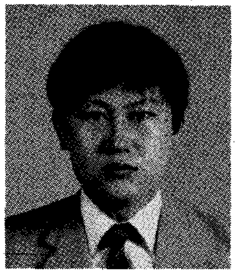
연재 I

# 광학개론(9)

## 〈유한 광선 추적법〉



삼양광학공업주식회사
정 해 빈/박사

### 14. 유한 광선 추적법

종전에는 계산상의 문제로 사용되는 식이 간단하고 계산시간이 적게 걸리는 가우스 광선 추적법이 광선 추적의 수단으로서 많이 사용되었으나 컴퓨터의 발달로 점차 계산시간이 문제가 되질 않게 됨에 따라 근사가 없이 광선의 경로를 추적할 수 있는 유한 광선 추적법이 각광을 받게 되었다.

유한 광선 추적법에도 몇 가지 방법이 있는데, 여기에서는 MILITARY HANDBOOK MIL-HDBK-141에 있는 방법에 대해서 설명하도록 하겠다.

### 14.1 구면으로 이루워진 광학계에서의 유한 광선 추적법

유한 광선 추적이란 일체의 근사가 없이 광선의 경로를 추적하는 방법이므로 가우스 광선 추적에 비하여 복잡한 양상을 띄게 된다.

이 방법에 의한 근본적인 접근방식은 다음과 같다. (j-1)번째 면에서 j번째 면으로 이동하는 광선의 경로를 구하고자 할 때, 우선, j번째 구면의 정점에서 이 구면에 접하는 접평면을 세우고, (j-1)번째 면에서 j번째 면의 정점에 있던 좌표계의 원점을 j번째 면의 정점으로 옮겨주는 것이다. 그 다음 j번째 접평면에서 j번째 면(구면)까지 광선을 이동시켜 준다. 이 과정을 통하여 광선은 굴절 또는 반사가 일어나는 두 매질의 경계면 상에 위치하게 된다. 끝으로 j번째 면에서 굴절 또는 반사가 일어난 후의 광선이 갖는 방향을 계산해주게 된다. 이와 같은 과정들을 반복해 나가므로써 전체 광학계에 걸친 광선의 경로를 알 수 있게 되는 것이다.

이제 이러한 각 단계에서 필요로 하는 식들에 대하여 살펴보도록 하자.

#### 14.1.1. (j-1)번째 면과 j번째 접평면간의 변환식

이 계산에 있어서 위치좌표의 원점은 접평면의 접점, 즉, j번째 면의 정점(頂點)이 된다. x방향의 새로운 좌표값 $x_T$는 앞 면에서의 x방향 좌표값 $x_{-1}$에 선분 $D_{-1}$의 x방향에 대한 사영(射影) $\Delta x$를 더해준 값이다. 이러한 관계는 y방향의 새로운 좌표값 $y_T$에 대해서도 성립한다. 이것을 수식으로 나타내보면,

$$X_T = x_{-1} + \Delta x = x_{-1} + D_{-1}(L_{-1}/n_{-1}) \qquad (14-1)$$

$$y_T = y_{-1} + \Delta y = y_{-1} + D_{-1}(M_{-1}/n_{-1}) \qquad (14-2)$$

이 된다. 이때 선분 $D_{-1}$은 앞 면에서의 교점과 접평면에서의 교점사이를 잇는 광선의 길이이며, $L_{-1}$과 $M_{-1}$은 각각 (j−1)번째 면과 j번째 면 사이에서 광선이 갖는 광학적 방향여현(optical directional consine)값이다. 이제 $D_{-1}$의 값을 구하기 위하여 우선 Z방향의 변화량 $\Delta Z$를 구해보면,

$$\Delta Z = d_{-1} - Z_{-1} \qquad (14-3)$$

이 되는데, 이 값은 동시에 선분 $D_{-1}$의 Z방향에 대한 사명에 해당하므로,

$$\Delta Z = D_{-1} \cdot \left(\frac{N_{-1}}{n_{-1}}\right) \qquad (14-4)$$

이 된다. (14−3)식과 (14−4)식을 같게 놓고 $(D_{-1}/n_{-1})$값을 구해보면,

$$\left(\frac{D_{-1}}{n_{-1}}\right) = \frac{(d_{-1} - Z_{-1})}{N_{-1}} \qquad (14-5)$$

이 된다. 이때 $d_{-1}$, $Z_{-1}$, $N_{-1}$등의 값은 이미 알고 있는 값이므로(광학계의 설계값이거나 앞의 면에서 이미 계산이 되어 있는 값이므로) $(D_{-1}/n_{-1})$의 값은 계산이 가능하다. 따라서 $X_T$와 $Y_T$는 이 $(D_{-1}/n_{-1})$을 써서 나타내주면,

$$x_T = x_{-1} + \left(\frac{D_{-1}}{n_{-1}}\right) L_{-1}, \qquad (14-6)$$

$$y_T = y_{-1} + \left(\frac{D_{-1}}{n_{-1}}\right) M_{-1} \qquad (14-7)$$

이 된다. 이로써 (j−1)번째 면에서 j번째 접평면으로의 변환이 끝나게 된다.

