

剪斷變形을 考慮한 平面뿔대 構造物의 幾何的인 非線形 解析

Geometric Non-linear Analysis of the Plane Frame Structures including Shear Deformation Effect

金 文 榮* · 張 丞 弼**
Kim, Moon Young* · Chang, Sung Pil

Abstract

Two beam/column elements in order to analyze the geometric nonlinear plane framed structures including the effects of transverse shear deformation and bending stretching coupling are developed. In the case of the first element (finite segment method), tangent stiffness matrix are derived by directly integrating the equilibrium equations whereas in the case of the second element (finite element method) elastic and geometric stiffness matrices are calculated by using the hermitian polynomials including shear deformation effect as the shape function. Both elements possess the usual six degree of freedoms. Numerical results are presented for the selected test problems which demonstrate that both elements represent reliable and highly accurate tools.

要 旨

本 論文에서는 剪斷變形 效果가 고려되는 平面뿔대 構造物의 幾何的인 非線形 解析을 수행하기 위한 두 가지 방법 즉, 有限分節法과 有限要素法을 제시한다. 有限分節法의 경우에는 平衡方程式을 直接 積分하므로써 嚴密한 接線剛度 매트릭스가 유도되는 반면에 有限要素法의 경우에는 剪斷變形을 고려하는 Hermitian 多項式을 形狀函數로 사용하므로써 彈性 및 幾何的인 剛度매트릭스가 산정된다. 선택된 例題들을 解析한 결과들과 다른 文獻의 결과들을 비교, 검토하므로써 本 論文에서 제시된 理論의 正當性을 立證한다.

1. 序 論

電子計算器의 발달과 더불어 平面뿔대 構造物의 幾何的인 非線形 解析에 관한 研究는 최근까지 활발한 研究結果를 나타내었다. 대체로 이러한 研究

들은 要素의 變位場을 節點變位에 대한 形狀函數로 나타내어 彈性剛도매트릭스와 幾何的인 剛도매트릭스를 얻는 有限要素法과 軸力을 받는 뿔대 部材의 平衡方程式을 積分하여 剛도매트릭스를 嚴密하게 유도하는 有限分節法으로 要約할 수 있다.

* 正會員 · 서울 大學校 工科大學 講師, 土木工學科

** 正會員 · 서울 大學校 工科大學 教授, 土木工學科

非線形 有限要素法을 이용하여 뼈대構造物을 解析한 文獻들은 비교적 최근에 발표된 Wen과 Rahimzadeh⁽¹⁾의 論文에서 찾아볼 수 있다. 보-기둥 理論을 이용하는 有限分節法에 관한 研究로는, Saafan⁽²⁾이 힘으로 야기된 水平節點變位の 變化 (bowing effect)를 고려하여 平面 뼈대에 대한 剛度 매트릭스를 유도하였고 Oran^(3, 4)은 이를 平面 및 空間 뼈대로 확장시켜서 接線剛度 매트릭스를 유도하였다. Connor⁽⁵⁾는 剪斷變形을 고려하므로써 더욱 일반화 시켰다.

本 論文에서는 平面 뼈대 構造物의 幾何的인 非線形 解析을 수행하기 위하여 剪斷變形 效果를 고려할 수 있는 有限分節法과 有限要素法을 제시한다. 3次元 連續體에 대한 Reissner 原理로 부터 剪斷力으로 인한 剪斷變形을 허용하는 보-기둥에 대한 平衡方程式, 힘-變位關係 그리고 境界條件을 얻고, 이 方程式의 解를 구하는 과정에서 有限分節法에 대응하는 接線剛度 매트릭스와 Bowing 函數를 嚴密하게 유도한다. 有限要素法에서는 剪斷變形 效果가 고려되는 Hermitian 多項式을 形狀函數로 사용하여 彈性 및 幾何的인 剛度 매트릭스 그리고 Bowing 函數를 算定한다.

2. 보-기둥의 平衡方程式

3차원 연속체에 대한 Reissner 원리⁽⁶⁾는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta(\iint \int_V (S_{ij} \cdot \epsilon_{ij} - V^*) dv - \int_s f_s^* \cdot (U_i - U_i^s) ds) = 0 \quad (2.1)$$

여기서, S_{ij} 는 2nd Piola Kirchhoff Stress Tensor를 나타내며 ϵ_{ij} 는 Green-Lagrange Strain Tensor를 의미한다. 두번째항은 상보에너지 밀도함수 (complementary energy density function)를 표시한 것이며 f_s^* 는 표면력(Surface Force), U_i 는 변위 벡터성분 그리고 U_i^s 는 경계조건에 의해서 크기가 정해지는 변위벡터성분이다.

식 (2.1)에서 독립적으로 변분을 일으키는 변수들은 S_{ij} , U_i 그리고 f_s^* 이다.

그림 2.1은 X_1 - X_2 면내에서 뼈대부재의 변형을 나타내며, 이때 X_1 , X_2 , X_3 는 국부좌표계(local coordinate)를 표시한다. 전단변형을 고려하는 평면 뼈대의 변위장은 아래와 같이 X_1 의 함수인 3개의 변위 파라미터(U_x , U_y , ω)들로 나타낼 수 있다.

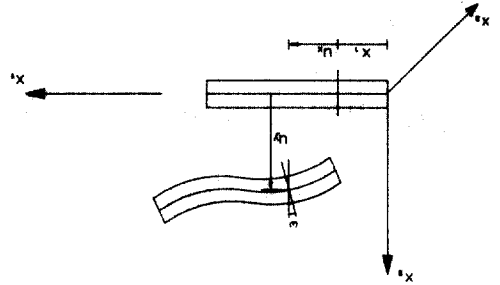


그림 2.1 Deformation of beam element in $X_1 - X_2$ Plane

$$\begin{aligned} U_1 &= U_x - \omega \cdot X_2 \\ U_2 &= U_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

여기서, U_x , U_y 는 X_1 , X_2 축방향의 단면강체 이동 변위들이며 ω 는 X_3 축에 대한 강체 회전 변위를 나타낸다.

