1530 大韓機械學會論文集 第15卷 第5號, pp. 1530~1537, 1991.

〈論 文〉

반무한 직선 계면균열문제에 관한 그린함수

최성렬* · 강기주**

(1991년 4월 12일 접수)

Green's Function of Semi-Infinite Straight Interfacial Crack Problems

S.R. Choi and K.J. Kang

Key Words: Green's Function(그린함수), Semi-Infinite(반무한), In-Plane(평면), Anti-Plane(비평면), Complex Potential(복소포텐셜), Interfacial Crack(계면균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Self Equilibrium(자기평형), Closed Form(폐형).

Abstract

A semi-infinite interfacial crack under in-plane and anti-plane with concentrated load respectively on the crack surface is analyzed. The problem is formulated using complex potential function, from which a Hilbert problem is derived. Stress intensity factor is given in closed form by solving the Hilbert problem. This solution can be used as a Green's function for the semi-infinite crack under arbitrary loadings.

기 호 설 명

l : 거리

$K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}$: 응력강도계수

P, Q, T : 하중

$u_x, u_y, u_z(=W)$: 변위성분

x, y : 직교좌표

$Z(=x+iy)$: 복소수

$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$: 응력성분

$\Omega(Z), \omega(Z), \phi(Z), \theta(Z)$: 복소포텐셜 함수

$\mu, \varkappa$: 재료상수

하첨자

$j(j=1,2)$: "재료1" 및 "재료2"

상첨자

$(-)$: 공액 복소수

$(')$: 변수의 미분

* 정회원, 경상대학교 공과대학 기계공학과
** 정회원, 전남대학교 공과대학 기계설계학과

1. 서 론

계면균열(interfacial crack)이란 성질이 상이한 두 재료의 접합면인 계면내에 존재하는 균열을 말한다. 계면균열문제는 Williams[1]에 의하여 그 해석이 비롯된 이후 Piva등[2]과 Rice[3]의 문헌에 잘 언급된 바와같이 많은 연구자에 의하여 수행되었으며, 이들 연구자들이 주로 해석한 문제는 유한크기의 직선계면균열 혹은 원호모양의 균열문제들이었다. 이러한 유한크기 혹은 원호모양의 균열문제에 비하여 반무한 직선균열문제는 보다 그 해석이 용이함에도 불구하고, 균열의 크기가 반무한(semi-infinite) 크기인 직선 계면균열문제에 관한 해석은 균열상하면에 한쌍의 집중하중이 작용하는 문제에 그치고 있다. Rice 및 Sih[4]는 반무한 직선 계면균열에서 균열상하면에 자기평형(self equilibrium)을 이루는 한쌍의 평면(in-plane)집중하중이 작용하는 문제를 해석하여 폐형(closed form)으로 주어지는

균열선단에 대한 응력강도계수(stress intensity factor)를 얻었다. 이들은 계면균열선단이 열려있다고 가정하였고 해석방법은 응력과 변위성분을 복소포텐셜 함수로 표현하여 고유함수 전개법으로 해석한 것이다. 이와같이 열린균열선단이라고 가정하여 얻은 해는 평면하중이 작용하는 균열문제의 경우에 균열선단부근의 응력과 변위가 진동하고 균열면이 중첩되는 등의 물리적으로 적합하지 못한 특성을 보이고 있다[5]. 그러나 탄성이론을 사용한 지금까지의 어떤 해석으로도 물리적 개념에 비추어 납득할 만한 계면균열문제의 해를 얻지 못하고 있는 점[2,6]과 이러한 진동특성을 보이는 해는 계면에 인접한 두 재료의 성질이 점차 같아짐에 따라 균질한 재료에 대한 해석결과와 일치하고 있을 뿐 아니라 물리적으로 적합하지 못한 특성을 나타내는 영역이 미소한 크기의 영역이라는 사실을 감안하여, 대부분 연구자들은 이러한 진동특성을 보이는 해를 계면균열에 관한 해로 간주하고 있다[3,7]. 또한 근래에는 진동특성을 보이는 해를 사용하여 재료의 파괴거동을 해석하는 사례가 증가하고 있는 바[8,9], 계면균열문제에 관한 해석으로 이와같이 열린 균열선단을 가정한 해석의 필요성이 요구되고 있다. 한편 비평면(anti-plane)하중이 작용하는 균열 문제는 평면하중이 작용하는 문제와는 달리 그 해석결과를 두고 볼 때 물리적으로 적합하지 못한 특성을 전혀 보이지 않음이 알려져 있다[10,11]. 자기평형을 이루는 한쌍의 비평면 집중전단하중이 계면균열의 상하면에 작용하는 문제는 Sih등[11,12]에 의하여 해석되었는 바, 이때의 응력강도계수는 계면에 인접한 두 재료의 성질에 무관하게 균질한(homogeneous)재료에 대한 응력강도계수와 일치하고 있다.