### 14.1.2. j번째 접평면과 j번째 면간의 변환식

그림(14−1)에서 접평면은 굴절이나 반사를 일으키는 면이 아니므로 광선의 방향이 바뀌지 않

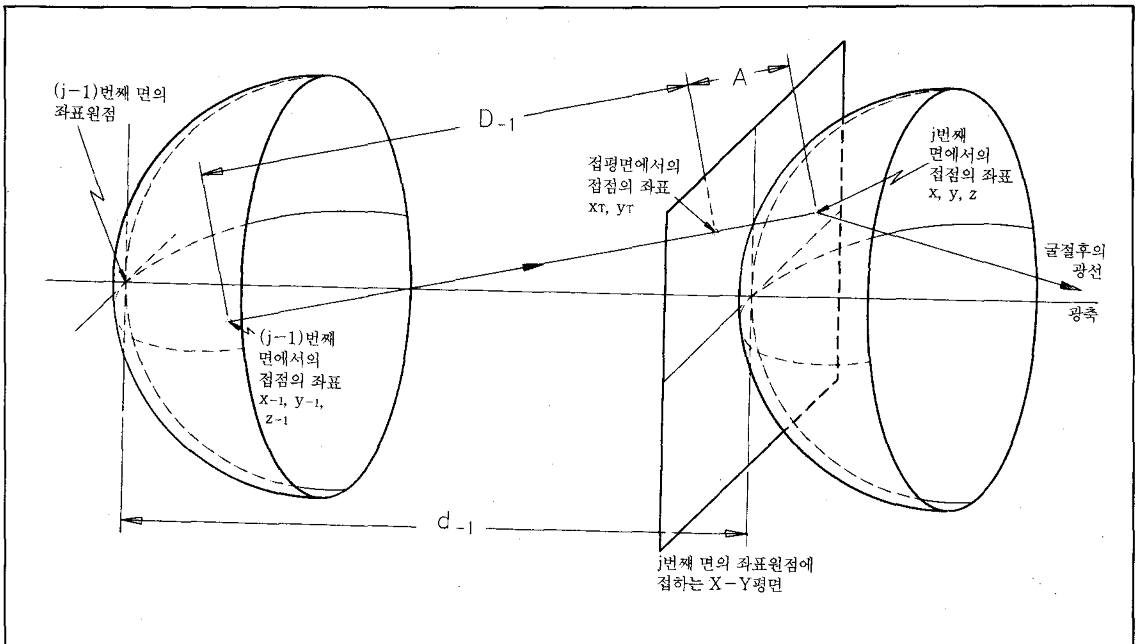



그림 14−1 (j−1)번째 면과 j번째 면에서의 유한 광선 추적

은 상태에서 거리 A만큼 더 진행하게 된다. 즉, 선분 A는 선분 $D_{-1}$과 동일한 광학적 방향여현값을 갖게 된다. 따라서 구면에서의 좌표값 x, y, z는 접평면에서의 좌표값 $x_T$, $y_T$, $z_T$로부터 (14−6), (14−7)식과 유사한 형태로 주어지게 된다. 이때, $Z_T$의 값은 0이다. x, y, z의 값은 각각

$$x = x_T + (\frac{A}{n_{-1}}) L_{-1} \qquad (14-8)$$

$$y = y_T + (\frac{A}{n_{-1}}) M_{-1} \qquad (14-9)$$

$$z = (\frac{A}{n_{-1}}) N_{-1} \qquad (14-10)$$

로 나타내어진다. 이제 (14−8), (14−9), (14−10)식으로 나타내어진 x, y, z의 값을 계산해주기 위해서는 A값을 알아야 한다. 이 값은 구면의 곡률, 접평면에서의 광선의 좌표, 광선의 광학적 방향여현 등의 함수로서 $(A/n_{-1})$의 형태로 구해지게 된다.

