

〈論 文〉

# 傳達影響係數法에 의한 원판구조물의 自由振動解析

文德弘\* · 末岡淳男\*\* · 近藤孝廣\*\*\* · 呂東俊\*\*\*

(1991년 2월 2일 접수)

## Free Vibration Analysis of Disk Structure by the Transfer Influence Coefficient Method

D. H. Moon, A. Sueoka, T. Kondou and D.J. Yeo

**Key Words :** Transfer Influence Coefficient Method(傳達影響係數法), Transfer Matrix Method(전달매트릭스법), Free Vibration Analysis(自由振動解析), Dynamic Influence Coefficient(動的影響係數), Disk Structure(圓板構造物), Numerical Analysis(數值解析)

### Abstract

This paper describes the formulation for the analysis of the flexural free vibration of a double-disk system by the transfer influence coefficient method, which was developed on the base of the concept of the successive transmission of the dynamic influence coefficients. The double disks are coupled through the coupled springs between disks and they are supported with the base support springs between each disk and foundation. These springs distribute in a concentric configuration over the circumference with an arbitrary diameter. The classic circular plate theory is applied to each disk which is a complete or an annular plate with steps. The simple computational results on a personal computer demonstrate the validity of the present algorithm ; that is, the numerical high accuracy, the high speed and the flexibility for programming of the transfer influence coefficient method, compared with the transfer matrix method.

### 기 호 설 명

$\tilde{a}^i$  : 上·下 원판의 外半徑,  $\tilde{a} = \max(\tilde{a}^1, \tilde{a}^2)$

$$\tilde{D}^i = \tilde{E}^i (\tilde{h}^i)^3 / 12 \{1 - (\nu^i)^2\}$$

: 굽힘강성,  $\tilde{D} = \max(\tilde{D}^1, \tilde{D}^2)$

$\tilde{E}^i$  : 종탄성계수

$\tilde{h}_j^i$  : 두께,  $\tilde{h}^i = \max(\tilde{h}_j^i)$

$\tilde{K}_j^i, \tilde{k}_j^i$  : 基礎 및 運成 剪斷스프링정수

$\tilde{K}_i^i, K_j^i$  : 基礎 및 運成 回轉스프링정수

$\tilde{K}_i^i, \tilde{K}_j^i$  : 基礎 및 運成 비틀림스프링정수

$k_j^i = \tilde{a} \{ (\tilde{a})^2 \tilde{k}_j^i + m^2 \tilde{k}_{ij}^i / (\eta_j^i)^2 \} / \tilde{D}$  : 無次元 등가 剪斷 스프링정수(基礎)

$k_j^i = \tilde{a} \{ (\tilde{a})^2 \tilde{k}_j^i + m^2 \tilde{k}_{ij}^i / (\eta_j^i)^2 \} / \tilde{D}$  : 無次元 등가 剪斷 스프링정수(運成)

$K_j^i = \tilde{a} \tilde{K}_j^i / \tilde{D}$  : 無次元 등가 回轉스프링정수(基礎)

$K_j^i = \tilde{a} \tilde{K}_j^i / \tilde{D}$  : 無次元 등가 回轉스프링정수(運成)

$m$  : 절직경수

$n^i$  : 원판의 분할수

$\tilde{r}_j^i$  : 반경

$\tilde{t}$  : 시간,  $t = \omega \tilde{t}$

\* 정회원, 부산수산대학교 기관학과

\*\*九州대학 기계공학과

\*\*\* 福岡공업대학 전자기계공학과

\*\*\*\* 정회원, 여수수산대학 기관학과

- $\tilde{W}_j$  : 횡변위
- $\alpha^2=1, \alpha^2=(\tilde{\alpha}^2/\tilde{\alpha}^1)[(\tilde{\gamma}^2/\tilde{\gamma}^1)(\tilde{h}^2/\tilde{h}^1)(\tilde{D}^1/\tilde{D}^2)]^{1/4}$
- $\tilde{\gamma}^i$  : 밀도
- $\delta_j^i=\alpha^i\lambda/(\zeta_j)^{1/2}, \eta_j^i=\tilde{\gamma}_j^i/\tilde{\alpha}^i$
- $\theta$  : 圓周方向의 좌표
- $\lambda^4=\tilde{\gamma}^1\tilde{h}^1(\tilde{\alpha}^1)^4\omega^2/\tilde{D}^1$
- $\nu^i$  : 프와송 비
- $\zeta_j^i=\tilde{h}_j^i/\tilde{h}^i$
- $\phi_j^i$  : 角變位(= $\partial W_j^i/\partial \eta_j^i$ )
- $\omega$  : 고유각진동수
- $\lambda$  : 無次元 固有振動數
- $d_j=(W^1, \phi^1, W^2, \phi^2)_j$ : 節圓周  $j$ 의 변위벡터
- $\bar{f}_j=(\bar{V}^1, \bar{M}^1, \bar{V}^2, \bar{M}^2)_j$ : 節圓周  $j$ 의 내측의 힘벡터
- $f_j=(V^1, M^1, V^2, M^2)_j$ : 節圓周  $j$ 의 외측의 힘벡터
- 윗첨자  $i$ :  $i=1$  下원판,  $i=2$  上원판
- $t$ : 매트릭스의 轉置
- 아래첨자  $j$ : 節圓周 ( $j=0, \dots, n$ )
- (~)이 있는 것: 次元量
- (~)이 없는 것: 無次元量