본 연구에서는 반무한 직선 계면균열의 상하면에 임의로 분포하는 어떠한 하중에 대해서도 그 해석이 가능한 그린함수(Green's function)를 구하고자 한다. 이를 위하여 반무한 직선 계면균열상의 임의의 한 점에 평면 집중하중이 작용하는 문제와 비평면 집중전단하중이 작용하는 문제를 각각 택하였고, 이때 계면균열의 선단은 열려있다고 가정하였다. 문제의 해석을 위하여 응력과 변위성분을 Muskhelishvili[13]의 복소포텐셜 함수로 나타내고 주어진 경계조건을 적용하여 Hilbert 문제를 구성한다. 이 문제를 풀므로써 균열선단부근의 응력성분을 결정하고 이로부터 그린함수의 의미를 지니는 응력강도계수에 대한 폐형해를 얻었다.

2. 평면 하중문제

2.1 문제의 수식화

Fig. 1에서 보는 바와같이 성질이 상이한 두 등방성 재료를 각각 "재료1" 및 "재료2"라고 할 때 이들 두 재료의 접합면인 계면에 반무한 직선균열이 놓여 있고, 균열면상의 임의의 한 점에 평면집중하중이 작용하는 문제를 생각하자. 직교좌표계 (x, y)를 도입하여 계면을 $x\geq 0$, $y=0$으로 고정하면, 계면균열은 $x<0$, $y=0$에 해당하고 크기가 각각 P 및 Q인 계면에 수직및 평행한 집중하중은 $x=-l$, $y=0^+$에 작용하게 된다. "재료1"로 이루어진 $y>0$의 영역을 S^+, 그리고 "재료2"로 이루어진 $y<0$의 영역을 S^-로 나타내고, 해석의 편의를 위하여 각 영역에 대한 응력과 변위를 각각 하첨자 1 및 2로써 표현하자. 가령 변위성분을 u_{jx} 및 $u_{jy}(j=1,2)$로 하고 응력성분을 σ_{jxx}, σ_{jxy} 및 $\sigma_{jyy}(j=1,2)$로 표현한다면, $j=1$ 및 $j=2$에 대응하는 변위와 응력성분은 각각 S^+ 및 S^-영역에 대한 양들을 말한다.

그러면 본 문제의 경계조건은

$$\sigma_{1yy}-i\sigma_{1xy}=(-P+iQ)\,\delta(x+l), \quad (y=0^+,\ x<0) \tag{1}$$

$$\sigma_{2yy}-i\sigma_{2xy}=0 \quad (y=0^-,\ x<0) \tag{2}$$

으로 표현되고, 여기서 i는 $i=\sqrt{-1}$이고 $\delta(x+l)$은 Dirac델타함수이다. 또한 면력(traction)과 변위에 관한 연속조건은 다음과 같다.

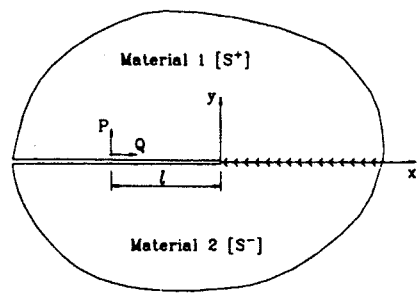

Fig. 1 Semi-infinite interfacial crack. One concentrated in-plane load with magnitude of P and Q in x and y direction respectively is applied at $x=-l$, $y=0^+$

$$u_{1x}+iu_{1y}=u_{2x}+iu_{2y}(y=0,\ x\geq 0) \tag{3}$$
$$\sigma_{1yy}-i\sigma_{1xy}=\sigma_{2yy}-i\sigma_{2xy}(y=0,\ x\geq 0) \tag{4}$$

복소수 Z를 $Z=x+iy(\bar{Z}=x-iy)$라고 할 때 응력은

$$\sigma_{jxx},\ \sigma_{jxy},\ \sigma_{jyy}=0(Z^{-1}),\ |Z|\to\infty\ (j=1,2) \tag{5}$$

인 점근거동을 보인다.

S^+ 및 S^-에서 해석적인 복소 포텐셜 함수 $\Omega_1(Z), w_1(Z)$ 및 $\Omega_2(Z), w_2(Z)$를 각각 도입하면, 각 영역에 대한 변위와 응력은 England문헌에 수록된 바와 같이 다음으로 표현된다[5,14]

$$\mu_j(u_{jx}+iu_{jy})=x_j\Omega_j(Z)-Z\bar{\Omega}_j'(\bar{Z})-\bar{w}_j(\bar{Z}),\quad (j=1,2) \tag{6}$$
$$\sigma_{jxx}+\sigma_{jyy}=4\{\Omega_j'(Z)+\bar{\Omega}_j'(\bar{Z})\},\ (j=1,2) \tag{7}$$
$$\sigma_{jyy}-i\sigma_{jxy}=2\{\Omega_j'(Z)+\bar{\Omega}_j'(\bar{Z})+Z\bar{\Omega}_j''(\bar{Z})+\bar{w}_j''(\bar{Z})\},\ (j=1,2). \tag{8}$$

여기서 상수 $\mu_j(j=1,2)$는 각각 "재료1" 및 "재료2"에 대한 전단계수이다. 또한 $x_j(j=1,2)$는 각 재료의 프와송비 $\nu_j(j=1,2)$로 표현되는 상수로서, 평면변형에 대하여 $x_j=3-4\nu_j$이고 평면응력에 대하여 $x_j=(3-\nu_j)/(1+\nu_j)$로 주어진다.