변형도와 단면의 회전각은 작지만, 유한할때 비선형 변위-변형도 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \partial U_1 / \partial X_1 + 1/2 \cdot (\partial U_2 / \partial X_1)^2 \\ \epsilon_{12} &= 1/2 \cdot (\partial U_1 / \partial X_2 + \partial U_2 / \partial X_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

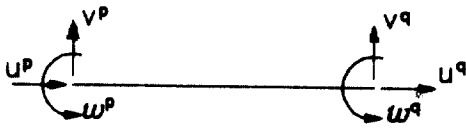
부재내부에 발생하는 단면력을 $F_1 = \iint S_{11} dA$, $F_2 = \iint S_{12} dA$, $M = -\iint X_2 \cdot S_{11} dA$ 로 정의하고, 식(2.2), (2.3) 그리고 $S_{11} = F_1/A - (M/I) \cdot X_2$ 의 관계를 고려하면 식 (2.1)은 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta(\int_L \{ F_1 \cdot (U_x' + 1/2 \omega^2) + F_2 \cdot (U_y' - \omega) + M \cdot \omega \\ - (F_1^2 / 2EA + F_2^2 / 2GA + F_2^2) \} dx_1 - \{ U_x(0) - U^p \} \\ \cdot F_1^p - \{ U_y(0) - V^p \} \cdot F_2^p - \{ \alpha(0) - \omega^p \} \cdot M^p \\ \cdot M^p - \{ U_x(L) - U^q \} \cdot F_1^q \\ - \{ \alpha(L) - \omega^q \} \cdot M^q) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

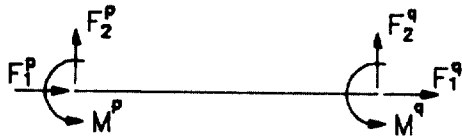
여기서, f_s^* 는 전단계수이다.

식 (2.4)에서 마지막 6개의 항들은 부재양단에 작용하는 재단력들의 포텐셜을 나타낸 것이며, 그림 2.2는 재단변위와 재단력벡터의 방향을 표시한 것이다. 식 (2.4)를 3개의 변위 파라미터(U_x , U_y , ω)와 3개의 단면력 (F_1 , F_2 , M), 그리고 양단의 재단력들 (F_1^p , F_2^p , M^p , F_1^q , F_2^q , M^q)에 대하여 변분을 취하면 다음과 같이 평형방정식, 힘-변위관계 및 경계조건을 얻는다.

$$\begin{aligned} \text{i) 축방향거동} \\ F_1' &= 0, F_1/FA = U_x' + 1/2 \cdot U_y'^2 \\ \text{경계조건 ; } U_x(0) &= U^p, F_1(0) = -F_1^p \end{aligned} \quad (2.5)$$



a) Member Displacement Vector



b) Member Force Vector

그림 2.2

$$U_x(L)U^q, F_1(L)=F_1^p$$

ii) X_1-X_2 면내의 휨거동

$$(F_2 + F_1 \cdot U_y') = 0 \quad M' = -F_2$$

$$U_y' - \omega = f_s \cdot F_2 / GA \quad M = EI \cdot \omega' \quad (2.6)$$

경계조건 ; $U_y(0) = V^p, F_1 \cdot U_y'(0) + F_2 = -F_2^p$

$$U_y(L) = V^q, F_1 \cdot U_y'(L) + F_2 = F_2^q$$

$$\omega(0) = \omega^p, \quad M(0) = -M^p$$

$$\omega(L) = \omega^q, \quad M(L) = M^q$$

(2.7)

식 (2.5)의 두 번째 식만을 제외하면 위의 식들은 모두 선형 미분방정식임을 알 수 있다. 식 (2.5)의 첫번째 식으로부터 F_1 이 부재내에서 일정하다는 것을 알 수 있으므로 식 (2.5), (2.6)의 미분방정식들을 적분할 때 F_1 을 상수로 취급할 수 있다. 식 (2.5)의 두번째식은 Bowing 함수를 유도하는데 사용된다.

3. 接線剛度매트릭스의 誘導

3장에서는 기하적인 비선형 해석을 수행하는데 필요한 접선강도매트릭스를 두가지 방법으로 유도한다. 즉, 유한분절법에 대응하는 3.1절에서는 식 (2.5), (2.6)에 주어진 평행방정식 및 힘-변위 관계를 직접 적분함으로써 접선 강도매트릭스를 엄밀하게 유도한다. 유한요소법에 대응하는 3.2절에서는 식 (2.5), (2.6)에서 F_1 을 零으로 놓았을 때의 해를 형상함수로 사용하여 탄성 및 기하적인 강도매트릭스를 산정한다.

3.1 有限分節法에서 사용되는 接線剛度매트릭스의 誘導

식 (2.6)을 U_y 에 관한 미분방정식으로 나타내면 $EI \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) \cdot U_y'' - F_1 \cdot U_y' = 0$ 이 된다.

윗식을 적분하면 다음과 같다.

$$U_y = C_1 \cdot \cos(\mu x) + C_2 \cdot \sin(\mu x) + C_3 \cdot x + C_4 \quad (3.1a)$$

여기서 $\mu^2 = -F_1 / \{EI \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA)\}$ 이다.

식 (3.1a)를 식 (2.6)의 세번째식에 대입하면 아래와 같다.

$$\omega = \mu \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) \cdot \{-C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cos(\mu x)\} + C_3 \quad (3.1b)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 의 값들을 결정하기 위하여 네개의 경계조건 ($U_y(0) = V^p, U_y(L) = V^q, \omega(0) = \omega^p, \omega(L) = \omega^q$)들을 적용한 다음에 C_3, C_4 를 소거하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\omega^p - \omega^q = \mu \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) \cdot \{-C_1 \cdot \sin(\mu L) + C_2 \cdot \{\cos(\mu L) - 1\}\} + C_3 \quad (3.2a)$$

$$V^q - V^p - L \cdot \omega^p = C_1 \cdot \{\cos(\mu L) - 1\} + C_2 \cdot \{\sin(\mu L) - \mu L \cdot (1 + f_s \cdot F_2 / GA)\}$$

윗 식을 풀면 C_1, C_2 는 다음과 같다.