그림(14−2)에서 C=1/r이라는 사실을 이용하면,

$$z = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}[1 - C^2(x^2 + y^2)]^{\frac{1}{2}} \qquad (14-11)$$

이 된다. 이 식을 이항한 후, 양변을 각각 제곱해주고 정돈하면,

$$c^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2cz = 0 \qquad (14-12)$$

이 된다. 이 식에 (14−8), (14−9), (14−10)식을 대입해주면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(\frac{A}{n_{-1}})^2 \cdot c \cdot (L_{-1}^2 + M_{-1}^2 + N_{-1}^2) - 2(\frac{A}{n_{-1}})[N_{-1} - c(x_T L_{-1} + y_T M_{-1})] + c[x_T^2 + y_T^2] = 0 \qquad (14-13)$$

이때, 방향여현들의 제곱의 합은 1이므로 $(L_{-1}^2 + M_{-1}^2 + N_{-1}^2) = n_{-1}^2$이다. 따라서 (14−13)식을 다시 써주면,

$$(\frac{A}{n_{-1}})^2 cn_{-1}^2 - 2(\frac{A}{n_{-1}})[N_{-1} - c(x_T L_{-1} + y_T M_{-1})] + C[x_T^2 + y_T^2] = 0 \qquad (14-14)$$

이 된다. 이제 $(A/n_{-1})$을 하나의 미지수로 보고 (14−14)식을 다시 해석해 보면 (14−14)식은 $(A/n_{-1})$에 대한 2차방정식이 됨을 알 수 있다.

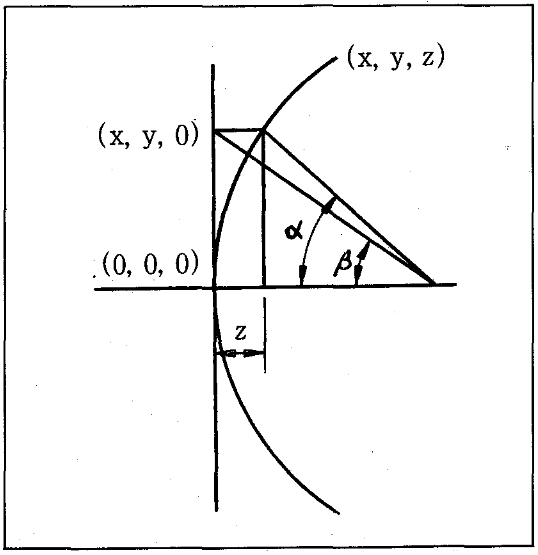



그림 14-2 구면의 특성

(14−14)식의 $(A/n_{-1})$에 대한 1차항과 0차항의 계수를 각각 2B와 C라 놓으면,

$$cn_{-1}^2(A/n_{-1})^2 - 2B(A/n_{-1}) + C = 0 \qquad (14-15)$$

이 된다. 따라서 이 2차방정식의 해는

$$(\frac{A}{n_{-1}}) = \frac{B \pm \sqrt{(\frac{B}{n_{-1}})^2 - cC} \times n_{-1}}{cn_{-1}} \qquad (14-16)$$

이 된다. 이때 복호중에서 어떤 부호가 의미있는 것인가를 따져보자. 곡률 c가 0으로 가면 A도 0으로 가야하므로, 위의 복호중에서 음의 부호만이 의미가 있음을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 해는

$$(\frac{A}{n_{-1}}) = \frac{B - n_{-1}\sqrt{(\frac{B}{n_{-1}})^2 - cC}}{cn_{-1}} \qquad (14-17)$$

이 된다. A와 곡률 C는 동일한 부호를 가지며, B와 C는 단순히 계산을 편리하게 하기 위해서 도입되었을 뿐이므로 특별한 물리적 의미는 없다. 이때 B와 C는 각각

$$B = [N_{-1} - C(x_T L_{-1} + y_T M_{-1})] \qquad (14-18)$$

$$C = c[x_T^2 + y_T^2] \qquad (14-19)$$

이다. (14－17)식의 근호부분은 다음 단계인 굴절 과정에서 이 자체만으로 이용되게 되므로 이 값을 다른 형태로 표시해 놓는 것이 편리하게 된다.