경계조건 식(1)~(4)를 만족하는 복소포텐셜함수 $\Omega_j(Z)$, $w_j(Z)$ $(j=1,2)$가 일단 결정된다면 식(6)~(8)로부터 임의의 Z에 대한 변위와 응력성분들이 모두 결정될 것이다. 먼저 식(3) 및 (4)를 만족하면서 $y=0$, $x<0$인 균열을 제외한 모든 영역에서 해석적인 함수 $\phi(Z)$및 $\theta(Z)$를 새로이 도입하면, $\phi(Z)$및 $\theta(Z)$는 S^+및 S^- 영역에 대하여 각각 다음과 같이 기술된다[5,14]:

$$\phi(Z)=\begin{cases}\mu_2x_1\Omega_1(Z)+\mu_1Z\bar{\Omega}_2'(Z)+\mu_1\bar{w}_2'(Z), & Z\in S^+\\ \mu_1x_2\Omega_2(Z)+\mu_2Z\bar{\Omega}_1'(Z)+\mu_2\bar{w}_1'(Z), & Z\in S^-\end{cases} \tag{9}$$

$$\theta(Z)=\begin{cases}\Omega_1'(Z)-\bar{\Omega}_2'(Z)-Z\bar{\Omega}_2''(Z)-\bar{w}_2''(Z), & Z\in S^+\\ \Omega_2'(Z)-\bar{\Omega}_1'(Z)-Z\bar{\Omega}_1''(Z)-\bar{w}_1''(Z), & Z\in S^-\end{cases} \tag{10}$$

식(9), (10)을 재 정돈하면 $\Omega_1'(Z)$ 및 $\Omega_2'(Z)$는 다음과 같이 된다.

$$(\mu_1+\mu_2x_1)\Omega_1'(Z)=\mu_1\theta(Z)+\phi'(Z),\quad Z\in S^+ \tag{11}$$
$$(\mu_2+\mu_1x_2)\Omega_2'(Z)=\mu_2\theta(Z)+\phi'(Z),\quad Z\in S^- \tag{12}$$

또한 식(10)을 사용하여 식(8)을 재 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_{1yy}-i\sigma_{1xy}=2\{\Omega_1'(Z)+\Omega_2'(\bar{Z})+(Z-\bar{Z})\bar{\Omega}_1''(\bar{Z})-\theta(\bar{Z})\},\ Z\in S^+ \tag{13a}$$
$$\sigma_{2yy}-i\sigma_{2xy}=2\{\Omega_2'(Z)+\Omega_1'(\bar{Z})+(Z-\bar{Z})\bar{\Omega}_2''(\bar{Z})-\theta(\bar{Z})\},\ Z\in S^- \tag{13b}$$

식(11), (12)를 식(13a), (13b)에 대입하여 얻은 결과식에 나머지 경계조건 식(1), (2)를 적용하여 정리하면, 다음과 같은 최종적으로 풀어야 할 $\theta(Z)$ 및 $\phi'(Z)$에 관한 Hilbert 문제가 구성된다.

$$\theta^+(x)-\theta^-(x)=\frac{1}{2}(-P+iQ)\,\delta(x+l),\quad x<0 \tag{14}$$
$$[\phi'(x)+\eta\theta(x)]^++\Lambda[\phi'(x)+\eta\theta(x)]^-=\frac{\mu_1+\mu_2x_1}{4}(1+\alpha)(-P+iQ)\,\delta(x+l),\ x<0 \tag{15}$$

식(14), (15)에서 상첨자(+)및 (−)는 각각 $y\to 0^+$ 및 $y\to 0^-$인 극한값을 나타내는 바, 가령 식(14)의 $\theta^+(x)$ 및 $\theta^-(x)$는

$$\theta^+(x)=\lim_{y\to 0^+}\theta(Z),\ \theta^-(x)=\lim_{y\to 0^-}\theta(Z) \tag{16a}$$

로 정의된 함수값을 말한다. 또한 상수 Λ, α, η는 각각

$$\Lambda=\frac{\mu_1+\mu_2x_1}{\mu_2+\mu_1x_2}, \tag{16b}$$
$$\alpha=\frac{\mu_2(x_1+1)-\mu_1(x_2+1)}{\mu_2(x_1+1)+\mu_1(x_2+1)} \tag{16c}$$
$$\eta=\frac{1}{2}\{(\mu_1-\mu_2x_1)+(\mu_1+\mu_2x_1)\alpha\} \tag{16d}$$