$$C_1 = \{ \sin(\mu L) - \mu L \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) \} \cdot (-\omega^p + \omega^q) / \{ \mu \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) \} + \{ \cos(\mu L) - 1 \} \cdot (V^q - V^p - L \cdot \omega^p) / D$$

$$C_2 = \{ \cos(\mu L) - 1 \} \cdot (\omega^q - \omega^p) / \mu \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) + \sin(\mu L) \cdot (V^q - V^p - L \cdot \omega^p) / D \quad (3.2b)$$

$$D = 2\{1 - \cos(\mu L)\} - \mu L \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) \cdot \sin(\mu L)$$

식 (2.7)로부터 재단모멘트는 $M^p = -EI \cdot \omega'(0), M^q = EI \cdot \omega'(L)$ 이고 재단전단력은 $F_2^p = -F_2(0) - F_1 \cdot U_y'(0), F_2^q = F_2(L) + F_1 \cdot U_y'(L)$ 이므로 U_y, ω 에 대한 결과식 (3.1)들을 윗 식들에 대입하여 정리하면 다음과 같이 X_1-X_2 면내의 휨거동에 대한 절점변위-재단력 관계식들을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} F_2^p \\ M^p \\ F_2^q \\ M^q \end{Bmatrix} = EI / L^3 \cdot \begin{bmatrix} 12\phi_1 & 6L\phi_2 & -12\phi_1 & 6L\phi_2 \\ & 4L^2\phi_3 & -6L\phi_4 & 2L^2\phi_4 \\ & & 12\phi_1 & -6L\phi_2 \\ \text{symm.} & & & 4L^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V^p \\ \omega^p \\ V^q \\ \omega^q \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

여기서, $\phi_i, i=1, 2, 3, 4$ 는 표-1에 나타내었다.(부

특참조)

표-1에서 β 가 β 쪽으로 접근함에 따라 안정함수 ϕ 는 부정이 되므로 이경우의 안정함수들은 β 에 대한 Taylor 전개를 행하여 2차항까지 고려하여 표-1에 나타내었다. Taylor 전개를 행할때 $\beta = |sf| / [S \cdot (1+sf)]$ 관계식을 사용하였다. 결국 표-1의 안정함수를 β 의 전 범위에 걸쳐서 사용할수 있다.

부재의 재단변위벡터와 재단력벡터들을 각각 $\langle u^p, v^p, \omega^p, u^q, v^q, \omega^q \rangle$, $\langle F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q \rangle$ 로 표시할 때 식 (3. 4)는 접선강도매트릭스를 정리한 것이다.

$$a = EA/L$$

$$b_1 = 12\phi_1 \cdot EI/L^3$$

$$b_2 = 6\phi_2 \cdot EI/L^2$$

$$b_3 = 4\phi_3 \cdot EI/L$$

$$b_4 = 2\phi_4 \cdot EI/L$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b_1 & b_2 & \cdot & -b_1 & b_2 \\ & & b_3 & \cdot & -b_2 & b_4 \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ symm. & & & b_1 & -b_2 & \\ & & & & & b_3 \end{bmatrix} \quad (3. 4)$$

3. 3 有限要素法에서 使用되는 接線剛度매트릭스의 誘導

형상함수들을 결정하기 위하여 F_1 을 β 쪽으로 놓고 식(2. 6)을 적분한다. 이때 식(2. 7)의 기하적인 경계조건을 적용하면 다음과 같이 U_v 와 ω 를 얻을 수 있다.

$$U_v = h_1 \cdot v^p + h_2 \cdot L \cdot \omega^p + h_3 \cdot v^q + h_4 \cdot L \cdot \omega^q$$

$$L \cdot \omega = k_1 \cdot v^p + k_2 \cdot L \cdot \omega^p + k_3 \cdot v^q + k_4 \cdot L \cdot \omega^q \quad (3. 5)$$

여기서,

$$h_1 = [2 \cdot \beta^3 - 3 \cdot \beta^2 - 12S \cdot \beta + 1 + 12S] / (1 + 12S)$$

$$h_2 = [\beta^3 - 2(1 + 3S) \cdot \beta^2 + (1 + 6S) \cdot \beta] / (1 + 12S)$$

$$h_3 = [-2 \cdot \beta^3 + 3 \cdot \beta^2 + 12S \cdot \beta] / (1 + 12S)$$

$$h_4 = [\beta^3 - (1 - 6S) \cdot \beta^2 - 6S \cdot \beta] / (1 + 12S)$$

$$k_1 = [6 \cdot \beta^3 - 6 \cdot \beta] / (1 + 12S)$$

$$k_2 = [3 \cdot \beta^3 - 4(1 + 3S) \cdot \beta + 1 + 12S] / (1 + 12S)$$

$$k_3 = [-6 \cdot \beta^3 + 6 \cdot \beta] / (1 + 12S)$$

$$k_4 = [3 \cdot \beta^3 - 2(1 - 6S) \cdot \beta] / (1 + 12S)$$

$$S = F_s \cdot EI / (GA \cdot L^2), \quad \beta = x/L$$

식 (2. 7)로 부터 축력이 β 인 경우에 재단모멘트는 $M^p = -EI \cdot \omega(0)$, $M^q = EI \cdot \omega(L)$ 이고 재단전단력은 $F_2^p = -F_2(0)$, $F_2^q = F_2(L)$ 이므로 식(3. 3)의 U_v 와 ω 에 대한 결과식들을 이에 대입하여 정리하

고 X_1 축 방향의 강도매트릭스를 함께 나타내면 다음과 같이 탄성강도매트릭스(K_e)를 얻을 수 있다.

$$a = EA/L \quad b_1 = 12 \cdot EI / (T \cdot L^3)$$

$$b_2 = 6 \cdot EI / (T \cdot L^2)$$

$$b_3 = 4(1 + 3S) \cdot EI / (T \cdot L)$$

$$b_4 = 2(1 - 6S) \cdot EI / (T \cdot L)$$

$$S = F_s \cdot EI / (GA \cdot L^2)$$

$$T = 1 + 12S$$

$$K_e = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b_1 & b_2 & \cdot & -b_1 & b_2 \\ & & b_3 & \cdot & -b_2 & b_4 \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ symm. & & & b_1 & -b_2 & \\ & & & & & b_3 \end{bmatrix} \quad (3. 6)$$

