press, New York.

(14) Muskhelishvili, N.I., 1953, "Singular Integral Equations," P. Noordhoff, Groningen.

(15) Erdogan, F. and Gupta, G.D., 1972, "On the Numerical Solution of singular Integral Equations," Quart. Appl. Math. Vol. 29, pp. 525~539.

(16) Erdogan, F., Gupta, G.D. and Cook, T.S., 1973, "Numerical Solution of Singular Integral Equations," Mechanics of Fracture, Vol. 1, ed, G.C. Sih, Noordhoff, Netherlands.

(17) Krenk, S., 1975, "On the Use of the Interpolation Polynomial for Solutions of Singular Integral Equations," Quart. Appl, Math., Vol. 33, pp. 479~484.

(18) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 1973, "The Stress Analysis of Cracks Handbook," Del Research Corporation, Pennsylvania.

(19) Dundurs, J., 1969, Discussion of "Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges under Normal and Shear Loading," ASME J. Appl. Mech., Vol.36, pp.650~652.