으로 주어지며 특히 α는 잘 알려진 Dundurs[15] 매개변수가 된다. 이때 $\theta(Z)$및 $\phi'(Z)$는 식(5)에 의하여 다음과 같은 점근거동을 보인다.

$$\theta(Z),\ \phi'(Z)=0(Z^{-1}),\ |Z|\to\infty \tag{17}$$

2.2 결과 및 논의

Muskhelishvili의 저서[13,16]에 서술된 방법을 따르면 식(14), (15)와 같은 Hilbert 문제의 해는 용이하게 결정된다. 식(17)의 점근거동을 고려하여 식(14)의 해를 구성하면 $\theta(Z)$는

$$\theta(Z)=-\frac{Q+iP}{4\pi(Z+l)} \tag{18}$$

으로 결정된다. 마찬가지로 식(17)의 점근거동을 고려하여 식(15)를 풀면 $\phi'(Z)$는 다음과 같이 용이하게 결정된다.

$$\phi'(Z)=\frac{\mu_1+\mu_2\chi_1}{8\pi(Z+l)}(1+\alpha)$$
$$(P-iQ)\,e^{-\pi\epsilon}\left(\frac{l}{Z}\right)^{\frac{1}{2}+i\epsilon}-\eta\theta(Z)\,; \tag{19}$$
$$\epsilon=\frac{1}{2\pi}\log\Lambda.$$

식(19)에서 $\theta(Z)$는 식(18)과 같고 그 외의 상수는 식(16b)~(16d)와 동일하다.

식(18), (19)와 식(11), (12)를 식(13a), (13b)에 적용하여 $y=0$, $x\geq 0$인 계면에서의 응력을 계산하면 다음과 같이 주어진다.

$$(\sigma_{yy}+i\sigma_{xy})_{y=0}$$
$$=\frac{\mu_2(1+\chi_1)}{\mu_2+\mu_1\chi_2}\,\frac{P+iQ}{2\pi(x+l)}\,\left(\frac{l}{x}\right)^{\frac{1}{2}-i\epsilon}e^{-\pi\epsilon}$$
$$-\frac{Q-iP}{2\pi(x+l)},\quad x\geq 0 \tag{20}$$

응력에 관한 식(20)은 균열선단이 열려있다고 가정하여 해석한 기존 연구자들의 결과와 동일하게 $x\to 0$으로 접근함에 따라 진동하는 특성을 보이고 있다[1~5].

일반적으로 균열선단에 관한 복소응력강도계수 K는 다음과 같이 정의되고 있다[3,8,9]

$$(\sigma_{yy}+i\sigma_{xy})_{y=0}=\frac{K}{\sqrt{2\pi x}}x^{i\epsilon},\ x\to 0^+\,; \tag{21}$$
$$K=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}.$$

식(21)과 같은 정의를 사용하여 식(20)으로부터 본 문제에 대한 복소응력강도계수를 계산하면 다음과 같이 결정된다(부록참조)

$$K=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}$$
$$=\frac{\mu_2(1+\chi_1)}{\mu_2+\mu_1\chi_2}\,\frac{P+iQ}{\sqrt{2\pi l}}e^{-\pi\epsilon}l^{-i\epsilon}. \tag{22}$$

평면하중이 작용하는 반무한 직선 계면균열문제에 대하여 그린함수의 의미를 지니는 응력강도계수는 식(22)로 주어졌다. 그러면 몇몇 특정한 경우에 대하여 알고 있는 기존의 연구결과와 비교함으로써 식(22)의 타당성을 알아보기로 하자. 먼저 Fig. 1의 "재료1"과 "재료2"가 동일한 균질재료가 된다면 이 때의 응력강도계수는

$$K=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}=\frac{P+iQ}{\sqrt{2\pi l}} \tag{23}$$

임이 알려져 있다[17]. 식(23)의 결과는 식(22)로부터 쉽게 얻을 수 있다. 즉 식(19)로부터 $\varepsilon=0$이 되는 바 결국 식(22)는 식(23)과 일치하게 된다. 다음은 Fig. 1과 같이 상이한 재료로 이루어진 계면균열에 자기평형을 이루는 경우, 즉 방향이 반대이고 크기가 같은 평면 집중하중 P 및 Q가 $x=-l$인 균열상하면에 각각 작용하는 문제를 생각하자. 이와같은 문제는 Rice와 Sih[4]에 의하여 해석되었는 바, 이들의 해석결과로부터 식(21)로 정의되는 응력강도계수는 다음과 같이 주어진다.

$$K=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi l}}(P+iQ)\,l^{-i\epsilon}\cosh(\pi\epsilon) \tag{24}$$

이러한 문제는 균열상면과 균열하면에 집중하중이 작용하는 문제를 각각 중첩한 바와같고, 실제로 식(22)의 결과를 가지고 중첩함으로써 응력강도계수를 계산하면 식(24)와 동일한 결과를 얻게 된다. 이와같은 두가지 특정한 경우에 대하여 식(22)를 사용함으로써 얻은 결과는 기존 연구자들의 결과와 일치하는 바, 식(22)는 반무한 직선 계면균열의 상하면에 임의로 분포하는 어떠한 평면 하중문제에 대해서도 그 적용이 가능한 응력강도계수에 관한 그린함수가 됨을 알 수 있다.