1. 서 론

2층 원판 구조계는 外亂으로부터 격리시킬 필요가 있는 플랜트구조물, 대형빌딩의 基礎 및 섬세한 전자 기기들의 基礎지지로 자주 사용되는 공학상 유용한 구조물이다.

2층 원판계에 관해서는 Swamidass, Kunukkas-seril<sup>(1)</sup>이 원판 사이에 중간 탄성 링(ring)지지를 갖는 경우, 원판의 일반해와 중간의 연속조건 및 경계조건을 사용하여 진동해석을 하였고, Irie들<sup>(2)</sup>은 축대칭 링형평판을 전달매트릭스법을 이용하여 비교적 저주파 영역에서 정상응답을 계산하였다. 前者의 해석수법은 중간 탄성 링지지의 수가 많아 질수록 해석적인 처리가 매우 복잡해지게 된다. 한편 後者の 전달매트릭스법은 중간에 단단한 탄성지지가 존재하는 경우나, 고차의 固有振動數를 구하는 경우에 수치계산상의 문제점이 지적되고 있다<sup>(3)</sup>.

필자들은 퍼스널컴퓨터 이용에 적합한 高速·高精度의 구조 해석수법을 개발할 목적으로, 傳達影響係數法을 새로이 제안해서, 回轉축 및 다층구조물 등의 자유 진동해석에 관한 알고리즘을 정식화해서, 알고리즘상의 여러가지 유사점이 있는 종래

의 전달매트릭스법과 비교한 결과 計算精度 및 計算速度的 양면에서 우수한 계산수법임을 보고한 바 있다<sup>(4-9)</sup>.

본 연구에서는 動的影響係數의 축차전달에 그 개념을 두고 있는 傳達影響係數法을, 2층 원판구조물의 自由振動解析에 적용해서, 그 알고리즘을 정식화 하고 전달매트릭스법과 비교 검토하였다.

2. 支配方程式

각 원판에 고전 원판이론을 적용하고, 傳達影響係數法에 의한 2층 원판구조물이 굽힘 自由振動解析에 있어서 다음과 같은 假定을 둔다.

(1) 각 원판은 두께가 변하는 圓周와 탄성지지가 있는 圓周로서 균일 두께의 링요소로 분할되어 있다.  $i$ 층 원판( $i=1, 2$ ),  $j$ 번째 링요소의 內半徑, 外半徑을 각각  $\tilde{r}_{j-1}^i, \tilde{r}_j^i$ 로 한다. 각 원판의 분할수는 임의이고, 각 분할된 링을 내부에서 外周쪽으로 1에서  $n$ 번째 링 요소라 부른다. 또  $j$ 번째와  $j+1$ 번째의 링요소의 圓周경계를 節圓周  $j$ 라 부른다.

(2) 각 원판은 임의의 節圓周상에서 兩 원판에 수직하게 부착된 링스프링으로 運成지되어 있고, 각 원판과 基礎 사이에는 같은 형태로 基礎지지 링스프링으로 지지되어 있다. 여기서 링스프링이라 하는 것은 圓周방향에 균일하게 분포된 스프링을 의미한다.

(3) 運成스프링과 基礎 지지스프링은 각 剪斷(竝進), 回轉 및 비틀림의 3가지 스프링을 고려한다.

(4) 節圓周  $j$ 에서의 橫變位와 角變位는 連續이다.

傳達影響係數法의 기본개념을 명확히 하기위해, 가정(1)의 조건을 더욱 강화하여, 上·下원판 모두 오나전히 동일하게  $n$ 분할 되어 있는 것으로 한다. 즉,  $\tilde{r}_j^i=\tilde{r}_j^2$  ( $j=0, \dots, n$ )이다.