그림 (14－3)에서 모든 선분들은 입사면 위에 있게 된다. 여기에 코사인법칙을 적용하면,

$$T^2 = x_T^2 + y_T^2 + r^2 = A^2 + r^2 + 2Ar\cos I \qquad (14-20)$$

이 된다. 이 식에 $C(x_T^2 + y_T^2)$ 대신에 C를 대입한 후, cosI에 대해서 풀어주면,

$$n_{-1} - \cos I = \frac{-cn_{-1}(A/n_{-1})^2}{2(A/n_{-1})} \qquad (14-21)$$

이 된다. 이때, $C = 2B(A/n_{-1}) - cn_{-1}) - cn_{-1}^2 (A/n_{-1})^2$ 이므로,

$$n_{-1}\cos I = B - A \qquad (14-22)$$

$$n_{-1}\cos I = n_{-1}[(B/n_{-1})^2 - c\ \ ]^{1/2} \qquad (14-23)$$

이 된다. (A/n-1)의 해로 돌아가서 이 식을 n-1cosI의 표현을 써서 나타내주면,

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right) = \frac{B - n_{-1}\cos I}{cn_{-1}^2} \qquad (14-24)$$

이 된다. (14－23)식에서

$$cn_{-1}^2 = \frac{B^2 - n_{-1}^2\cos^2 I}{C} = \frac{(B + n_{-1}\cos I)(B - n_{-1}\cos I)}{C} \qquad (14-25)$$

이 되므로 (A/n-1)에 대한 최종적인 표현은

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right) = \frac{C}{B + n_{-1}\cos I} \qquad (14-26)$$

이 된다.

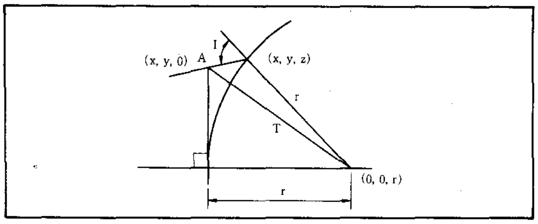



그림 14－3 cos I의 결정

여태까지 유도된 식들 중에서 (A/n-1)을 구하는 중간과정에서 필요한 비식을 다시 써보면 다음과 같다.

$$C = c(x_T^2 + y_T^2) \qquad (14-27)$$

$$B = N_{-1} - c(x_T L_{-1} + y_T M_{-1}) \qquad (14-28)$$

$$n_{-1}\cos I = n_{-1}[(B/n_{-1})^2 + cC]^{1/2} \qquad (14-29)$$

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right) = \frac{C}{B + n_{-1}\cos I} \qquad (14-30)$$

이제 (14－30)식에서 얻은 (A/n-1)의 값을 (14－8), (14－9), (14－10)식에 대입하면 x, y, z의 값을 얻을 수 있게 되어 접평면에서 구면으로의 변환이 끝나게 된다.

### 14.1.3 구면에서의 굴절식

구면에서의 굴절에서는 다음의 두 식이 기본적인 식으로서 사용된다. 각 기호들이 나타내는 바에 대해서는 그림(14－4)를 참고하기 바란다.

$$S_1 - S_0 = \Gamma M_1 \qquad (14-31)$$

$$\Gamma = n_1\cos I' - n_0\cos I$$

$$= -n_0\cos I + n_1\left[\left(\frac{n_0}{n_1}\cos\right)^2 - \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \qquad (14-32)$$

(14－31)식의 의미는 다음과 같다. 만일 광선과 구면의 교점에서 입사광선과 굴절광선의 방향으로 그 길이가 각각 $n_0$, $n_1$되게 벡터가 그려졌다면, 삼각형의 다른 한 변은 면의 법선(法線)에 평행하게 되고, 그 길이는 Γ가 된다.

그림 (14－3)을 j번째 면에 대해서 다시 그려준 것이 그림(14－4)이다.

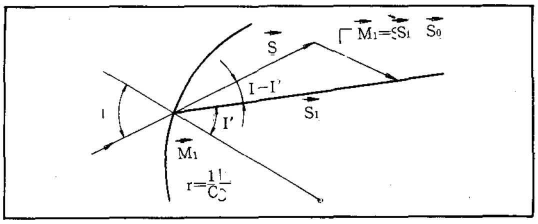



그림 14－4 굴절의 법칙과 관련된 삼각형

이 그림은 입사평면상에 그려져 있으며, 이때$\Gamma$ 만큼의 길이를 가진 선분은 r과 평행하다. 이때 단위 백터 $\overrightarrow{M_1}$은 법선과 평행한 단위 백터이므로,

$$\overrightarrow{M_1} = c\,[(0-x)\hat{i} + (0-y)\hat{j} + (r-z)\hat{k}]$$

$$= c\,[-x\hat{i} - y\hat{j} + (r-z)\hat{k}] \qquad (14-33)$$

로 나타내어진다. (14−31)식을 (14−33)식의 결과를 이용하여 다시 써주면,

$$\overrightarrow{S_1} - \overrightarrow{S_0} = -cx\Gamma\hat{i} - cy\Gamma\hat{j} + c(r-z)\Gamma\hat{k} \quad (14-34)$$