그러면 그린함수의 의미를 지니는 식(22)로부터 균열상하면에 임의로 분포하는 하중문제에 대한 응력강도계수가 결정될 수 있음을 보이고자 한다. 균열의 모양과 재료의 성질은 Fig. 1과 동일하고, 다만 평면집중하중 P 및 Q 대신에 균열상면에는 P_1

(x) 및 $Q_1(x)$인 분포하중이 작용하고 또한 균열하면에는 $P_2(x)$ 및 $Q_2(x)$의 분포하중이 작용한다고 하자. 이와같은 문제의 경계조건을 식(1) 및 (2)와 같은 방법으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{1yy}-i\sigma_{1xy}=-P_1(x)+iQ_1(x),\ (y=0^+,\ x<0) \quad (25a)$$
$$\sigma_{2yy}-i\sigma_{2xy}=-P_2(x)+iQ_2(x),\ (y=)^-,\ x<0) \quad (25b)$$

식(25a), (25b)로 주어진 문제는 Fig. 1에 보인 집중하중을 균열면을 따라 연속적으로 중첩한 문제와 같은 바, 이와같은 문제에 대한 응력강도계수는 식(22)의 결과를 적용함으로써 다음과 같은 적분식으로 구성된다.

$$\begin{aligned}K&=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}\\&=\frac{\mu_2(1+\kappa_1)}{\mu_2+\mu_1\kappa_2}\frac{e^{-\pi\epsilon}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\\&\quad\{P_1(x)+iQ_1(x)\}(-x)^{-\frac{1}{2}-i\epsilon}dx\\&\quad+\frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_1+\mu_2\kappa_1}\frac{e^{\pi\epsilon}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\\&\quad\{P_2(x)+iQ_2(x)\}(-x)^{-\frac{1}{2}+i\epsilon}dx\end{aligned} \quad (26)$$

식(26)에 포함된 상수 및 함수값들은 식(22), (25a), (25b)와 동일하다.

식(25a), (25b)의 분포하중 $P_i(x), Q_i(x)\ (i=1,2)$가 주어진다면 식(26) 우변의 적분을 수행함으로써 응력강도계수가 용이하게 얻어질 것이다. 그 실례로서 $P_i(x)$ 및 $Q_i(x)$가 $-b<x<0$인 영역에서 다음과 같이 주어지는 분포하중이라고 하자

$$P_1(x)=P_2(x)=P\left(\frac{-x}{b}\right)^{\gamma},\quad(-b\le x\le 0,\ \gamma>-\frac{1}{2}) \quad (27a)$$

$$Q_1(x)=Q_2(x)=Q\left(\frac{-x}{b}\right)^{\gamma},\quad(-b\le x\le 0,\ \gamma>-\frac{1}{2}) \quad (27b)$$

$$P_1(x)=P_2(x)=Q_1(x)=Q_2(x)=0,\quad(x<-b). \quad (27c)$$

이와 같은 문제의 응력강도계수는 식(27a)~(27c)를 식(26)의 우변에 적용하여 적분식을 평가하면 다음과 같이 용이하게 계산된다.

$$\begin{aligned}K&=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}\\&=\frac{2\sqrt{2}(P+iQ)}{\sqrt{\pi}(2\gamma+1-2i\epsilon)}\cosh(\pi\epsilon)\,b^{\frac{1}{2}-i\epsilon}\end{aligned} \quad (28)$$

특별히 균질재료일때 식(27a)~(27c)와 같은 하중이 작용하는 문제의 해석결과를 보면 다음으로 주어져 있다[17].

$$\begin{aligned}K&=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}\\&=\frac{2}{\pi}\sqrt{2\pi b}(P+iQ)\frac{1}{2\gamma+1}\end{aligned} \quad (29)$$

균질재료가 되면 식(19)에서 보듯이 $\epsilon=0$이 되는 바 식(28)은 식(29)와 일치하고 있다.

3. 비평면 하중문제

3.1 문제의 수식화

Fig. 2에서 보는 바와같이 균열선단에서 x축의 음의 방향으로 거리 l인 반무한 직선 계면균열의 한 점에 크기가 T인 비평면 집중전단하중이 작용하는 문제를 해석한다. 이때 하중의 형태를 제외한 모든 조건은 2.1절에서 언급한 바인 Fig. 1과 동일하다. "재료1" 및 "재료2"로 이루어진 영역을 각각 S^+및 S^-로 나타내고, 해석의 편의를 위하여 각 영역에 대한 변위와 응력성분을 하첨자 1및 2로 따로 표기한다. 즉 평면에 수직한 방향의 변위를 $W_j(j=1,2)$라 하고, 또한 응력성분을 σ_{jxz}및 $\sigma_{jyz}(j=1,2)$로 나타내고, 이 때 $j=1$ 및 $j=2$에 대응하는 양은 각각 S^+및 S^-영역에 대한 변위와 응력을 말한다.