기하적인 강도매트릭스를 산정하기 위하여 식(2. 4)에서 $\int_0^L F_1 \cdot 1/2 \cdot U_v \cdot dx$ 에 식(3. 3)의 U_v 를 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$c_1 = 12 \cdot (12S^2 + 2S + 0.1) / (T^2 \cdot L)$$

$$c_2 = 0.1 / T^2$$

$$c_3 = 4 \cdot L \cdot (3S^2 + S/2 + 1/30) / T^2$$

$$c_4 = 2 \cdot L \cdot (6S^2 + S + 1/60) / T^2$$

$$T = 1 + 12S$$

$$K_g = F_1 \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & C_1 & C_2 & \cdot & -C_1 & C_2 \\ & & C_3 & \cdot & -C_2 & C_4 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ symm. & & & C_1 & -C_2 & \\ & & & & & C_3 \end{bmatrix} \quad (3. 7)$$

전단변형을 고려한 고유진동수 및 임계하중의 산정(6장 참조)을 위하여 질량매트릭스가 필요하다. 질량매트릭스를 유도하는데 필요한 평면파대의 운동에너지에 대한 식은 다음과 같다.

$$\int_0^L 1/2 \cdot \rho \cdot (A \cdot \dot{U}_v^2 + I \cdot \dot{\omega}^2) dx \quad (3. 8)$$

여기서, ρ 는 밀도를 나타내고 $(\dot{\quad})$ 는 (\quad) 를 시간으로 미분한 것이다.

식 (3. 8)에 식 (3. 5)를 대입하여 정리하면 다음과 같이 전단변형 및 회전관성을 고려한 질량매트릭스를 얻을 수 있다.

$$a_1 = \rho AL/3 \quad a_2 = \rho AL/6$$

$$\begin{aligned}
d_1 \cdot T^2 &= \left[\frac{156}{420} + \frac{84}{10} S + 48S^2 \right] \rho A L + \frac{36\rho l}{30L} \\
d_2 \cdot T^2 &= \left[\frac{420}{54} + \frac{11}{36} S + 6S^2 \right] \rho A L^2 + \left[\frac{3}{30} - 6S \right] \rho l \\
d_3 \cdot T^2 &= \left[\frac{420}{54} + \frac{10}{36} S + 24S^2 \right] \rho A L - \frac{36\rho l}{30L} \\
d_4 \cdot T^2 &= \left[\frac{420}{13} - \frac{10}{9} S - 6S^2 \right] \rho A L^2 + \left[\frac{3}{30} - 6S \right] \rho l \\
d_5 \cdot T^2 &= \left[\frac{4}{420} + \frac{2}{10} S + 1.2S^2 \right] \rho A L^3 + \left[\frac{4}{30} + 2S + 48S^2 \right] \rho l L \\
d_6 \cdot T^2 &= \left[\frac{3}{420} + \frac{2}{10} S + 1.2S^2 \right] \rho A L^3 + \left[\frac{4}{30} + 2S + 48S^2 \right] \rho l L \\
&\quad + \left[\frac{1}{30} + 2S - 24S^2 \right] \rho l L
\end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & & & a_2 & & \\ & d_1 & & & & \\ & & d_2 & & & \\ & & & d_3 & & \\ & & & & d_5 & \\ & & & & & -d_4 & -d_6 \\ & & & & & & a_1 & & \\ & & & & & & & d_1 & -d_2 \\ & & & & & & & & & d_5 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$T = 1 + 12S$$

3. 1절에서는 평면뺨대요소에 대한 엄밀한 접선 강도 매트릭스가 유도되었으며 축력의 크기가 미소한 경우에는 Taylor 전개를 이용하여 매트릭스 각 성분들의 상수항과 1차항들을 계산하였다. 이렇게 유도된 상수항과 1차항으로 이루어진 매트릭스들이 본 절에서 유도된 탄성 및 기하적인 강도 매트릭스와 정확히 일치하는 것은 주목할 만하다.

4. bowing 函數의 誘導⁽²⁾

부재내에서 축력이 일정하다는 것을 고려하면 식 (2.5)의 두번째 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_1 \cdot L / EA = U^a - U^p + \delta \quad (4.1)$$

$$\text{여기서, } \delta = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L U_y'^2 dx_1$$

윗 식에서 휨으로 인한 축방향의 상대적인 변위 성분을 δ 로 나타내었으며 이를 Bowing 함수라고 부른다. 식 (4.1)은 뺨대구조물이 변형된 상태에서 각 부재의 축력을 산정하는데 사용되므로 식 (4.1)의 δ 을 계산할때 V^p, V^a 는 ω^p, ω^a 들을 상대적인 재단회전변위들로 가정한다.

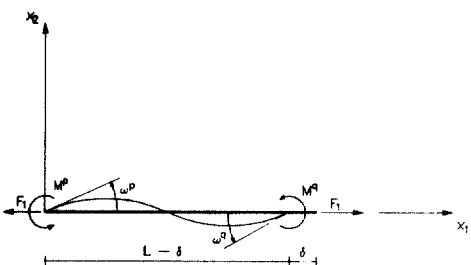


그림 4.1 Relative deformations and associated forces

$X_1 - X_2$ 면내의 상대적인 회전각 (ω^p, ω^a)과 축력 F_1 의 함수로 δ 을 나타내기 위하여 그림 4.1를 참조하면 다음과 같은 평형방정식을 얻는다.

$$EI \cdot \omega' = M = -(M^p - (M^p + M^a) \cdot X/L - F_1 \cdot U_y) \quad (4.2)$$

식 (2.6)을 이용하여 식 (4.2)에서 ω 를 U_y 로 나타내면 아래와 같다.

$$EI \cdot (1 + F_1 \cdot f_s / GA) \cdot U_y'' - F_1 \cdot U_y = (M^p + M^a) \cdot X/L - M^p \quad (4.3)$$

식 (4.3)의 일반해에 경계조건 ($U_y(0) = U_y(L) = 0$)을 적용하면

$$\begin{aligned}
U_y = & -M^p / F_1 \cdot (\sin(\mu L - \mu X) / \sin(\mu L) \\
& + X/L - 1) - M^a / F_1 \cdot (-\sin(\mu X) / \sin(\mu L) + X/L) \quad (4.4)
\end{aligned}$$

을 얻는다.