Fig. 1과 같은 각 원판을 힘벡터가 불연속이 되는 圓周는 반드시 節圓周가 되도록 링요소로 분할하고 임의의  $i$ 층,  $j$ 번째 링요소의 支配方程式을 無次元형식으로 표시하면 다음과 같다<sup>(10)</sup>.

$$\nabla^4 W_j^i + \frac{(\alpha^i \lambda)^4 \partial^2 W_j^i}{(\zeta_j^i)^2 \partial t^2} = 0 \tag{1}$$

여기서,  $\nabla^2 [= \partial^2/\partial \eta^2 + (1/\eta)\partial/\partial \eta + (1/\eta^2)\partial^2/\partial \theta^2]$ 는 라플라시안이다.

링요소의 경우 식(1)의 일반해는 다음식으로 주

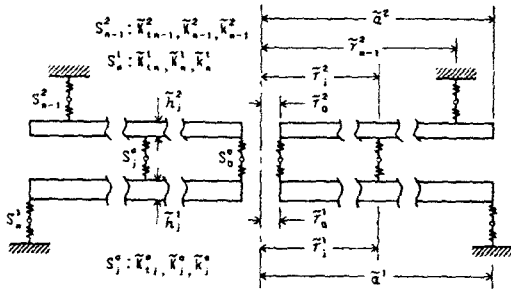


Fig. 1 Double-disk system on intermediate ring supports

여기서, 단, 식(1)의  $\tilde{W}_j$ 로부터 시간함수  $\exp(j\omega t)$ 를 분리한 것을 새로운 무次元 변위량  $W_j^i (= W_j^i/\delta^i)$ 로 놓았다.

$$W_j^i = \{A_1 J_m^*(\delta\eta) + A_2 Y_m^*(\delta\eta) + A_3 J_m^*(\delta\eta) + A_4 K_m^*(\delta\eta)\}_j \cos m\theta \quad (2)$$

여기서,  $A_1 \sim A_4$ 는 積分상수,  $J_m^*$ ,  $Y_m^*$ 은 각각  $m$ 차의 제1종, 제2종의 Bessel함수,  $I_m^*$ ,  $K_m^*$ 은 각각  $m$ 차의 제1종, 제2종 변형 Bessel함수를 나타낸다.

軸방향의 角變位  $\phi_j^i$ , 無次元 굽힘 모멘트  $M_j^i$  및 等價剪斷力  $V_j^i$ 는 각각 다음식과 같다.

$$\phi_j^i = \{(\zeta J_m^* - \delta J_{m+1}^*) A_1 + (\zeta Y_m^* - \delta Y_{m+1}^*) A_2 + (\zeta I_m^* + \delta I_{m+1}^*) A_3 + (\zeta K_m^* - \delta K_{m+1}^*) A_4\}_j \cos m\theta \quad (3)$$

$$M_j^i = (\zeta)^3 \{[(\rho + \delta^2) J_m^* - \tau J_{m+1}^*] A_1 + [(\rho + \delta^2) Y_m^* - \tau Y_{m+1}^*] A_2 + [(\rho - \delta^2) I_m^* + \tau I_{m+1}^*] A_3 + [(\rho - \delta^2) K_m^* - \tau K_{m+1}^*] A_4\}_j \cos m\theta \quad (4)$$

$$V_j^i = (\zeta)^3 \{[(\sigma + \epsilon) J_m^* - (\beta + \delta^3) J_{m+1}^*] A_1 + [(\sigma + \epsilon) Y_m^* - (\beta + \delta^3) Y_{m+1}^*] A_2 + [(\sigma - \epsilon) I_m^* + (\beta - \delta^3) I_{m+1}^*] A_3 + [(\sigma - \epsilon) K_m^* - (\beta - \delta^3) K_{m+1}^*] A_4\}_j \cos m\theta \quad (5)$$

여기서도 식(2)의  $W_j^i$ 와 마찬가지로 시간함수를 생략하고 있다. 또한, Bessel함수의 인수  $\delta\eta$ 도 생략되어 있다. 그리고,

$$\begin{aligned} \beta_j^i &= (1 - \nu^i) (\zeta^2 \delta)_j, & \epsilon_j^i &= (\zeta \delta^2)_j, & \zeta_j^i &= m/\eta_j^i, \\ \sigma_j^i &= -(\zeta \rho)_j, & \rho_j^i &= -m(m-1)(1-\nu^i)/(\eta_j^i)^2, \\ \tau_j^i &= \delta_j^i (1-\nu^i)/\eta_j^i \end{aligned}$$

한편, 中實 원판요소의 일반해는 다음과 같다.

$$W_j^i = \{A_1 J_m^*(\delta\eta) + A_3 I_m^*(\delta\eta)\}_j \cos m\theta \quad (6)$$

식(2)~(6)에서  $j$ 번째 링요소 및 中實 원판요소

의 狀態벡터  $Z_j^i = (W, \phi, V, M)$ 는 다음식으로 표시된다.

$$Z_j^i(\eta) = B_j^i(\eta) A_j^i \cos m\theta \quad (7)$$

여기서, 링요소의 경우는  $A_j^i = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ , 中實 원판의 경우는  $A_j^i = (A_1, A_3)$ 의 積分정수벡터를 나타내고,  $B_j^i(\eta)$ 는 계수매트릭스이다.