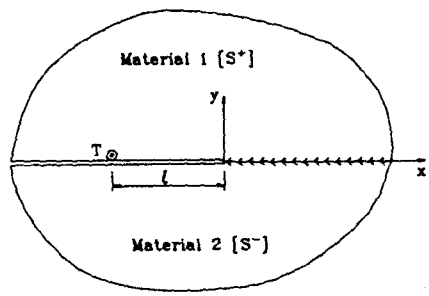

Fig. 2 Semi-infinite interfacial crack. One concentrated anti-plane load with magnitude of T is applied at $x=-l,\ y=0^+$

그러면 본 문제의 경계조건은

$$\sigma_{1yx}=-T\delta(x+l),\ (y=0^+,\ x<0) \tag{30}$$
$$\sigma_{2yx}=0,\ \ (y=0^-,\ \ x<0) \tag{31}$$

이 되고. 여기서 $\delta(x+l)$은 Dirac델타함수이다. 또한 면력과 변위에 대하여

$$W_1=W_2,\ \ (y=0,\ \ x\geq 0) \tag{32}$$
$$\sigma_{1yz}=\sigma_{2yz},\ \ (y=0,\ \ x\geq 0) \tag{33}$$

와 같은 연속조건이 있게 된다. 이때 복소수 $Z=x+iy(\bar{Z}=x-iy)$인 Z에 대하여 응력은 다음과 같은 점근거동을 보인다.

$$\sigma_{jyz},\ \sigma_{jxz}=0(Z^{-1}),\ \ |Z|\to\infty\ (j=1,2) \tag{34}$$

S^+및 S^- 영역에서 각각 해석적인 복소포텐셜함수 $\Omega_1(Z)$및 $\Omega_2(Z)$를 도입하면, 각 영역에 대한 변위및 응력은 다음과 같이 표현된다[10]

$$W_j(Z)=\frac{1}{2}\{\Omega_j(Z)+\bar{\Omega}_j(\bar{Z})\},\ (j=1,2) \tag{35}$$
$$\sigma_{jxz}+i\sigma_{jyz}=\mu_j\bar{\Omega}_j'(\bar{Z}),\ (j=1,2) \tag{36}$$
$$2i\sigma_{jyz}=\mu_j\{\bar{\Omega}_j'(\bar{Z})-\Omega_j'(Z)\},\ (j=1,2). \tag{37}$$

여기서 상수 $\mu_j(j=1,2)$는 계면에 인접한 두 재료에 대한 전단계수이다.

일단 경계조건 식(30)~(33)을 만족하는 복소포텐셜함수 $\Omega_1(Z)$및 $\Omega_2(Z)$가 결정된다면 식(35)~(37)로부터 임의의 점에 대한 응력과 변위가 모두 결정될 것이다. 먼저 식(35), (37)의 관계를 사용하여 경계조건 식(32), (33)을 만족하는 해석적인 함수 $\phi(Z)$및 $\theta(Z)$를 새로이 도입하면, $\phi(Z)$와 $\theta(Z)$는 각각

$$\phi(Z)=\begin{cases}\mu_1\Omega_1'(Z)+\mu_2\bar{\Omega}_2'(Z),\ Z\in S^+\\ \mu_2\Omega_2'(Z)+\mu_1\bar{\Omega}_1'(Z),\ Z\in S^-\end{cases} \tag{38}$$
$$\theta(Z)=\begin{cases}\Omega_1(Z)-\bar{\Omega}_2(Z),\ Z\in S^+\\ \Omega_2(Z)-\bar{\Omega}_1(Z),\ Z\in S^-\end{cases} \tag{39}$$

으로 기술된다. 여기서 $\phi(Z)$및 $\theta(Z)$는 $y=0$, $x<0$인 균열선을 제외한 모든 영역에서 해석적이다. 또한 식(38), (39)를 달리 쓰면 $\Omega_1'(Z)$및 $\Omega_2'(Z)$는 다음과 같이 표현된다.

$$(\mu_1+\mu_2)\Omega_1'(Z)=\phi(Z)+\mu_2\theta'(Z),\ Z\in S^+ \tag{40}$$
$$(\mu_1+\mu_2)\Omega_2'(Z)=\phi(Z)+\mu_1\theta'(Z),\ Z\in S^- \tag{41}$$

식(40), (41)을 식(37)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$2i\sigma_{1yz}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\{\bar{\phi}(\bar{Z})+\mu_2\bar{\theta}'(\bar{Z})-\phi(Z)-\mu_2\theta'(Z)\},\ Z\in S^+ \tag{42a}$$
$$2i\sigma_{2yz}=\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\{\bar{\phi}(\bar{Z})+\mu_1\bar{\theta}'(\bar{Z})-\phi(Z)-\mu_1\theta'(Z)\},\ Z\in S^- \tag{42b}$$