식 (4.4)를 X 에 대해 미분하고 식 (4.1)의 두번째 식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
2\delta = & -(M^p + M^a)^2 / (F_1^2 \cdot L) + \mu^2 \cdot ((M^p + M^a)^2 / \{F_1^2 \cdot \sin^2(\mu L)\}) \cdot \{L/2 + \sin(2\mu L)/4\mu\} \\
& + 2 \cdot (M^p \cdot M^a \cdot \mu^2 / \{F_1^2 \cdot \sin^2(\mu L)\}) \cdot \{L \cdot \cos(\mu L)/2 + \sin(\mu L)/2\mu - L/2 - \sin(2\mu L)/4\mu\} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

식 (3.3)으로부터 $M^p = (4\phi_3 \cdot EI/L) \cdot \omega^p + (2\phi_4 \cdot EI/L) \cdot \omega^a$, $M^a = (2\phi_4 \cdot EI/L) \cdot \omega^p + (4\phi_3 \cdot EI/L) \cdot \omega^a$ 의 관계식을 식 (4.5)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\delta + \{h_1 \cdot (\omega^p + \omega^a)^2 + h_2 \cdot (\omega^p - \omega^a)^2\} \cdot L / (1 + F_1 \cdot f_s / GA)^2 \quad (4.6)$$

$$\text{여기서, } h_1 = (4\phi_3 + 2\phi_4)^2 \cdot (\beta^2 + \beta \cdot \sin\beta - 4 + 4 \cos\beta) / \{8\beta^4 \cdot (1 - \cos\beta)\},$$

$h_2 = (4\phi_3 - 2\phi_4)^2 \cdot (\beta - \sin\beta) / \{8\beta^3 \cdot (1 + \cos\beta)\}$
 전단변형을 무시하는 경우 ($f_s=0$)에 h_1, h_2 는 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} h_1 &= (2\phi_3 + \phi_4) \cdot (\phi_4 - 1) \cdot / 2\beta^2, \\ h_2 &= \phi_4 / 8 \cdot (2\phi_3 + \phi_4) \end{aligned} \quad (4. 7)$$

또한 식 (4. 6)에서 축력이 **쑤**인 경우는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta &= \{(\omega^p)^2 + (\omega^s)^2\} \cdot \frac{L \cdot (6S^2 + S + 1/15)}{(1 + 15S)^2} \\ &\quad - \omega^p \cdot \omega^s \cdot \frac{L \cdot (12S^2 + 2S + 1/30)}{(1 + 12S)^2} \end{aligned} \quad (4. 8)$$

5. 不平衡荷重의 算定

일반적으로 기하적인 비선형 해석에서 사용되는 증분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_T \cdot \Delta U = \Delta R \quad (5. 1)$$

여기서, K_T 는 구조물 접선강도매트릭스, ΔU 는 증분변위벡터, 그리고 ΔR 는 증분하중 또는 불평형 하중벡터에 해당한다.

기하적인 비선형해석에서는 불평형하중을 정확히 산정하는 것이 중요하다. Updated lagrangian formulation에 따른 불평형하중 산정방법은 다음과 같다.

1) 증분방정식 (5. 1)을 풀어서 증분변위벡터를 구하고 국부좌표계로 좌표 변환 시킨다.

2) 그림 5. 1을 참조하여 강제회전변위(ΔR)와 순수 변형성분($\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta U$)을 구한다.

$$\begin{aligned} \Delta R &= (\Delta V^q - \Delta V^p) / L \\ \Delta\theta_1 &= \Delta\omega^p - \Delta R, \quad \Delta\theta_2 = \Delta\omega^s - \Delta R \\ \Delta U &= \Delta L + \Delta\delta \end{aligned} \quad (5. 2)$$

여기서, ΔL 은 부재 양절점 사이의 직선거리에 대한 증분량을 의미하고, $\Delta\delta$ 는 식 (4. 8)로 계산하며 휨으로인한 축방향의 상대적인 변위성분을 나타낸다.

3) 2)에서 계산된 강제회전변위 (ΔR)를 이용하여 새로운 좌표변환매트릭스를 계산한다.

4) 유한분절법의 경우에는 식 (3. 4)를, 유한요소법의 경우에는 식 (3. 6)과 식 (3. 7)을 사용하여 다음과 같이 재단력 증분 벡터를 구한다.

$$\Delta M^p = (4\phi_3 \cdot \Delta\theta_1 + 2\phi_4 \cdot \Delta\theta_2) \cdot EI/L$$

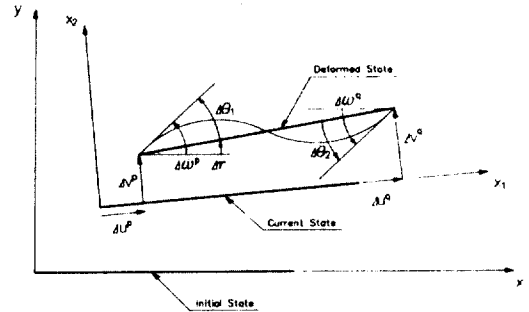


그림 5. 1 Configuration of beam element in initial, current and deformed state

$$\Delta M^q = (2\phi_4 \cdot \Delta\theta_1 + 4\phi_3 \cdot \Delta\theta_2) \cdot EI/L \quad (5. 3a)$$

$$\Delta P = \Delta U \cdot EA/L \quad \text{이고,}$$

유한요소법에서는,

$$\Delta M^p = (4C_3 \cdot \Delta\theta_1 + 2C_4 \cdot \Delta\theta_2) \cdot EI/L$$

$$\Delta M^q = (2C_4 \cdot \Delta\theta_1 + 4C_3 \cdot \Delta\theta_2) \cdot EI/L \quad (5. 3a)$$

여기서,

$$C_3 = \frac{(1+3S)}{(1+12S)} \cdot \frac{EI}{L} + F_1 \cdot \frac{L \cdot (3S^2 + S/2 + 1/30)}{(1+12S)}$$

$$C_4 = \frac{(1-6S)}{(1+12S)} \cdot \frac{EI}{L} - F_1 \cdot \frac{L \cdot (6S^2 + S + 1/60)}{(1+12S)^2}$$

6. 臨界荷重의 算定

유한요소법에서는 탄성강도매트릭스와 기하적인 강도매트릭스를 분리하여 얻을 수 있으므로 식 (6. 1)의 고유치들 중에서 최소값을 구하므로써 임계하중을 결정할 수 있다.

$$K_E \cdot U + \lambda \cdot K_G \cdot U = 0 \quad (6. 1)$$

여기서, λ 는 하중파라미터를 나타낸다.