傳達影響係數法에 의한 정식화는 링요소와 中實 원판요소가 거의 같기 때문에 前者의 경우에 대해서만 취급하기로 한다.

식(7)에  $\eta = \eta_{j-1}$  및  $\eta_j$ 를 대입하면  $j$ 번째 링요소의 狀態벡터  $Z^i(\eta_{j-1})$ 와  $Z^i(\eta_j)$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Z^i(\eta_{j-1}) &= F_j^i Z^i(\eta_j) \\ F_j^i &= B^i(\eta_{j-1}) \{B^i(\eta_j)\}^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $F_j^i$ 는 節圓周  $j$ 의 內側과 節圓周  $j-1$ 外側 사이의 전달매트릭스 즉, 필드 전달매트릭스이다.

식(8)을  $i=1, 2$ 에 대하여 재정리하면,

$$\begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}_{j-1} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}_j \quad (9)$$

로 되고,  $P, Q, R, S$ 는  $4 \times 4$ 의 부분 매트릭스이다.

### 3. 動的影響係數 매트릭스의 傳達

임의의 節範圍  $j$ 의 內·外側에서 變位벡터  $d_j$ 와 힘벡터  $f_j$ 사이의 관계를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} d_j &= \bar{T}_j f_j, & \bar{T}_j &= {}^t \bar{T}_j \\ d_j &= T_j f_j, & T_j &= {}^t T_j \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $\bar{T}_j, T_j$ 는  $4 \times 4$ 의 動的影響係數 매트릭스이고 대칭매트릭스이다.

#### 3.1 動的影響係數의 필드와 포인트 傳達側

식(9)와 (10)에서  $j$ 번째 링요소에 있어서 動的影響係數의 필드 傳達側은,

$$U_j \bar{T}_j = H_j \quad (j=2, \dots, n) \quad (11)$$

로 되고, 여기서,

$$U_j = P_j - T_{j-1} R_j, \quad H_j = T_{j-1} S_j - Q_j \quad (12)$$

節圓周  $j$ 의 內·外側에 있어서, 힘의 평형조건으로 부터

$$\bar{f}_j = f_j - K_j d_j \tag{13}$$

로 되고, 여기서,

$$K_j = \begin{bmatrix} k^c + k^1 & 0 & -k^c & 0 \\ 0 & K^c + K^1 & 0 & -K^c \\ -k^c & 0 & k^c + k^2 & 0 \\ 0 & -K^c & 0 & K^c + K^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

이다.

식(10)과 (13)에서 動的影響係數의 포인트傳達側은,

$$\bar{U}_j T_j = \bar{T}_j \tag{15}$$

로 되고, 여기서,

$$\bar{U}_j = I + \bar{T}_j K_j \tag{16}$$

이고,  $I$ 는 단위매트릭스이다.

계산시간의 절약을 위해 상기의 필드와 포인트傳達則을 결합시키면, 식(11)~(15)로부터 필드-포인트傳達則은 다음과 같다.

$$W_j T_j = H_j \quad (j=2, \dots, n) \tag{17}$$

여기서,

$$W_j = U_j + H_j K_j \tag{18}$$

이다.

### 3.2 系の 內周에서의 경계조건의 취급

본 해석수법에 있어서는, 계산시점의 경계조건(스프링지지로 간주)을 처음부터 고려해서 계산을 시작하게 되고, 각각의 경계조건에 대해 스프링정수의 값만을 적절히 조절하므로써, 모든 경계조건에 대응시킬 수 있다.

2층 원판계의 內周에서의 動的影響係數 매트릭스는 다음과 같이 표시된다.

$$T_0 = K_0^{-1} \tag{19}$$

여기서,  $K_0$ 는 節圓周 0에서의 포인트매트릭스이다.  $K_0$ 가 특이매트릭스인 경우  $K_0$ 의 逆매트릭스가 구해지지 않으므로, 節圓周 0와 節圓周 1사이의 動的影響係數의 전달과정은  $K_0$ 를 그대로 이용한 다음식이 사용된다.

$$U_1 \bar{T}_1 = H_1 \tag{20}$$

여기서,

$$U_1 = K_0 P_1 - R_1, \quad H_1 = S_1 - K_0 Q_1 \tag{21}$$

이다.