식(42a), (42b)를 나머지 경계조건 식(30), (31)에 대입하여 정리하면, 최종적으로 풀어야 할 $\phi(Z)$, $\theta'(Z)$에 관한 Hilbert 문제가 유도된다.

$$\phi^+(x)-\phi^-(x)=2iT\delta(x+l),\ \ x<0 \tag{43}$$
$$\theta'^+(x)+\theta'^-(x)=i\frac{\mu_2}{\mu_1}T\delta(x+l),\ \ x<0 \tag{44}$$

이때 $\phi(Z)$및 $\theta'(Z)$는 식(34)로 부터

$$\phi(Z),\ \theta'(Z)=0(Z^{-1}),\ |Z|\to\infty \tag{45}$$

인 점근거동을 보인다.

3.2 결과 및 논의

식(43)및 (44)와 같은 Hilbert 문제의 해는 Muskhelishvili[13,16]의 저서에 서술된 기법에 의하여 용이하게 결정된다. 식(45)의 점근거동을 고려하여 식(43)및 (44)의 해를 각각 구성하면 $\phi(Z)$및 $\theta'(Z)$는 다음과 같이 결정된다.

$$\phi(Z)=\frac{-T}{\pi(Z+l)}, \tag{46}$$
$$\theta'(Z)=\frac{-i\sqrt{l}T}{\mu_1\pi\sqrt{Z}(Z+l)} \tag{47}$$

식(46), (47)을 식(42a) 혹은 (42b)에 대입하여 $y=0$, $x\geq 0$인 계면에 대한 응력 σ_{yz}를 계산하면

$$(\sigma_{yz})_{y=0} = -\frac{\mu_2 T\sqrt{l}}{\pi(\mu_1+\mu_2)(x+l)\sqrt{x}}, \quad x\geq 0 \tag{48}$$

이 된다. 이로부터 응력강도계수 K_{II}는

$$K_{\text{II}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{2\pi x}(\sigma_{yz})_{y=0} = -\frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{T}{\sqrt{2\pi l}} \tag{49}$$

로 결정된다. 본 연구의 결과식인 식(49)를 보면 응력강도계수 K_{II}는 계면에 인접한 두 재료의 전단계수 μ_1, μ_2에 의존하고 있다. 한편 Sih[11]는 비평면 전단하중이 작용하는 계면균열문제에 대하여 응력강도계수는 균질한 재료에 대한 결과와 동일함을 주장한 바 있다. 여기서 언급해 두고자 하는 바는, Sih[11]에 의하여 해석된 문제란 방향이 반대이고 크기가 같은 하중이 균열상하면에 작용하여 이른바 자기평형을 유지하고 있는 문제라는 점이다.

그러면 몇가지 경우에 대하여 식(49)를 검토하자. 먼저 $\mu_1=\mu_2$인 균질한 재료의 경우를 보면 이때의 응력강도계수 K_{II}는 다음과 같이 주어져 있다[17].

$$K_{\text{II}} = -\frac{T}{\sqrt{2\pi l}} \tag{50}$$

실제로 $\mu_1=\mu_2$를 식(49)에 대입하면 그 결과는 식(50)과 잘 일치하고 있다. 다음은 Fig. 2와 같은 좌표계에서 방향이 반대이고 크기가 같은 집중전단하중 T가 $x=-l$인 균열상하면에 작용하는 경우를 생각하자. 이와같은 문제는 자기평형이 유지되는 경우로서, 계면에 인접한 두 재료의 성질에 무관하게 응력강도계수 K_{II}는 균질한 재료의 경우와 동일한 결과가 됨이 알려져 있으며 그 결과를 쓰면 다음과 같다[11,12,17].

$$K_{\text{II}} = -\frac{\sqrt{2}T}{\sqrt{\pi l}} \tag{51}$$

이러한 문제는 균열상면과 균열하면에 각각 집중전단하중이 작용하는 문제를 중첩한 바와 같으므로 식(49)에 의하여 식(51)과 같은 결과를 얻을 수 있다. 즉 $x=-l$, $y=0^+$인 균열상면에 집중전단하중 T가 작용하는 경우는 식(49)로 주어졌다. 또한 식(49)를 사용하여 $x=-l$, $y=0^-$인 균열하면에 집중전단하중 T가 작용할 때 K_{II}를 계산하면 K_{II}는 다음과 같이 용이하게 계산된다.

$$K_{\text{II}} = -\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{T}{\sqrt{2\pi l}} \tag{52}$$

식(49)와 (52)를 중첩하여 계산하면 식(51)과 동일한 결과를 얻게 된다. 이러한 특정한 두 경우에 대하여 식(49)로부터 얻은 결과는 기존 연구자들의 결과와 잘 일치하는 바, 식(49)는 반무한 직선계면균열의 상하면에 작용하는 임의의 비평면 하중문제에 대해서도 그 해석이 가능한 그린함수가 됨을 알 수 있다. 또한 균열면에 작용하는 비평면 하중이 자기평형을 유지하고 있다면 이때의 응력강도계수는 균질재료에 대한 해와 일치를 보이고, 반면에 자기평형이 유지되지 않는 비평면 하중이 작용하고 있다면 이때의 응력강도계수는 계면에 인접한 두 재료의 전단계수에 의존하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