이 된다. 또한,

$$\overrightarrow{S_0} - n_1\overrightarrow{Q_0} = L_{-1}\hat{i} + M_{-1}\hat{j} + N_{-1}\hat{k} \qquad (14-35)$$

이다. $\overrightarrow{S_1}$에 대해서도 비슷한 형태의 방정식이 성립하므로 이러한 결과들을 이용하면,

$$\overrightarrow{S_1} - \overrightarrow{S_0} = (L-L_1)\hat{i} + (M-M_1)\hat{j} + (N-N_1)\hat{k} \qquad (14-36)$$

로 나타내줄 수 있다. 따라서 (14−34)식과 (14−36)식의 각 단위 벡터에 대한 계수를 같게 놓음으로써 굴절 전후의 광선의 광학적 방향여현간의 관계식을 얻을 수 있다. 이때, $\Gamma$의 값은 (14−32)식에 의하여 구해진다.

따라서 굴절후의 광학적 방향여현 값인 L, M, N을 초기치로부터 구해내는데 필요한 식들을 차례로 써보면 다음과 같다.

$$n\cos I' = n\,[(\frac{n_{-1}}{n}\cos I)^2 - (\frac{n_{-1}}{n})^2 + 1]^{1/2} \qquad (14-37)$$

$$\Gamma = n\cos I' - n_{-1}\cos I \qquad (14-38)$$

$$L = L_{-1} - xc\Gamma \qquad (14-39)$$

$$M = M_{-1} - yc\Gamma \qquad (14-40)$$

$$N = N_{-1} - (zc-1)\Gamma \qquad (14-41)$$

반사의 경우에는 굴절률값에 (−)부호를 붙이고, d의 값에 (−)부호를 붙여주므로써 동일한 계산식에 의하여 구할수 있다.

### 14.1.4 구면에서의 유한 광선 추적법의 정리

앞에서와 같은 과정을 거쳐 유도되는 구면에 대한 유한 광선 추적법을 프로그램 작성등의 실제 사용시 편리하도록 정리해보면 다음과 같다.

(1) 초기치와 최종치

광선에 대한 초기치 : $x_{-1}$, $y_{-1}$, $z_{-1}$, $L_{-1}$, $M_{-1}$, $N_{-1}$

광학계에 대한 데이터 : $d_{-1}$, $n_{-1}$, c

광선에 대한 최종치 : x, y, z, L, M, N

(2) 사용되는 식들

$$(\frac{D_{-1}}{n_{-1}}) = (d_{-1} - Z_{-1})\frac{1}{N_{-1}} \qquad (14-42)$$

$$x_T = x_{-1} + (\frac{D_{-1}}{n_{-1}})L_{-1} \qquad (14-43)$$

$$y_T = y_{-1} + (\frac{D_{-1}}{n_{-1}})M_{-1} \qquad (14-44)$$

$$C = c(x_T^2 + y_T^2) \qquad (14-45)$$

$$B = N_{-1} - c(x_T L_{-1} + y_T M_{-1}) \qquad (14-46)$$

$$n_{-1}\cos I = n_1\,[(\frac{B}{n_{-1}}) - cC]^{\frac{1}{2}} \qquad (14-47)$$

$$(\frac{A}{n_{-1}}) = \frac{C}{B + n_{-1}\cos I} \qquad (14-48)$$

$$x = x_T + (\frac{A}{n_{-1}})L_{-1} \qquad (14-49)$$

$$y = y_T + (\frac{A}{n_{-1}})M_{-1} \qquad (14-50)$$

$$z = (\frac{A}{n_{-1}})N_{-1} \qquad (14-51)$$

$$n\cos I' = (\frac{n_{-1}}{n}\cos I)^2 - \frac{n_{-1}}{n})^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \qquad (14-52)$$

$$\Gamma = n\cos I' - n_1\cos I \qquad (14-53)$$

$$L = L_{-1} - xc\Gamma \qquad (14-54)$$

$$M = M_{-1} - yc\Gamma \qquad (14-55)$$

$$N = N_{-1} - (zc-1)\Gamma \qquad (14-56)$$