### 3.3 경탄성 지지인 경우의 취급

動的影響係數 매트릭스  $\bar{T}_j$ 와  $T_j$ 는 식(20)과 (15)에  $j=1$ 을 대입한 식 및 식(17)에 의하여 계산되고, 內周에서와 같이 중간 지지조건도 스프링정수값의 조절만으로 모든 지지조건에 대응시킬 수 있다.

식(20)의 계산에 있어서 基礎스프링정수에 비해서 連成 剪斷스프링정수  $k\delta$  및 連成 回轉스프링정수  $K\delta$ 가 극단적으로 큰 경우,  $U_1$  및  $H_1$ 의 제1행의 요소들의 符號를 반대로 한값과 제3행에 있어서 대응하는 요소들의 값이 같아지게 되고, 제2행과 제4행에 대해서도 마찬가지로 현상이 일어나므로 수치계산상 문제가 생길 수 있다. 이러한 문제점은  $U_1$  및  $H_1$ 의 제1행과 제3행에 각 행의 요소의 합과 차로 대치함으로써 解消할 수 있고, 제2행과 제4행도 마찬가지로 방법으로 처리할 수 있다.

또한, 식(15)와 (17)의 계산에 있어서도 基礎스프링 정수에 비해서 連成 剪斷스프링정수  $k\delta$  및 連成 回轉스프링 정수  $K\delta$ 가 극단적으로 큰 경우, 계수매트릭스  $U_j$ 와  $W_j$ 의 제1열과 제3열 및 제2열과 제4열이 상기와 같은 현상으로,  $U_j$ 와  $W_j$ 는 특이매트릭스가 되어 수치 계산이 곤란해질 수 있으나, 여기서도 上述과 같이 제1열과 제3열 및 제2열과 제4열 대신에 각 열요소의 합과 차로 置換하는 방법을 사용하면 문제없이 수치계산을 행할 수 있다.

식(15), (17) 및 (20)의 수치계산은 보편적 방법인 가우스消去法을 사용하고 있으며, 이 방법은  $\bar{T}_j$ 와  $T_j$ 의 대칭성을 이용할 수 있어 계산이 능률적으로 수행된다.

## 4. 振動數方程式 및 거짓根의 解析法

경계조건별 振動數方程式은 두 종류로 대별 할 수 있다. 우선,  $K_n = 0$ 인 경우( $\bar{f}_n = f_n = 0$ )에는 식(10)과 (11)로부터,

$$U_n d_n = 0 \tag{22}$$

로 되고,  $d_n \neq 0$ 이므로 振動數方程式은 다음과 같다.

$$U_n = \det(U_n) = 0 \tag{23}$$

다음으로,  $K_n \neq 0$ 인 경우에 대해서는 식(10)과 (13)으로부터,

$$(I + K_n \bar{T}_n) \bar{f}_n = 0 \quad (24)$$

로 되고,  $\bar{T}_n$ 의 對稱性和 식(11)을 이용하면,

$$\bar{T}_n = U_n^{-1} H_n = {}^t H_n U_n^{-1} \quad (25)$$

식(25)를 식(24)에 대입하면,

$${}^t W_n U_n^{-1} \bar{f}_n = 0 \quad (26)$$

여기서,  $\bar{f}_n \neq 0$ 이므로, 振動數方程式은,

$$\det({}^t W_n U_n^{-1}) = \det(W_n) / \det(U_n) = 0 \quad (27)$$

$$W_n \equiv \det(W_n) = 0$$

결과적으로 식(27)은  $K_n = 0$ 인 경우의 식(23)을 포함하고 있다는 것을 알 수 있다.

振動數方程式 식(27)에 二分法을 이용해서 固有振動數를 구할 경우, 既報<sup>(4-9)</sup>에서와 같이 參根뿐만 아니라 거짓根(反對稱極)도 구해버리게 된다. 이러한 거짓根의 발생 원인과 解消法은 이미 보고한 既報와 대동소이하므로 여기서는 간략하게 서술한다.

식(27)의 계산에서,  $W_n (w_j = \det(W_j), j=2, \dots, n)$ 은  $w_{n-1}$ 의 零點에서 反對稱極을 갖게 되고,  $W_{n-1}$ 은  $W_{n-2}$ 의 零點에서 反對稱極을 갖게 된다. 이러한 관계는  $W_2$ 까지 계속되고  $W_2$ 는  $\bar{U}_1$ 의 零點에서 反對稱極을 갖고 최종적으로  $U_1$ 의 영점은  $\bar{U}_1$ 의 反對稱極에 대응하므로, 振動數方程式에 어떤 특별한 처리를 해서 이들 反對稱極을 제거하지 않으면 안된다. 그 방법으로  $W_n$ 에  $W_{n-1}, \dots, W_2, \bar{U}_1$  및  $U_1$ 의 符號함수를 곱하여 얻어진 함수를  $G_n$ 이라 하면,  $G_n$ 에 있어서  $W_n$ 의 모든 反對稱極은 對稱極으로 변환되고, 함수의 符號는 단지  $W_n$ 의 零點에서만 변화 하게 된다. 二分法에서는 함수의 符號만을 필요로 하므로  $W_n$ 대신에 다음식을 이용하면 된다.