반무한 직선 계면균열의 상하면에 분포하는 임의의 하중에 대해서도 그 해석이 가능한 그린함수를 구하기 위하여, 계면균열의 임의의 한 점에 평면집중하중및 비평면 집중전단하중이 각각 작용하는 문제를 해석하였고 이로부터 폐형으로 구성되는 응력강도계수를 얻었다. 기존 연구자들의 결과와 동일하게 본 연구의 해석에서도 평면하중이 작용할 경우에 균열선단 부근의 응력은 진동특성을 보이고 있으며, 또한 비평면 하중이 작용할 경우에는 $r^{-1/2}$의 특이성이 유지되었다.

특별히 균열면에 작용하는 하중이 비평면 하중일 경우에 응력강도계수는 하중의 분포모양에 따라 다른 특성을 보였다. 즉 가해진 비평면 하중이 자기평형을 유지하고 있다면 이때의 응력강도계수는 기존 연구자의 주장과 같이 계면에 인접한 두 재료의 성질에 무관함을 보였고, 반면에 자기평형을 유지하고 있지 않다면 이때의 응력강도계수는 계면에 인접한 두 재료의 성질에 의존함을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 1991년도 한국과학재단 기초연구비 (913-0910-015-1)지원에 의해 수행중인 연구의 일부 결과이며 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

(1) Williams, M.L., 1959, "The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media," Bull. Seismological Soc. America, Vol.49, pp.199~204.

(2) Piva,A. and Viola, E., 1980, "Biaxial Load Effects on a Crack between Dissmilar Media," Engng Fracture Mech., Vol.13, pp.143~174.

(3) Rice,J.R., 1988, "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks," J.Appl. Mech., Vol.55, pp.98~103.

(4) Rice,J.R. and Sih, G.C., 1965, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media," J.Appl. Mech., Vol.32, pp.418~423.

(5) England,A.H., 1965, "A Crack between Dissimilar Media," J.Appl. Mech., Vol.32, pp.400~402.

(6) 박재학, 1986, "계면균열에 대한 보존적분의 응용과 소성변형의 해석," 박사학위논문, 한국과학기술원.

(7) Erdogan,F., 1965, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks," J.Appl. Mech., Vol.32, pp.403~410.

(8) Hutchinson,J.W., Mear,M.E. and Rice, J.R., 1987, "Crack Paralleling an Interface between Dissimilar Materials," J.Appl. Mech., Vol.54, pp.828~832.

(9) He, M.Y. and Hutchinson, J.W., 1989, "Kinking of a Crack out of an Interface," J.Appl. Mech., Vol.56, pp.270~278.

(10) Erdogan, F., 1966, "Elastic-Plastic Anti-Plane Problems for Bonded Dissimilar Media Containing Cracks and Cavities," Int. J. Solids Structures, Vol.2, pp.447~465.

(11) Sih, G.C., 1981, "Interface Cracks in Bimaterial Systems," Mechanics of Fracture, G.C.Sih, ed., Vol. 6, Martinus Nijhoff, Hauge, pp.117~177.

(12) Lee, K.S., Choi, S.R. and Earmme, Y.Y., 1990, "Discontinuity of Stress Intensity Factor for Kinked Interfacial Crack under Anti-Plane Shear," Proceedings of KSME/JSME Joint Conference on Fracture and Strength '90, Seoul, July 1990, pp.502~507.

(13) Muskhelishvili, N.I., 1963, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.

(14) England, A.H., 1971, Complex Variable Methods in Elasticity, John Wiley & Sons, London.

(15) Dundurs, J., 1969, Discussion of "Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges under Normal and Shear Loading," J.Appl. Mech., Vol.36, pp.650~652.

(16) Muskhelishvili, N.I., 1953, Singular Integral Equations, Noordhoff, Groningen.

(17) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 1973, The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corp., Hellertown.

부 록

식(22)의 유도

복소응력강도계수 K를 구하기 위하여 식(21)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$K=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2\pi}x^{\frac{1}{2}-i\epsilon}(\sigma_{yy}+i\sigma_{xy})_{y=0} \tag{A1}$$

식(20)에 주어진 결과를 식(A1)에 대입하면

$$K=K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2\pi}x^{\frac{1}{2}-i\epsilon}$$
$$\left[\frac{\mu_2(1+\chi_1)}{\mu_2+\mu_1\chi_2}\,\frac{P+iQ}{2\pi(x+l)}e^{-\pi\epsilon}\left(\frac{l}{x}\right)^{\frac{1}{2}-i\epsilon}-\frac{Q-iP}{2\pi(x+l)}\right] \tag{A2}$$

이 되고, 식(A2)의 우변을 정리하면 식(22)가 얻어진다.