유한분절법에서는 탄성 및 기하적인 강도매트릭스들이 분리되어 있지 않기 때문에, 뼈대구조물의 임계하중은 질량매트릭스를 구성하고 식 (6. 2)와 같은 고유치문제를 풀어서 고유주기(ω)가 **쑤**이 될 때의 하중파라미터 값으로 얻을 수 있다.

$$K_T(\lambda) \cdot U = \omega^2 \cdot M \cdot U \quad (6. 2)$$

여기서, $K_T(\lambda)$ 는 접선강도 매트릭스가 λ 의 함수임을 나타내고, M 은 전체좌표계에 대한 질량매트릭스이며 한 부재에 대한 질량매트릭스는 32절

절에 제시하였다.

유한분절법의 경우에, 이분법⁽²⁾ (Bisection Method)에 의하여 가장 작은 임계하중을 산정하는 알고리즘은 다음과 같다.

1) λ 의 범위를 $[A_0, B_0]$ 로 설정한다.

여기서, $\lambda=A_0$ 는 식 (6. 2)의 가장 작은 고유주기가 음이고 나머지 고유주기들은 모두 양일 때의 하중파라미터 값이고 $\lambda=B_0$ 는 식 (6. 2)의 모든 고유주기가 양일 때의 하중 파라미터 값이다.

2) $C_i=(A_i+B_i)/2$ $i=0, 1, 2, \dots$ 를 계산한다.

3) 식 (6. 2)의 λ 에 C_i 를 대입하여 고유주기를 산정한다.

4) 단계 3)에서 계산한 고유주기들 중에서 가장 작은 값이 λ 이면 C_i 를 임계하중에 대응하는 λ 로 결정하고 반복계산을 정지시킨다.

5) 고유주기들 중에서 가장 작은 값이 λ 보다 크면 $A_{i+1}=C_i$, $B_{i+1}=B_i$ 로 놓는다.

6) $[A_{i+1}, B_{i+1}]$ 의 간격이 허용범위보다 크면 단계 2)로 돌아가서 허용 범위보다 작게 될때까지 반복계산한다.

유한요소법을 적용하면 식 (6. 1)의 해를 구하므로써 바로 임계하중을 구할 수 있지만 한 부재에 대하여 많은 요소로 분할해야만 비교적 정확한 값을 얻을 수 있다. 유한분절법을 사용하면 임계하중을 구하기 위하여 이분법을 사용해야 되는 어려움이 있지만 한 부재에 대하여 한 개의 요소만 사용하여도 해석해와 같은 엄밀해를 구할 수 있다. 위의 두 가지 방법에 대한 비교 예들은 7. 2절에 제시하였다.

7. 數値解析例

본 연구에서 전개한 유한요소법과 유한분절법에 의한 해석이론의 타당성을 검증하기 위하여 평면 뼈대 구조물에 대한 임계하중의 산정과 기하적 비선형 해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램을 사용하여 여러가지 예제들을 시험한 결과, 비선형 해석의 경우에는 두 해석방법에 의한 해석결과들의 차이가 거의 나타나지 않았다. 이러한 이유 때문에 7장에서 취급한 비선형 해석에 예제들은 유한요소법에 의한 해석결과들만 제시하였다.

7. 1 Williams의 Toggle's Frame

Williams의 Toggle's Frame은 처음에 Williams⁽⁷⁾이 취급하였으며 나중에 Wood와 Zienkiewicz⁽⁸⁾에 의하여 해석되었다. 구조물의 형상과 재원은 그림 7. 1에 나타내었다. 구조물의 반쪽을 각각 5요소로 분할하고, 전단계수값은 ∞ 으로 취하여 변위증분법^(9, 10)에 의한 비선형 해석을 수행하였다. 그림 7. 1은 외부하중 P와 대응하는 수직처짐 관계, 그리고 하중 P와 고정단에서의 수평반력 R의 관계를 곡선으로 나타낸 것이다. 그림 7. 1에서 보는 바와 같이 Williams의 실험결과와 Wood와 Zienkiewicz의 수치적인 해석 결과들은 본 연구 결과와 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

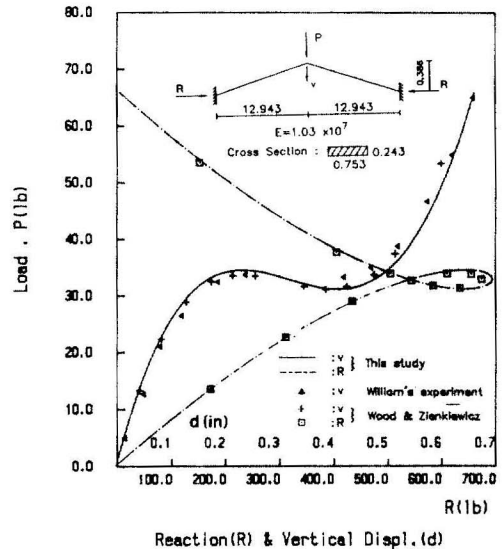


그림 7. 1 Load-deflection curves of toggle's frame

7. 2 臨界荷重

그림 7. 2는 압축력을 받는 외팔보를 나타낸 것이며 이때 사용된 재원은 다음과 같다.

길이 $L=100$ cm, 탄성계수 $E=2.1 \times 10^7$ N/cm²

단면적 $A=20$ cm²,

단면 2차모멘트 $I=1.666667$ cm⁴

Timonshenko⁽¹¹⁾가 이 문제에 대한 해석적인 해를 얻었으며 그 결과는 다음과 같다.