$$\text{sgn}(G_n) = \text{sgn}(U_1) \cdot \text{sgn}(\bar{U}_1) \prod_{j=2}^n \text{sgn}(W_j) \quad (28)$$

결론적으로 식(23), (27)의 振動數方程式 대신에 식(28)을 사용함으로써, 모든 경계조건 및 중간조건을 스프링의 값만을 변화시켜 제어할 수 있고, 동시에 거짓根도 除去할 수 있게 된다.

### 5. 固有모드

固有모드의 계산은 固有振動數를 구한 후 系의

外周에서 內周側으로 실행된다.

外周(節圓周  $n$ )에서의 狀態變數는  $K_n = 0$ 인 경우, 固有振動數가 구해진 시점에서는 식(22)가 성립하기때문에, 식(22)로부터  $d_n (\neq 0)$ 가 구해진다. 또한,  $K_n \neq 0$ 인 경우는, 식(26)으로부터  $\bar{f}_n (\neq 0)$ 을 구할 수 있고,  $d_n = {}^t H_n U_n^{-1} \bar{f}_n$ 에 의해  $d_n$ 를 구한다.

節圓周  $n-1$ 에서 1까지의 狀態變數들은 식(9), (10) 및 (13)에 의해 순차적으로 계산하면 된다.

### 6. 數值계산 結果 및 考察

본 연구에서는 모델1과 모델2에 관해서 수치계산을 행하였다. 두 모델 모두 2개의 원판은 內徑 100mm, 外徑 300mm의 同一치수로 하였고, 원판의 두께는 上·下 각각 1.5mm와 2.5mm의 鐵製의 均一 원판으로 간주하였다. 판재의 簧탄성계수는  $2.06 \times 10^{11} N/m^2$ , 밀도는  $7860 N/m^3$ , 프와송 비는 0.3으로 하였으며, 모든 節圓周에 있어서 回轉스프링과 비틀림스프링 정수의 값은 0으로 하고, 拉進의 剪斷스프링 정수 값만이 존재하는 것으로 하였다.

모델 1은 內周, 직경 200mm, 250mm의 節圓周 및 外周에서 上·下 원판이 連成 링스프링만으로 連成되지 되어 있고, 모델 2는 下원판의 外周와 上원판의 直徑250mm의 節圓周가 基礎 링스프링으로 基礎지지되고, 內周와 직경 200mm의 節圓周가 連成 링스프링으로 連成지지되어 있는 것으로 하였다 ( $n=3$ ). 또한, 兩 원판에 대한 基礎 및 連成 剪斷스프링정수의 값은 同一한 無次元量으로 간주하여 계산하였다.

사용된 계산기는 16비트 퍼스널컴퓨터(수치연산 Co-processor 사용)이고, 사용언어는 Fortran77이며, 倍精度 변수를 사용하여 계산하였다. 固有振動數는 상대오차  $\epsilon = 10^{-9}$ 이하에서 수렴하는 것으로 하였고, 거짓根의 解消가 가능한 식(28)에 二分法을 적용해서 固有振動數를 구하였다.

#### 6.1 計算程度

Table 1과 Table 2는  $0.01 \leq \lambda \leq 35$ 의 진동수 범위내에서 구한 傳達影響係數法 (TICM)과 전달매트릭스법(TMM)에 의한 無次元 固有振動數( $\lambda^2$ )의 계산결과를 나타낸 것이다. 또한, Table 1은 無次元 剪斷스프링정수  $k=10$  및  $k=6 \times 10^4$ 에 대하여

軸對稱모드( $m=0$ )의 계산결과이고, Table 2는 無次元 剪斷스프링정수  $K=10^2$  및  $K=10^5$ 에 대하여 節直徑數( $m=2$ )일 때의 계산결과를 나타내고 있다. Table속의 숫자는 유효자리수 내에서 正解 또는 거의 正解로 간주될 수 있는 값이고, 「-」 표시는 正解가 구해지지 않는 경우를 나타낸다. 여기서, 正解라 함은 解를 구할 경우, 초기값 및 초기 시행 증분값이 달라도, 유효자리수 내에서 同一한 값을 나타낼 경우를 말한다.