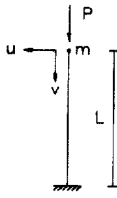


그림 7.2 Cantilever under the axial compressive force

$$P_{cr} = P_e \cdot \lambda = \frac{P_e}{1 + f_s \cdot P_e / GA} \quad (7.1)$$

여기서, $\lambda = \frac{1}{1 + f_s \cdot P_e / GA}$, $P_e = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4 \cdot L^2}$

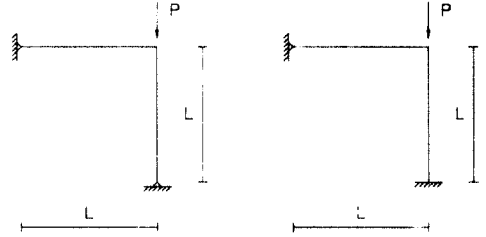
표 7.1은 유한요소법 (식 (6. 1)), 유한분절법 (식 (6. 2)) 그리고 Timoshenko의 해석적인 방법을 사용하여 f_s 값의 변화에 따른 외팔보의 임계하중을 산정한 것이다.

표 7.1 Critical loads of cantilever according to the variation of shear coefficient

f_s \ P_{cr}	F. E. M (10개 요소)	F. S. M. (1개 요소)	Analytic Solution
0.00	8635.91	8635.90	8635.90
10.00	8632.37	8632.35	8632.35
100.00	8600.56	8600.53	8600.53
2701.90	7757.39	7772.25	7772.25
6079.27	6853.47	6908.61	6908.61
10421.61	535.25	6045.13	6045.13
16211.40	5014.72	5181.54	5181.54
24317.08	4103.75	4317.95	4317.95

식 (6. 2)를 사용하는 경우에는 한개의 요소만으로

로 해석해와 완전히 일치하는 것을 알수있다. 식 (6. 1)을 사용하는 경우에는 f_s 값이 커짐에 따라 해석해와 약간의 차이를 보이지만 실제 구조물의 경우에 대응하는 f_s 값에 대해서는 충분히 정확한 값을 얻을 수 있음을 보여준다.



a) hinged-hinged right angle frame b) hinged-fixed right angle frame

그림 7.3

그림 7.3은 수직한 부재에 압축력 P가 걸리는 직각뿔대 구조물을 나타낸 것이다. 표 7.2는 유한요소법 (식 (6. 1)), 유한분절법 (식 (6. 2)) 그리고 Timoshenko의 해석해를 이용하여 전단계수가 높이고 양단 모두 회전단, 왼쪽은 회전단이고 오른쪽은 고정단의 두 가지 경계조건을 갖는 직각 뿔대 구조물의 임계하중 값을 요소수의 증가에 따라 나타낸 것이다. 여기서 사용된 제원은 그림 7.2의 외팔보의 경우와 동일하며 무차원량으로 표시하기 위하여 계산된 임계하중값들을 EI/L^2 로 나누어서 그 결과들을 표 7.2에 나타내었다.

외팔보의 임계하중을 산정할 때와 마찬가지로 식 (6. 2)를 이용하여 임계하중을 구하면 수평 및 수직 부재에 대하여 각각 한 개의 요소를 사용하여도 Timoshenko⁽¹¹⁾의 해석해와 완전히 일치하였

표 7.2 Critical loads of right angle frame

요소의 갯수		2	4	6	8	10	18
Hinge Hinge	F. S. M	13.886	13.886	13.886	13.886	13.886	13.886
	F. E. M	18.605	14.026	13.919	13.897	13.890	13.886
	Analytic	13.886	13.886	13.886	13.886	13.886	13.886
Hinge Fixed	F. S. M	26.958	26.958	26.958	26.958	26.958	26.958
	F. E. M	52.498	27.545	27.178	27.035	27.991	26.961
	Analytic	26.958	26.958	26.958	26.958	26.958	26.958

으며, 식 (6. 1)을 사용하는 경우에는 요소의 갯수를 증가시켜감에 따라서 해석해에 접근함을 알 수 있다.

7. 3 외팔보의 後挫屈 解析

전단변형 효과를 선명하게 나타내기 위하여 표 7. 1의 $\lambda = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ 에 대응하는 전단계수 $f_s = 224317.08, 16421.612, 6079.274, 2701.9, 0.0$ 값을 선택하여 외팔보의 후좌굴 해석을 수행하였다. 그 결과를 아래 그림 7. 4에 하중과 자유단의 수직처짐에 대한 관계곡선으로 나타내었다. 표 7. 1에서 예측한 임계하중 값까지는 횡변위가 거의 발생하지 않다가 임계하중을 약간 상회하는 크기에서 급격한 횡변위가 발생하는 좌굴현상을 나타낼 수 있다.

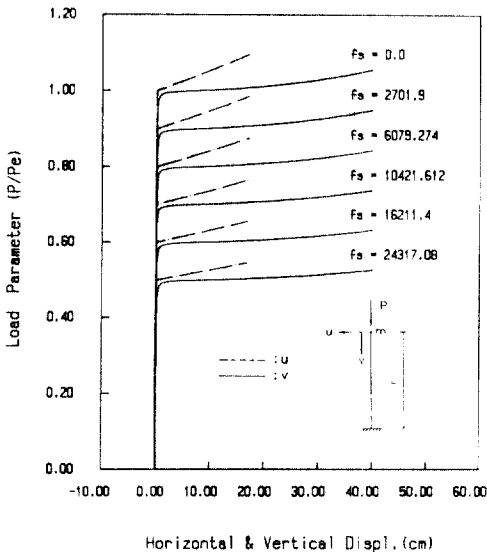


그림 7. 4 Load-deflection curves at free end(m) of cantilever

8. 結 論

Reissner 原理를 2次元 보-기둥에 적용시키므로써 軸力과 剪斷變形 효과를 고려한 平衡方程式을 유도하였다. 이 方程式을 積分하여 嚴密한 接線剛度 매트릭스를 유도하고 幾何的인 非線形 解析에 적용시키는 有限分節法과 剪斷變形을 고려하는 Hermitian 多項式을 이용하여 彈性 및 幾何的인

剛度매트릭스를 算定하고 이를 非線形 解析에 사용하는 有限要素法을 제시하였다.

이러한 두가지의 보-기둥 要素들을 平面剛대 構造物의 臨界荷重算定 및 幾何的인 非線形 解析에 적용한 結果 다음과 같은 結論에 도달하였다.

1) 平面剛대 構造物의 臨界荷重을 산정함에 있어서 有限分節法에서 사용되는 接線剛度 매트릭스는 部材 하나에 대하여 한개의 要素만 사용하여도 精確한 臨界荷重값을 제공하지만 有限要素法에서 사용되는 剛度매트릭스들은 部材 하나에 대하여 많은 要素로 분할해야만 嚴密解에 收斂하였다.

2) 平面剛대에 대한 Iso-parametric 有限要素는 剪斷係數값이 零에 접근함에 따라 Shear locking 現狀을 나타내지만 本 論文中에서 제시한 要素들에서는 그러한 문제들이 전혀 발생하지 않으며 剪斷變形을 무시하는 경우에는 剪斷係數값을 단순히 零으로 놓으면 된다.

3) 剪斷變形 효과를 고려한 平面剛대 構造物의 幾何的인 非線形 舉動을 추적할 수 있다.

參 考 文 獻

1. R. K. Wen and J. Rahimzadeh, "Non-linear elastic frame analysis by finite element", *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 109, No. 8, August, 1983, pp.1952-1971.
2. S. A. Saafan, Non-linear behavior of structural plane frames", *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 89, No. ST 4, August, 1963, pp.557-579.
3. C. Oran, "Tangent stiffness in plane Frames", *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 99, No. ST 6, June, 1973, pp 973-985.
4. C. Oran, "Tangent stiffness in space Frames", *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 99, No. ST 6, June, 1973, pp 987-1001.
5. J. J. Connor, "Analysis of structural member systems", the Ronald Press Company, New York, 1976, pp.585-603.
6. K. Washizu, "Variational methods in elasticity and plasticity", Pergamon Press, Inc., Elmssford, N. Y., 1975, pp.52-75.
7. F. S. Williams, "An approach to the non-linear behavior of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflection", *Quart. J. Mech. Appl. Math.* Vol. 17, No. 4, 1964, pp.451-469.
8. R. D. Wood and O. C. Zienkiewicz, "Geometrically non-linear finite element analysis of beams, frames,

arches and axisymmetric shells", *Comput. & Structures*, Vol. 7, 1977, pp.725-735.

9. G. Powell and J. Simons, "Improved iteration strategy for non-linear structures", *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 17, 1981, pp.1455-1467.
10. J. L. Batoz and G. Dhatt, "Incremental displacement algorithms for non-linear problems", *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp.1262-1267.
11. S. P. Timoshenko and J. M. Gear, "Theory of elastic stability", 2nd ed., McGraw-Hill, 1961, pp.46-162.
12. 金昌孝, "數值解法과 電算프로그래밍", 敎學社, 1984, pp.239-243.

附 錄

Ⅱ-1. Stability Function :

1) $F_1 < 0$

$\beta > 0.01$
$\phi_1 = \frac{\beta^3 \cdot \sin \beta}{12 \cdot \phi_-} \cdot (sf+1)^2$
$\phi_2 = \frac{\beta^2 \cdot (1 - \cos \beta)}{6 \cdot \phi_-} \cdot (sf+1)$
$\phi_3 = \frac{\beta \cdot \{\sin \beta - \beta \cdot \cos \beta \cdot (sf+1)\}}{4 \cdot \phi_-}$
$\phi_4 = \frac{\beta \cdot \{\beta \cdot (Sf+1) - \sin \beta\}}{2 \cdot \phi_-}$
$0 < \beta < 0.01$
$\phi_1 = \frac{1}{1+12S} - \beta^2 \cdot \frac{12S^2+2S+1/10}{(1+12S)^2}$
$\phi_2 = \frac{1}{1+12S} - \beta^2 \cdot \frac{1/60}{(1+12S)^2}$

$\phi_3 = \frac{1+3S}{1+12S} - \beta^2 \cdot \frac{3S^2+S/2+1/30}{(1+12S)^2}$
$\phi_4 = \frac{1-6S}{1+12S} + \beta^2 \cdot \frac{6S^2+S+1/60}{(1+12S)^2}$

2) $F_1 > 0$

$\beta > 0.01$
$\phi_1 = \frac{\beta^3 \cdot \sinh \beta}{12 \cdot \phi_+} \cdot (sf+1)^2$
$\phi_2 = \frac{\beta^2 \cdot (\cosh \beta - 1)}{6 \cdot \phi_+} \cdot (sf+1)$
$\phi_3 = \frac{\beta \cdot \{\beta \cdot \cosh \beta \cdot (sf+1) - \sinh \beta\}}{4 \cdot \phi_+}$
$\phi_4 = \frac{\beta \cdot \{\sinh \beta - \beta \cdot (sf+1)\}}{2 \cdot \beta + \phi_+}$
$0 < \beta < 0.01$
$\phi_1 = \frac{1}{1+12S} + \beta^2 \cdot \frac{12S^2+2S+1/10}{(1+12S)^2}$
$\phi_2 = \frac{1}{1+12S} + \beta^2 \cdot \frac{1/60}{(1+12S)^2}$
$\phi_3 = \frac{1+3S}{1+12S} + \beta^2 \cdot \frac{3S^2+S/2+1/30}{(1+12S)^2}$
$\phi_4 = \frac{1-6S}{1+12S} - \beta^2 \cdot \frac{6S^2+S+1/60}{(1+12S)^2}$

여기서, $\phi_- = 2 - 2 \cdot \cos \beta - \beta \cdot \sin \beta \cdot (sf+1)$
 $\phi_+ = 2 - 2 \cdot \cosh \beta + \beta \cdot \sinh \beta \cdot (sf+1)$
 $\beta = L \cdot \sqrt{|F_1|} / \{(EI \cdot (1+F_1 \cdot f_s/GA))\}$
 $sf = f_s \cdot F_1/GA$
 $S = f_s \cdot EI/(GA \cdot L^2)$

(接受: 1989. 11. 6)