TMM에서는 無次元 剪斷스프링정수  $k$ 가 비교적 작은 경우라도 高次の 진동수가 되면 正解가 구해지지 않게 되고, 無次元 剪斷스프링정수  $k$ 의 값이 커짐에 따라 固有振動數가 낮은 영역에서도 正解가 구해지지 않게 된다. 즉, 剪斷스프링정수가  $k \geq 10^5$  (모델1) 및  $k \geq 10^6$  (모델2)로 되면, 無次元 剪斷스프링정수 값의 증가에 따라 固有振動數의 변화가 포화하고 있지 않음에도 불구하고, 거의 正解를 구할 수 없게 된다. 이러한 전달매트릭스에 있어서의 計算精度는 구조물의 형상이 다른 既報<sup>(4-9)</sup>의 결과와 동일한 경향을 보이고 있다.

한편, TICM에서는 거짓根의 除去와 스프링정수 값의 조절에 의한 경계조건에 제어가 가능하도록

Table 2 Natural frequencies  $\lambda^2$ 's of Model 2

No.	$k=10^2$		$k=10^5$	
	TICM	TMM	TICM	TMM
1	18.432823	18.432823	22.430300	22.430300
2	20.828963	20.828963	48.505314	48.505314
3	31.034628	31.034628	66.379810	66.379811
4	43.004566	43.004566	92.281262	92.281262
5	57.611858	57.611858	172.00727	127.00727
6	86.617355	86.617355	222.63069	222.63069
7	107.11359	107.11359	260.87907	260.87907
8	168.29875	168.29875	329.77088	329.77088
9	182.68153	182.68153	395.64043	395.64043
10	284.50597	284.50597	424.53604	424.53604
11	297.97064	297.97064	583.58841	—
12	417.21759	417.21759	593.92647	593.92645
13	472.43951	472.43951	823.63072	—
14	575.96478	575.96479	903.03753	—
15	693.16157	693.16157	1038.0782	—
16	762.12902	762.12900	1108.4319	—
17	958.39533	958.39533	1144.2643	—
18	974.35188	—	—	—
19	1214.0740	—	—	—

Table 1 Natural frequencies  $\lambda^2$ 's of model 1

No.	$k=10$		$k=6 \times 10^4$	
	TICM	TMM	TICM	TMM
1	7.1510695	7.1510695	7.3189788	—
2	11.729366	11.729366	47.456581	47.456582
3	17.587096	17.587096	79.690142	79.690141
4	35.891968	35.891968	126.20152	126.20152
5	55.986983	55.986983	230.07992	230.07992
6	87.095434	87.095434	242.46974	—
7	143.39362	143.39362	279.45865	279.45865
8	166.46337	143.39362	384.03171	384.03171
9	272.51171	272.51171	428.62128	428.62129
10	276.31562	276.31562	562.93161	—
11	405.65166	405.65166	600.93863	—
12	453.69161	453.69161	808.06298	—
13	565.40623	565.40623	922.23673	—
14	675.66851	675.66851	973.07572	—
15	751.89704	751.89702	1073.4354	1073.4354
16	942.06073	942.06073	1100.2760	—
17	964.97617	—	—	—
18	1204.7931	—	—	—

單一化한 식(28)에 二分法을 적용하여 固有振動數를 구함으로써, 간편하게 거짓根을 除去할 수 있음을 알 수 있었고, 스프링정수 값의 변화에도 불구하고 正解가 구해지고 있어, TMM보다 훨씬 計算精度가 높음을 알 수 있다. 또한, 지면 관계상 구체적인 계산결과는 제시하지 못하지만, 內周 및 外周의 경계조건이 自由, 핀지지 및 고정단의 경우, 그리고 중간 지지조건이 반고정의 경우에 대해서도 基礎 및 連成 剪斷스프링정수의 값을 畧에서 수치적 무한대까지 대입하는 것만으로 문제없이 固有振

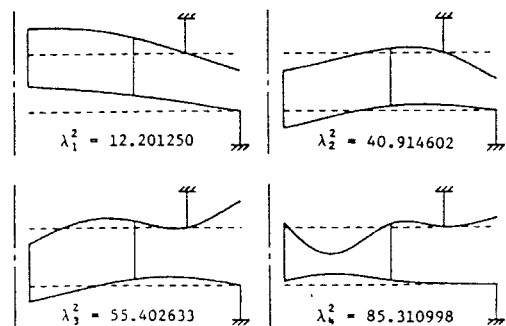


Fig. 2 Characteristic modes for Model 2

Table 3 Comparison of CPU time [s]

	TICM	TMM	No of roots
Mdoel 1	110	164	14
Model 2	113	155	15

動數가 구해짐을 확인하였다.

### 6.2 固有모드

Fig. 2는 모델2, 節直徑數  $m=1$ , 無次元 剪斷스프링 정수  $k=10^5$ 일 때, 1차에서 4차까지의 中心으로부터 半徑방향으로 절반의 固有모드를 나타낸 것이다. 단, 固有振動數를 구할 경우와는 달리 분할수  $n$ 을 30으로 증가시켜 固有모드를 구하였고, 변위의 최대값을 1로 하여 도시하였다. 그림에서 縱방향의 실선은 스프링지지의 위치를 나타낸다.

### 6.3 計算時間의 비교

TICM과 TMM의 計算速度를 간단한 예로서 비교하였다. 모델1, 2의 軸對稱모드( $m=0$ )에 대하여 剪斷스프링정수  $k=10^2$ , 진동수범위  $0.01 \leq \lambda \leq 27$ 의 경우, 초기시행 증분값을  $\lambda=0.1$ 로하고, 그 범위 내에 있는 모든 진동수와 대응하는 固有모드를 계산하는데 요하는 계산시간(sec)을 Table 3에 나타내었다. 이 결과로 부터 TICM은 TMM보다 약 1.4배 정도 計算速度가 빠른 것을 확인 할 수 있다.

## 7. 結 論

傳達影響係數法の 개념을 2층 원판계에 적용하여 굽힘 自由振動의 알고리즘을 정식화 하였다. 간단한 계산 모델에 의해 수치실험을 행하고, 본 수법의 유효성을 검증하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 傳達매트릭스법으로서는 해석이 곤란한 층간에 대단히 간단한 탄성지지가 다수 존재하는 2층 원판계의 굽힘 自由振動解析에 관해서도 傳達影響係數法은 유연성을 가지고 적용할 수 있다.

(2) 傳達影響係數法은 각 節圓周상의 등가 剪斷스프링정수 및 回轉스프링정수만을 제어함에 의해 모든 경계조건 및 반고정점을 포함하는 중간지지 조건을 간단히 처리할 수 있다.

(3) 傳達影響係數法은 전달매트릭스법보다 計算精度 및 計算速度의 양면에서 우수하다.

(4) 振動數方程式의 求解法으로 二分法을 이용할 경우 발생하는 거짓根을 간편하게 解消할 수 있다.

### 참고문헌

- (1) Swamidas, A.S.J. and Kunukkasseril, V.X., 1978, "Vibration of Circular Double-Plate Systems," J. Acoust. Soc. Am., Vol.63, No.6, pp.1832~1840.
- (2) Irie, T. et al., 1982, "The Axisymmetrical Steady-State Response of Internally Damped Annular Double-Plat System." ASME J. Appl. Mech., Vol.49, pp.417~424.
- (3) Pestel, E.C. and Leckie, F.A., 1963, "Matrix Method in Elastomechaics," McGraw-Hill.
- (4) Sueoka, A., Kondou, T., Moon, D.H. and Yamashita, K., 1988, "A Method of Vibrational analysis Using a Personal Computer(A Suggested Transfer Influence Coefficient Method)," Kyushu Uni., Vol.48, No.1, pp.31~46.
- (5) Kondou, T., Sueoka, A., Moon, D.H., Tamura, H. and Kawamura, T., 1989, "Free Vibration Analysis of a Distributed Flexural vibrational System by the Transfer Influence Coefficient Method," Theoretical and Applied Mechanics, Vol.37, pp.289~304.
- (6) Sueoka, A., Kondou, T., Moon, D.H., Yamashita, K. and Tamura, H., 1988, "Free Vibration Analysis of a Multiple Layered Structure by the Transfer Influence Coefficient Method(1st Report, Formulation for the Discrete System)," Trans. JSME(in Japanese), Vol.54, No.504, pp.1724~1731.)
- (7) Sueoka, A., Kondou, T., Moon, D.H., Yamashita, K. and Tamura, H., 1988, "Free Vibration Analysis of a Multiple Layered Structure by the Transfer Influence Coefficient Method(2nd Report, Computational Results of a Structure with Two Layers Regarded as a Discrete System)," Trans. JSME(in Japanese), Vol.54, No.504, pp.1732~1739.
- (8) Kondou, T., Sueoka, A., Yamashita, K., Moon,

- D.H. and Kawamura, T., 1989, "Free Vibration Analysis of a Multiple Layered Structure by the Transfer Influence coefficient Method(3rd Report, formulation for the Distributed Mass System)," Trans. JSME(in Japanese), Vol.55, No.516, pp.1948~1956.
- (9) Kondou, T., Sueoka, A., Yamashita, K. and Moon, D.H., 1989, "Free Vibration Analysis of a Multiple Layered Structure by the Transfer Influence Coefficient Method(4th Report, Computational Results of a Structure with Two Layers Regarded as Distributed Mass System)," Trans. JSME(in Japanese), Vol.55, No.516, pp. 1957~1964.
- (10) Szilard, R., 1974, "Theory and Analysis of Plates," Prentice-Hall.